Esercitazioni per il Corso di Fisica

Energia, moto circolare, quantità di moto e urti

Dr. Luca Pacher

pacher@to.infn.it

Corso di Laurea in Farmacia

A.A. 2020/2021

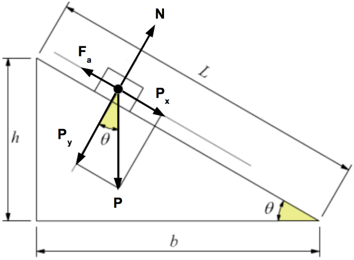
17/11/2020

Esercizio 1

Sul lavoro fatto dalle **forze non conservative** :

Un bambino di massa 20 kg scende lungo uno scivolo approssimabile ad una piano inclinato di angolo 30°. Il coefficiente di attrito dinamico tra il bambino e lo scivolo è di 0.2. Se il bambino parte dalla sommità dello scivolo, posta ad altezza 2 m dal suolo, calcolare :

- *il lavoro compiuto dalla forza di attrito*
- *la velocità finale del bambino quando raggiunge il suolo*



Si tratta di un problema di **piano inclinato** in presenza di **forza di attrito** :

– noti **altezza** e **angolo di inclinazione** del piano inclinato possiamo calcolare la lunghezza dello scivolo :

$$\sin\theta = \frac{h}{L} \;\rightarrow\; L = \frac{h}{\sin\theta} = \frac{h}{\sin 30^\circ} = 2\,h = 4 \text{ m}$$

– scegliamo un sistema di riferimento cartesiano (x, y) che giace sul piano rispetto al quale **scomporre le forze in gioco**

– scomponiamo la forza peso $\mathbf{P} = m\,\mathbf{g}$ rispetto al sistema di riferimento scelto :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P_x} + \mathbf{P_y} \;\rightarrow\; \begin{cases} P_x = m\,g\,\sin\theta \\ \\ P_y = m\,g\,\cos\theta \end{cases}$$

– la **forza di attrito** è determinata dalla reazione vincolare del piano e in modulo vale :

$$|\mathbf{F_a}| = \mu_d\,|\mathbf{N}| = \mu_d\,m\,g\,\cos\theta$$

– il **lavoro della forza di attrito** per uno spostamento L (tenuto conto che la forza di attrito **si oppone** al moto) è quindi :

$$\begin{aligned} W_a &= \mathbf{F_a}\cdot\mathbf{s} = (\mu_d\,m\,g\,\cos\theta)\,L\,\cos 180^\circ = -F_a\,L \\ &= -(0.2)\cdot(20\ \mathsf{kg})\cdot(9.81\ \mathsf{m/s^2})\cdot(\cos 30^\circ)\cdot(4\ \mathsf{m}) = \boxed{-136\ \mathsf{J}} \end{aligned}$$

– le forze di attrito sono **forze NON conservative**, "dissipano solo" energia

– a causa della presenza della forza di attrito (non conservativa) **NON possiamo** applicare la conservazione dell'energia meccanica totale !

$$E_m = E_k + U_g \neq \text{cost}$$

– MA ... il **teorema dell'energia cinetica (teorema delle forze vive)** resta sempre valido :

$$W = \Delta E_k = E_{k,fin} - E_{k,in}$$

– il **lavoro totale** è dato dalla somma del **lavoro dovuto alle forze conservative** e del **lavoro dovuto alle forze di attrito** :

$$W = W_c + W_a = \Delta E_k = E_{k,fin} - E_{k,in}$$

– d'altra parte il **lavoro dovuto alle forze conservative** è dato anche dalla **variazione di energia potenziale** :

$$W_c = -\Delta U = -(U_{fin} - U_{in})$$

Mettendo tutto insieme :

$$W = W_c + W_a = -\Delta U + W_a = \Delta E_k$$

$$\rightarrow \quad -(U_{fin} - U_{in}) + W_a = E_{k,fin} - E_{k,in}$$

$$W_a = (E_{k,fin} + U_{fin}) - (E_{k,in} + U_{in}) = E_{m,fin} - E_{m,in}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{W_a = \Delta E_m}$$

Il **lavoro delle forze NON conservative** è uguale alla **variazione dell'energia meccanica** !

