Esercitazioni per il Corso di Fisica

Dinamica

Dr. Luca Pacher

Corso di Laurea in Farmacia

A.A. 2020/2021

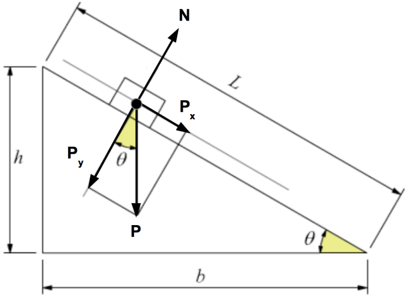
03/11/2020

Esercizio 1

Sul **piano inclinato** :

Un corpo di massa 1 kg inizialmente fermo è posto su una rampa **priva di attrito** *lunga 10 m e alta 5 m.*

- *con quale accelerazione scende il corpo ?*
- *quanto tempo impiega ad arrivare in fondo alla rampa se parte dall'estremo superiore ?*
- *con quale velocità giunge alla base della rampa ?*



Cosa sappiamo dal testo dell'esercizio :

$$m = 1 \text{ kg} \,, \quad h = 5 \text{ m} \quad , \; L = 10 \text{ m} \quad , \; v_0 = 0 \text{ m/s}$$

Dalla geometria :

$$\sin\theta = \frac{h}{L} = \frac{5 \text{ m}}{10 \text{ m}} = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; \theta = 30^\circ \;\text{ e quindi anche }\; \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- le **forze** che agiscono sulla massa sono la **forza peso** $\mathbf{P} = m\,\mathbf{g}$ e la **reazione vincolare** del piano $\mathbf{N}$.

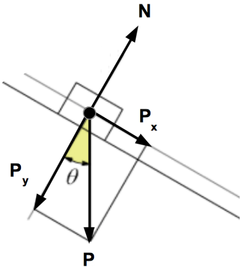
- non ci sono forze di attrito per ipotesi (piano ideale, perfettamente liscio)

- scelgo un sistema di riferimento cartesiano (x, y) che giace sul piano inclinato

- rispetto a questo sistema di riferimento possiamo andare a **scomporre la forza peso** in una **componente normale** (perpendicolare al piano) e in una **componente longitudinale** (parallela al piano) :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P_x} + \mathbf{P_y}$$

$$\begin{cases} P_y = P\cos\theta = m\,g\,\cos\theta \\ \\ P_x = P\sin\theta = m\,g\,\sin\theta \end{cases}$$



Infine applichiamo la **legge di Newton** nella forma :

$$\sum \mathbf{F} = m\,\mathbf{a} \;\rightarrow\; \begin{cases} P_y - N = 0 \;\; \text{(no moto lungo la direzione perpendicolare)} \\ \\ P_x = m\,a \;\rightarrow\;\; m\,g\,\sin\theta = m\,a \end{cases}$$

La componente normale della forza peso è **bilanciata dalla reazione vincolare** del piano :

$$P_y = N \;\rightarrow\; \boxed{N = m\,g\,\cos\theta}$$

Lungo la componente parallela invece ho un **moto rettilineo uniformemente accelerato** di accelerazione :

$$\boxed{a = g\,\sin\theta} = \frac{g}{2} = \frac{9.81\ \mathrm{m/s^2}}{2} = 4.91\ \mathrm{m/s^2}$$

Nota l'accelerazione applichiamo i risultati di **cinematica** che già conosciamo per il moto rettilineo uniformemente accelerato :

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad , \quad v(t) = v_0 + a\ t \quad , \quad v^2 - v_0^2 = 2\,a\,(x - x_0)$$

Condizioni iniziali :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ v_0 = 0 \ \ \text{(la massa è inizialmente ferma)} \end{cases}$$

Tempo impiegato a scendere la rampa di lunghezza L :

$$L = \frac{1}{2} a\, t^2 \ \rightarrow \ t = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{20\ \text{m}}{4.905\ \text{m/s}^2}} = 2.02\ \text{s}$$

