Esercitazioni per il Corso di Fisica

Lavoro, energia, conservazione dell'energia meccanica

Dr. Luca Pacher

Corso di Laurea in Farmacia

A.A. 2020/2021

12/11/2020

Formulario di dinamica /1

- la **risultante** **vettoriale** delle forze applicate su un corpo determina la sua **accelerazione** :

$$\boxed{\sum \mathbf{F} = m\,\mathbf{a}}$$ **legge di Newton**

- forza **peso** :

$$\boxed{\mathbf{P} = m\,\mathbf{g}} \quad \rightarrow$$ ragioneremo poi su cosa sia veramente "g"

- forza di richiamo **elastica** (ad esempio una molla) :

$$\boxed{\mathbf{F} = -k\,\mathbf{x}}$$ **legge di Hooke**

- forza di **attrito** **radente** (in modulo) :

$$\boxed{|\mathbf{F}_A| = \mu\,|\mathbf{N}|}$$

  - vettorialmente sempre **opposta** alla direzione del moto
  - distinguiamo tra coefficiente di attrito **statico** e **dinamico**: $\mu_s > \mu_d$

Formulario di dinamica /2

- definizione di **lavoro** compiuto da una forza **costante** $\mathbf{F}$ lungo uno spostamento $\mathbf{s}$:

$$\boxed{W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{F}|\,|\mathbf{s}| \cos\theta}$$

N.B : se i vettori forza e spostamento sono **ortogonali** tra loro il lavoro è sempre nullo (e.g. forza di Lorentz)

- definizione di **energia cinetica** di un corpo in movimento :

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}\, m\, v^2}$$

- **teorema dell'energia cinetica** (o delle "forze vive") per il calcolo del lavoro :

$$\boxed{W_{AB} = \Delta E_k = E_{k,B} - E_{k,A}}$$ **... sempre valido !**

- alcune forze sono però "speciali" in quanto il lavoro **non dipende dal percorso** ma solo da punto di partenza e punto di arrivo

- si chiamano **forze conservative**

- le forze conservative sono caratterizzate da una **funzione scalare** U chiamata **energia potenziale** che permette di calcolare il lavoro come **"meno" la differenza di energia potenziale** :

$$\boxed{W_{AB} = -\Delta U} = -(U_B - U_A) = U_A - U_B$$

- si chiama **energia meccanica** la somma :

$$\boxed{E_m = E_k + U}$$

Formulario di dinamica /4

Esempio : **energia potenziale gravitazionale** :

$$\boxed{U_g = m\,g\,z}$$

Esempio : **energia potenziale elastica di una molla** :

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2}kx^2}$$

In presenza di **sole forze conservative** l'energia meccanica totale **si conserva** :

$$E_m = E_k + U = \text{cost}$$

MA... in presenza di **forze di attrito**
l'energia meccanica **NON SI CONSERVA** !

Sempre per i più curiosi...

- nel caso più generale possibile il **vettore forza** può **cambiare punto per punto** lungo la traiettoria del moto, quindo non essere costante :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) \;\rightarrow\; \text{questo si chiama un } \textbf{"campo" vettoriale}$$

- si parte dal definire un **lavoro infinitesimo** :

$$dW = \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$$

- per calcolare il **lavoro totale** nell'andare da A a B bisogna allora **integrare sul percorso** :

$$\boxed{W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}} \;\rightarrow\; \text{questo si chiama un } \textbf{integrale "di linea"}$$

Caso più semplice: **moto rettilineo vario** :

- problema unidimensionale, forza parallela alla direzione del moto (ad esempio lungo asse x) :

$$dW = \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = F dx$$

- in modo del tutto generale l'accelerazione **può anche non essere costante** lungo il percorso !

$$F = ma \quad \text{con } a = a(x) \;\rightarrow\; F = F(x)$$

- calcoliamo **il lavoro** nell'andare tra due punti A e B :

$$W = \int_A^B (ma)\,dx = m\int_A^B a\,dx = m\int_A^B \frac{dv}{dt}\,dx = m\int_{v_A}^{v_B} v\,dv$$

$$\rightarrow\; W = m\int_{v_A}^{v_B} v\,dv = \left[\frac{1}{2}m\,v^2\right]_{v_A}^{v_B} = \boxed{\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \Delta E_K}$$

teorema dell'energia cinetica

Forze conservative ed energia potenziale

- una forza $\mathbf{F}$ si dice **<u>conservativa</u>** se per un qualunque **percorso <u>chiuso</u>** il lavoro totale è **nullo** :