Possiamo allora utilizzare questo **importante** risultato per calcolare la velocità finale raggiunta dal bambino al fondo dello scivolo :

$$\begin{aligned} W_a &= \Delta E_m = (E_{k,fin} + U_{fin}) - (E_{k,in} + U_{in}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\, m\, v_{fin}^2 + m\, g\, z_{fin}\right) - \left(\frac{1}{2}\, m\, v_{in}^2 + m\, g\, z_{in}\right) \end{aligned}$$

Scelto un asse z verso l'alto (l'energia potenziale gravitazionale aumenta con z), abbiamo le condizioni : $v_{in} = 0 \;\; , \; z_{in} = h \;\; , \; z_{fin} = 0$

$$\rightarrow \quad W_a = \frac{1}{2}\, m\, v_{fin}^2 - m\, g\, z_{in} = \frac{1}{2}\, m\, v_{fin}^2 - m\, g\, h$$

$$v_{fin} = \sqrt{\frac{2(W_a + m\, g\, h)}{m}}$$

Numericamente :

$$v_{fin} = \sqrt{\frac{2\,(-136\ \mathsf{J} + 20\ \mathsf{kg} \cdot 9.81\ \mathsf{m/s}^2 \cdot 2\ \mathsf{m})}{20\ \mathsf{kg}}} = 5.1\ \mathsf{m/s}$$

Fisica per Farmacia (STF0060)
Esame scritto
14 Ottobre 2020

Mandare l'esercizio risolto a : pacher@to.infn.it

Problema 1

Un carrello di massa 0.4 kg è inizialmente spinto contro una molla di costante elastica $k = 1000$ N/m, accorciandola di 8 cm. Tolto il vincolo, la molla spinge il carrello lungo una rotaia orizzontale priva di attrito e poi su un piano inclinato di 30 ° scabro con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 1/\sqrt{3}$. Determinare :

a) la quantità di moto del carrello appena prima di iniziare la risalita sul piano inclinato

b) l'altezza massima raggiunta dal carrello nel risalire il piano inclinato

c) il lavoro svolto dalla forza di attrito

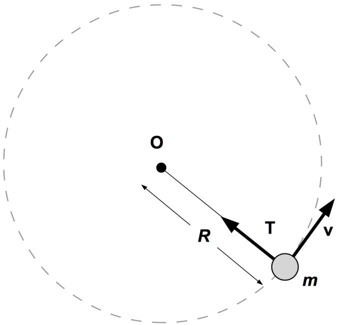
Suggerimento: per lo svolgimento dell'esercizio non serve assolutamente l'uso della calcolatrice !

Esercizio 2

Sul **moto circolare** :

Una massa di 1 kg è vincolata a muoversi su un piano orizzontale senza attrito, collegata ad un perno attraverso un filo inestensibile di massa trascurabile di lunghezza 40 cm. Supponendo che il moto sia <u>*circolare uniforme*</u> *con modulo della velocità 5 m/s, determinare :*

- *la velocità angolare del moto*
- *la tensione sul filo*



L'ipotesi è quella di avere un **moto circolare uniforme**, quindi :

- il moto avviene con **velocità angolare** ω costante (da determinare) e con **accelerazione angolare** α nulla :

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \text{cost.} \qquad\qquad \alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 0$$

- il moto è "uniforme" in termini di velocità angolare costante, ma rimane comunque per definizione un **moto accelerato** in quanto il <u>**vettore velocità**</u> è costante in modulo ma <u>**cambia continuamente direzione**</u>