Velocità massima raggiunta :

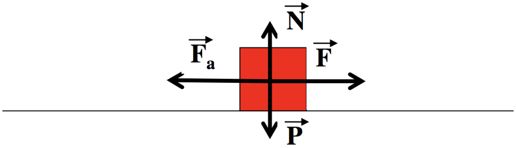
$$v_{max}^2 = 2aL \ \rightarrow \ v_{max} = \sqrt{2aL} = \sqrt{20\ \text{m} \cdot 4.905\ \text{m/s}^2} = 9.9\ \text{m/s}$$

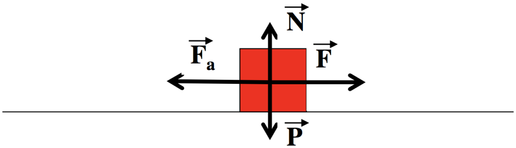
Esercizio 2

Sulla forza di attrito :

Una massa di 2 kg è posta su un piano orizzontale **scabro**. *Sapendo che il coefficiente di attrito statico vale 0.4 determinare :*

- *l'intensità della forza di attrito*
- *l'intensità della forza da applicare alla massa per metterla in moto*





Forze agenti sulla massa :

– **forza peso**, verso il basso :

$$\mathbf{P} = m\,\mathbf{g}$$

– **reazione vincolare** del piano, verso l'alto :

$$\mathbf{N} = -\mathbf{P}$$

– la forza applicata $\mathbf{F}$, da determinare

– **forza di attrito**, lungo la direzione del moto ma verso opposto al vettore $\mathbf{F}$, in modulo

$$|\mathbf{F_a}| = \mu_s|\mathbf{N}|$$

Numericamente :

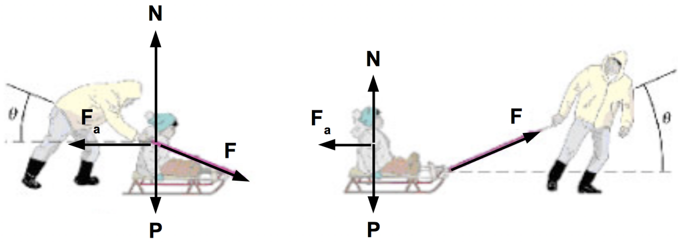
$$|\mathbf{P}| = |\mathbf{N}| = 2 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 = 19.6 \text{ N}$$

$$|\mathbf{F_a}| = \mu_s mg = 0.4 \ \cdot 19.6 \text{ N} = 7.84 \text{ N}$$

Per poter mettere in movimento la massa la forza applicata deve essere in modulo più grande della forza di attrito, quindi :

$$|\mathbf{F}| > |\mathbf{F_a}| \ \rightarrow \ \ |\mathbf{F}| > 7.84 \text{ N}$$

A parità di forza applicata e di angolo di inclinazione, conviene **spingere** *oppure* **tirare** *una slitta ?*



– le forze che agiscono sono: la forza peso $\mathbf{P} = m\,\mathbf{g}$, la forza applicata $\mathbf{F}$, la reazione vincolare del terreno $\mathbf{N}$ e la forza di attrito $\mathbf{F_a}$

– la forza applicata $\mathbf{F}$ può essere scomposta in una componente parallela e in una verticale :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_x} + \mathbf{F_y} = F\cos\theta\;\mathbf{i} + F\sin\theta\;\mathbf{j}$$

– la **forza di attrito dinamico** dipende dalla reazione vincolare $\mathbf{N}$ e in modulo vale :

$$F_a = \mu_d\,N$$

MA... la reazione vincolare è diversa nei due casi !