$\boxed{W = \oint \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = 0}$ $\rightarrow$ questo si chiama un **integrale "di circuitazione"**

- l'Analisi Matematica ci dice che se questo è vero, allora esiste una **funzione <u>scalare</u> delle coordinate** $U = U(x, y, z)$ per cui il vettore forza si può scrivere come :

$$\boxed{\mathbf{F} = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}\right) = -\nabla U}$$

- il simbolo ∇ si chiama **<u>"gradiente"</u>** (come se fosse un vettore, ma le componenti sono le **derivate parziali**) :

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

- in Fisica la funzione scalare $U(x, y, z)$ prende il nome di **<u>energia potenziale</u>**

Caso più semplice: **moto rettilineo** (problema unidimensionale) :

- il "gradiente" si riduce ad un'unica **derivata totale** :

$$\nabla \rightarrow \frac{d}{dx}$$

- se conosco l'espressione (la funzione) dell'energia potenziale $U = U(x)$ allora posso **calcolare la forza derivando** :

$$\boxed{F = -\frac{dU}{dx}}$$

- il lavoro è proprio **"meno" la variazione di energia potenziale** :

$$W = \int_A^B F\,dx = \int_A^B \left(-\frac{dU}{\cancel{dx}}\right)\cancel{dx} = -\int_A^B dU = \boxed{U_A - U_B = -\Delta U}$$

Esempio : **forza peso** (assumendo asse z rivolto verso l'alto) :

$$U(z) = mgz \;\rightarrow\; F = -\frac{dU}{dz} = -\frac{d}{dz}\Big[mgz\Big] = -mg$$

Esempio : **forza elastica** :

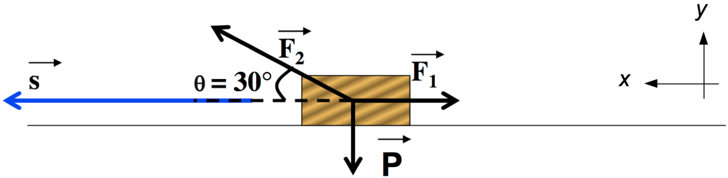
$$U(x) = \frac{1}{2}k\,x^2 \;\rightarrow\; F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}kx^2\right] = -k\,x$$ **legge di Hooke**

Esercizio 1

Sulla definizione di **lavoro** in Fisica :

Un massa di peso 40 N è posto su un piano orizzontale liscio. Sul corpo agiscono due forze $\mathbf{F_1}$ *e* $\mathbf{F_2}$ *di intensità rispettivamente 20 N e 30 N come in figura. Determinare :*

- *il lavoro compiuto da ciascuna forza, compresa la forza peso, associato ad uno spostamento del corpo di 10 m.*
- *l'accelerazione a cui è soggetta la massa*



Ricordiamo la definizione di **lavoro** nel caso di una **forza costante** lungo uno spostamento $\mathbf{s}$:

$$\boxed{W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{F}|\,|\mathbf{s}|\,\cos\theta}$$

essendo θ l'angolo compreso tra i **vettori forza e spostamento**.

1) Lavoro della forza $\mathbf{F_1}$:

$$\boxed{\theta = 180^\circ} \quad \rightarrow \quad W_1 = 20\ \mathsf{N} \cdot 10\ \mathsf{m} \cdot \cos 180^\circ = 20\ \mathsf{N} \cdot 10\ \mathsf{m} \cdot (-1) = -200\ \mathsf{J}$$

2) Lavoro della forza $\mathbf{F_2}$:

$$\boxed{\theta = 30^\circ} \quad \rightarrow \quad W_2 = 30\ \mathsf{N} \cdot 10\ \mathsf{m} \cdot \cos 30^\circ = 30\ \mathsf{N} \cdot 10\ \mathsf{m} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 259.8\ \mathsf{J}$$