- velocità angolare e **modulo** della velocità lineare (tangenziale) sono tra loro legati :

$$\boxed{v = \omega\, R}$$

- il <u>**vettore**</u> **accelerazione** ha due componenti, **accelerazione tangenziale** e **accelerazione normale (centripeta)** :

$$\boxed{a_{T} = \alpha\, R \qquad\qquad a_{N} = \frac{v^2}{R} = \omega^2\, R}$$

Dal testo del problema conosciamo

$$v = 5 \text{ m/s} \qquad\qquad R = 40 \text{ cm} = 0.4 \text{ m}$$

quindi :

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{5 \text{ m/s}}{0.4 \text{ m}} = 12.5 \text{ rad/s}$$

D'altra parte è **il filo** che vincola il moto della massa ad essere circolare. Essendoci un'accelerazione (quella normale) si manifesta anche una **forza centripeta** che è proprio la **tensione del filo** :

$$T = m\, a_{_N} = m\, \frac{v^2}{R} = m\, \omega^2\, R$$

Numericamente :

$$T = 1 \text{ kg} \cdot (12.5 \text{ rad/s})^2 \cdot 0.4 \text{ m} = 6.25 \text{ N}$$

Esercizio 3

Sul **moto circolare** :

Un'automobile si muove a velocità costante 90 km/h. Ad un certo istante, visto un ostacolo, il guidatore frena e l'auto si ferma in 10 s. Trascurando il tempo di reazione del guidatore e sapendo che le ruote hanno diametro pari a 50 cm, determinare :

- *la velocità angolare e la frequenza di rotazione delle ruote prima della frenata*
- *la decelerazione angolare subita ad opera dei freni*
- *il numero di giri fatti dalle ruote prima di fermarsi*

– riportiamo tutti i dati nelle unità del Sistema Internazionale (SI) :

$$v_0 = 90\ \text{km/h}\ =\ \frac{90 \times 10^3\ \text{m}}{3600\ \text{s}}\ =\ 25\ \text{m/s} \qquad 2\,R = 50\ \text{cm} = 0.5\ \text{m}$$

– nota la **velocità iniziale** v_0 possiamo calcolare subito la **velocità angolare** iniziale ω_0 delle ruote :

$$v_0\ =\ \omega_0\,R\ \ \rightarrow\ \ \omega_0\ =\ \frac{v_0}{R}\ =\ \frac{25\ \text{m/s}}{(0.5/2)\ \text{m}}\ =\ 100\ \text{rad/s}$$

– la **frequenza** di rotazione delle ruote si ottiene dalla velocità angolare :

$$\boxed{\omega\ =\ 2\pi f}\ \rightarrow\ f_0\ =\ \frac{\omega_0}{2\pi}\ =\ \frac{100\ \text{rad/s}}{6.28\ \text{rad}}\ =\ 15.9\ \text{s}^{-1}\ =\ 15.9\ \text{Hz}$$

– sapendo che l'automobile **si ferma** in 10 s possiamo calcolare anche l'**accelerazione angolare** :

$$v_{fin} = 0\ \rightarrow\ \omega_{fin} = 0\ \rightarrow\ \alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{(0-100)\ \text{rad/s}}{10\ \text{s}} = -10\ \text{rad/s}^2$$

Per calcolare il numero di giri delle ruote abbiamo invece bisogno di calcolare lo **spazio totale percorso** da esse attraverso la **legge oraria** del moto circolare :

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 + \omega_0\, t + \frac{1}{2}\,\alpha\, t^2}$$

Per risalire allo **spazio percorso** ricordiamo la definizione di radiante :

$$s(t) = R\ \theta(t) \ \rightarrow \quad \boxed{s(t) = s_0 + v_0\, t + \frac{1}{2}\, a_{_T}\, t^2}$$

dove $a_{_T} = \alpha\, R$ è l'**accelerazione tangenziale**.