$$N_1 = m\,g + F\sin\theta \;\; \rightarrow \;\; \text{spingendo}$$

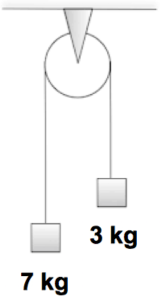
$$N_2 = m\,g - F\sin\theta \;\; \rightarrow \;\; \text{tirando}$$

$N_2 < N_1 \;\; \rightarrow$ la forza di attrito è minore quando **tiro** la slitta

Esercizio 4

La **macchina di Atwood** (o semplicemente ... carrucola ideale)

Due masse di valore 3 kg e 7 kg sono connesse tramite un filo inestensibile e di massa nulla posto sopra una carrucola ideale :



Calcolare :

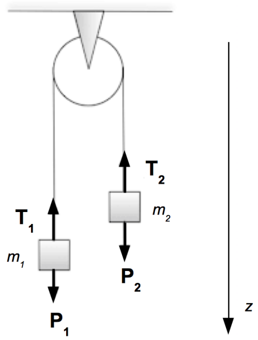
- *l'accelerazione del sistema formato dalle due masse*
- *la tensione del filo*

Descriviamo il sistema mettendoci nel caso più generale possibile :

- ho due masse $m_1 = 7$ kg e $m_2 = 3$ kg
- sulle masse agisce la forza peso, quindi :

$$\mathbf{P_1} = m_1\,\mathbf{g} \qquad \mathbf{P_2} = m_2\,\mathbf{g}$$

- le masse sono appese, quindi identifico sul filo **le tensioni** $\mathbf{T_1}$ e $\mathbf{T_2}$
- **scelgo** una direzione per il mio sistema di riferimento, ad esempio un asse z verso il basso (come la direzione del vettore $\mathbf{g}$)



Applico la **legge di Newton** alle due masse :

$$\begin{cases} \mathbf{P_1} + \mathbf{T_1} = m_1\,\mathbf{a_1} \\ \mathbf{P_2} + \mathbf{T_2} = m_2\,\mathbf{a_2} \end{cases}$$

Ma il testo del problema ci dice anche che :

- il filo è **inestensibile** e di **massa nulla**
- la carrucola è **ideale**, quindi anch'essa di massa nulla (non ho "inerzia")

Filo inestensibile e di massa nulla significa che :

1) **non ci sono forze elastiche di richiamo aggiuntive**

2) **non c'è accelerazione sul filo**

quindi il filo si limita a **cambiare direzione alle forze senza alterarne il modulo**

Questo significa che :

- **la tensione del filo è unica**, $\boxed{\mathbf{T_1} = \mathbf{T_2} = \mathbf{T}}$
- le due masse si muovono con accelerazioni uguali ed opposte, $\boxed{\mathbf{a_1} = -\mathbf{a_2}}$

Fatte queste premesse il sistema diventa :

$$\begin{cases} \mathbf{P_1} + \mathbf{T} = m_1\,\mathbf{a} \\ \mathbf{P_2} + \mathbf{T} = -m_2\,\mathbf{a} \end{cases}$$

Passando alle componenti :

$$\begin{cases} m_1\,g - T = m_1\,a \\ m_2\,g - T = -m_2\,a \end{cases}$$

Sottraggo membro a membro le due equazioni :

$$m_1\,g - \cancel{T} - m_2\,g + \cancel{T} = m_1\,a + m_2\,a \;\rightarrow\; (m_1 - m_2)\,g = (m_1 + m_2)\,a$$

L' **accelerazione** del sistema è quindi :

$$\boxed{a = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)\,g} = \left(\frac{7\ \mathsf{kg} - 3\ \mathsf{kg}}{7\ \mathsf{kg} + 3\ \mathsf{kg}}\right)\,9.81\ \mathsf{m/s^2} = 4.057\ \mathsf{m/s^2}$$

Osserviamo come nel caso di masse uguali $m_1 = m_2$ il risultato è correttamente $a = 0$ e le masse rimangono in equilibrio statico.