3) Lavoro della forza peso $\mathbf{P}$:

$$\boxed{\theta = -90^\circ} \quad \rightarrow \quad W_P = 40\ \mathsf{N} \cdot 10\ \mathsf{m} \cdot \cos(-90^\circ) = 0\ \mathsf{J}$$

Per calcolare l'accelerazione della massa applichiamo la **legge di Newton** nella forma :

$$\sum \mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$

– **scegliamo** un sistema di riferimento (x, y) e scriviamo tutte le forze **in componenti** :

$$\mathbf{P} = m\,\mathbf{g} = (0, -m\,g, 0) \quad \mathbf{F_1} = (-F_1, 0, 0) \quad \mathbf{F_2} = (F_2 \cos\theta, F_2 \sin\theta, 0)$$

– lungo **la verticale** la forza peso è bilanciata dalla reazione vincolare e dalla componente $F_2 \sin\theta$:

$$-m\,g + F_2 \sin\theta + N = 0$$

– lungo l'orizzontale il moto è uniformemente accelerato :

$$-F_1 + F_2 \cos\theta = m\,a = \left(\frac{P}{g}\right) a$$

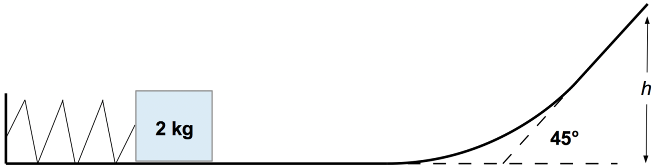
$$\rightarrow \; a = \frac{(-F_1 + F_2 \cos\theta)\, g}{P} = \frac{(-20\ \mathsf{N} + 30\ \mathsf{N} \cos 30°)\, 9.81\ \mathsf{m/s}^2}{40\ \mathsf{N}} = 1.5\ \mathsf{m/s}^2$$

Esercizio 2

Sulla **conservazione dell'energia meccanica** :

Un blocco di 2 kg è inizialmente spinto contro una molla di costante elastica 500 N/m, accorciandola di 20 cm. Tolto il vincolo, la molla spinge il blocco lungo una rotaia orizzontale priva di attrito e poi su per un piano inclinato 45°, anch'esso privo di attrito. Determinare :

- *la velocità del blocco quando abbandona la molla*
- *l'altezza massima raggiunta dal blocco nel risalire il piano inclinato*
- *lo spazio percorso sul piano inclinato*



– energia **cinetica** del corpo in movimento :

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m\, v^2}$$

– energia potenziale **elastica** della molla :

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2} k\, x^2}$$

– energia potenziale **gravitazionale** :

$$\boxed{U_g = m\, g\, z}$$

– non essendoci attriti in gioco, tutte le forze sono **conservative**, quindi l'**energia meccanica si conserva**

$$E_m = E_k + U_e + U_g = \text{cost}$$

- per prima cosa **scegliamo un sistema di riferimento**, in questo caso (x, z)
- $z = 0$ rappresenta il piano orizzontale, per il quale scegliamo **zero** come potenziale gravitazionale di riferimento
- il blocco è inizialmente fermo, quindi non c'è energia cinetica, l'energia meccanica è solo energia elastica :

$$E_m = U_e = \frac{1}{2} k\, x^2$$

- quando il blocco si stacca dalla molla, tutta l'energia potenziale elastica immagazzinata nella molla **si trasforma** in energia cinetica :

$$E_m = \frac{1}{2} k\, x^2 = \frac{1}{2} m\, v^2$$

- da questa condizione ricaviamo subito la **velocità iniziale** del blocco (usiamo anche 20 cm = 0.2 m) :

$$v = \sqrt{\frac{k\, x^2}{m}} = \sqrt{\frac{500 \text{ N/m} \cdot (0.2 \text{ m/s})^2}{2 \text{ kg}}} = \boxed{3.16 \text{ m/s}}$$

- il blocco sale poi lungo il piano inclinato **fino a fermarsi** raggiunta un'altezza h