Nota l'accelerazione posso ricavare anche la **tensione del filo**, ad esempio dalla prima equazione del sistema :

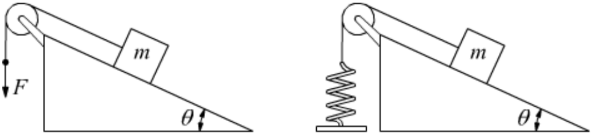
$$m_1\, g - T = m_1\, a$$

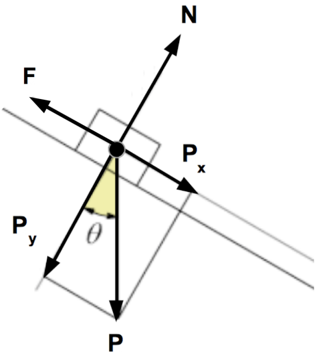
$$\rightarrow\ T = m_1\,(g - a) = m_1\,\left(g - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g\right) = m_1\,\left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)\, g$$

$$\boxed{T = 2\,\left(\frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}\right)\, g} = 2\,\frac{7\ \text{kg} \cdot 3\ \text{kg}}{(7 + 3)\ \text{kg}} \cdot 9.81\ \text{m/s}^2 = 41.2\ \text{N}$$

Un problema di **statica** :

Un blocco di massa 4 kg è fermo su un piano inclinato privo di attrito, tenuto in equilibrio da una forza di modulo 20 N come in figura. Trovare l'inclinazione del piano. Sostituendo la forza con una molla di costante elastica 80 N/m trovare l'allungamento della molla e l'energia potenziale elastica in essa immagazzinata.





– la carrucola e il filo sono ideali, quindi si limitano a **cambiare direzione alla forza applicata senza cambiarne il modulo**

– scegliamo come al solito un sistema di riferimento cartesiano (x, y) che giace sul piano e scomponiamo la forza peso $\mathbf{P} = m\,\mathbf{g}$ rispetto a questo sistema :

$$\begin{cases} P_x = m\,g\,\sin\theta \\ P_y = m\,g\,\cos\theta \end{cases}$$

Se il corpo è **fermo** significa che **la risultante delle forze** che agiscono su di esso è nulla :

$$\boxed{\sum \mathbf{F} = 0}$$

Passando alle componenti :

$$\begin{cases} P_x - F = 0 \\ P_y - N = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_x = F \\ P_y = N \end{cases}$$

Dalla condizione di equilibrio lungo l'asse x possiamo quindi ricavare l'angolo di inclinazione θ del piano :

$$F = m\,g\,\sin\theta \;\rightarrow\; \sin\theta = \frac{F}{m\,g} \;\rightarrow\; \boxed{\theta = \arcsin\left(\frac{F}{m\,g}\right)}$$

Numericamente :

$$\theta = \arcsin\left(\frac{20\ \text{N}}{4\ \text{kg}\cdot 9.81\ \text{m/s}^2}\right) = 0.53\ \text{rad} = 0.53\ \text{rad}\cdot\frac{360°}{2\,\pi\ \text{rad}} = 30.4°$$

Sostituendo la forza applicata con una **molla di costante elastica** k, dalla *legge di Hooke* ricaviamo subito di quanto si allunga la molla :

$$F = k\ \Delta x \ \rightarrow \quad \Delta x = \frac{F}{k} = \frac{20\ \mathsf{N}}{80\ \mathsf{N/m}} = 0.25\ \mathsf{m} = 25\ \mathsf{cm}$$

L'**energia potenziale elastica** immagazzinata è invece :

$$U = \frac{1}{2}\, k\, \Delta x^2 = 0.5 \cdot 80\ \frac{\mathsf{N}}{\mathsf{m}} \cdot (0.25\ \mathsf{m})^2 = 2.5\ \mathsf{N\ m} = 2.5\ \mathsf{J}$$