- questo significa che tutta l'energia cinetica **si trasforma** in energia potenziale gravitazionale :

$$E_m = E_k = U_g \;\rightarrow\; \frac{1}{2} m\, v^2 = m\, g\, h$$

$$\rightarrow \quad h = \frac{v^2}{2\, g} = \frac{(3.16 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2} = \boxed{0.51 \text{ m}}$$

- nota l'altezza raggiunta e l'angolo di inclinazione $\theta = 45^\circ$ ricaviamo lo spazio percorso lungo il piano :

$$\sin\theta = \frac{h}{s} \;\rightarrow\; s = \frac{h}{\sin\theta} = h\,\frac{2}{\sqrt{2}} = \boxed{0.72 \text{ m}}$$

Esercizio 3

Sul **moto verticale dei corpi** risolto con la conservazione dell'energia meccanica :

Una pallina di massa 50 g viene lanciata verso l'alto con velocità iniziale di 6 m/s. Trascurando l'attrito dell'aria, determinare l'altezza massima raggiunta. Quanto vale il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale nel fermare la pallina ?

Abbiamo già risolto un esercizio simile usando i risultati validi per il **moto uniformemente accelerato** :

– il moto verticale della pallina (assumiamo come riferimento un asse z verso l'alto) viene **frenato dall'accelerazione di gravità costante**

$$v(t) = v_0 - g\,t$$

– quando la palla raggiunge l'**altezza massima** la sua velocità finale è nulla

$$v_{fin} = 0$$

– per calcolare l'altezza massima raggiunta posso usare la relazione che lega velocità al quadrato e spazio percorso

$$v_{fin}^2 - v_{in}^2 = -2\,g\,(z_{fin} - z_{in})$$

$$v_{fin} = 0 \;\rightarrow\quad -v_{in}^2 = -2\,g\,h_{max} \;\rightarrow\quad \boxed{h_{max} = \frac{v_{in}^2}{2\,g}}$$

Possiamo **ottenere lo stesso risultato** applicando la **conservazione dell'energia meccanica** :

$$\boxed{E_m = E_k + U_g = \text{cost}} \;\rightarrow\; E_{k,in} + U_{g,in} = E_{k,fin} + U_{g,fin}$$

Ricordando le espressioni per **energia cinetica** ed **energia potenziale gravitazionale** :

$$\frac{1}{2}\,m\,v_{in}^2 + m\,g\,z_{in} = \frac{1}{2}\,m\,v_{fin}^2 + m\,g\,z_{fin}$$

$$v_{fin} = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{2}\,m\,v_{in}^2 = m\,g\,(z_{fin} - z_{in}) = m\,g\,h_{max} \;\rightarrow\; \boxed{h_{max} = \frac{v_{in}^2}{2\,g}}$$

Numericamente:

$$h_{max} = \frac{(6\ \text{m/s})^2}{2 \cdot 9.81\ \text{m/s}^2} = 1.83\ \text{m}$$

Quanto vale **il lavoro** compiuto dalla forza gravitazionale nel fermare la pallina ?

$$m = 50 \text{ g} = 50 \times 10^{-3} \text{ kg} = 0.05 \text{ kg}$$

1) Applicando la **definizione di lavoro** :

$$\begin{aligned} W &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{s} = m\,\mathbf{g} \cdot \mathbf{s} = m\,g\,h_{max}\,\cos 180^\circ \\ &= (0.05 \text{ kg}) \cdot (9.81 \text{ m/s}^2) \cdot (1.83 \text{ m})(-1) = -0.9 \text{ J} \end{aligned}$$

2) Applicando il **teorema dell'energia cinetica (teorema delle forze vive)** :

$$\begin{aligned} W &= \Delta E_k = E_{k,fin} - E_{k,in} = \frac{1}{2}\,m\,(\cancel{v_{fin}^2} - v_{in}^2) = -\frac{1}{2}\,m\,v_{in}^2 \\ &= -0.5 \cdot 0.05 \text{ kg} \cdot (6 \text{ m/s})^2 = -0.9 \text{ J} \end{aligned}$$

3) Applicando la **conservatività della forza gravitazionale** :

$$W = -\Delta U_g = -(U_{g,fin} - U_{g,in}) = -m\,g\,h_{max} = -0.9 \text{ J}$$