Osserviamo ancora che essendo l'accelerazione tangenziale costante e applicando la **definizione di accelerazione** (ricordando che $v_{fin=0}$ e supposto $t_0 = 0$) :

$$a_{_T} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{fin} - v_0}{t - t_0} = -\frac{v_0}{t} \;\;\rightarrow\;\; \frac{1}{2} a_{_T}\, t^2 = \frac{1}{2}(-v_0/t)\, t^2 = -\frac{1}{2} v_0\, t$$

$$\rightarrow \;\; s(t) = s_0 + v_0\, t - \frac{1}{2} v_0\, t = s_0 + \frac{1}{2} v_0\, t$$

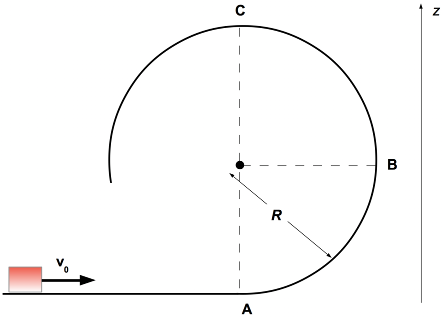
In **numero di giri** è allora dato dal rapporto tra lo spazio percorso in 10 s e la circonferenza delle ruote :

$$N = \frac{\Delta s}{2\pi R} = \frac{s(t = 10\ \text{s}) - s_0}{\pi(2R)} = \frac{0.5 \cdot 25\ \text{m/s} \cdot 10\ \text{s}}{3.14 \cdot 0.5\ \text{m}} \approx 80$$

Esercizio 4

Il problema del **"giro della morte"** :

Un punto materiale di massa m si muove su una guida orizzontale liscia con velocità iniziale v_0. Quando passa nella posizione A esso inizia a salire lungo una guida circolare di raggio R, anch'essa senza attrito. Calcolare la velocità della massa e la reazione vincolare della guida nei punti B e C. Qual è il minimo valore della velocità iniziale v_0 affinchè la massa arrivi nel punto C mantenendo il contatto con la guida ?



- scegliamo come sistema di riferimento un asse z verticale verso l'alto

- dal momento che non ci sono attriti la velocità nei vari punti della guida può essere ricavata applicando la **conservazione dell'energia meccanica** :

$$\boxed{E_m = E_k + U_g = \text{cost.}}$$

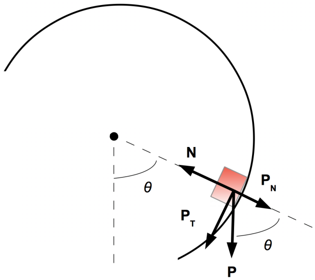
$$\frac{1}{2} m\, v_0^2 = \frac{1}{2} m\ v^2 + m\, g\, z \quad \rightarrow \quad v(z) = \sqrt{v_0^2 - 2\, g\, z}$$

Nel punto B :

$$z = R \quad \rightarrow \quad v_{B} = \sqrt{v_0^2 - 2\, g\, R}$$

Nel punto C :

$$z = 2R \quad \rightarrow \quad v_{C} = \sqrt{v_0^2 - 4\, g\, R}$$



– applichiamo la **legge di Newton** :

$$\sum \mathbf{F} = m\,\mathbf{a} \quad \rightarrow \quad \mathbf{N} + \mathbf{P} = m\,\mathbf{a}$$

– l'**accelerazione** (vettore) ha 2 componenti, **tangenziale + normale** (centripeta) :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\mathbf{T}} + \mathbf{a}_{\mathbf{N}}$$

– la **reazione vincolare** è determinata dalla risultante delle forze agenti sulla direzione normale, quindi passando alle componenti :

$$N - m\,g\,\cos\theta = m\,a_{N} = m\,\frac{v^2}{R}$$

La reazione è quindi massima nel punto A ($\theta = 0$), per poi decrescere con continuità fino al punto C ($\theta = \pi$) :

$$N(\theta) = m\,\frac{v^2}{R} + m\,g\,\cos\theta$$

Nel punto A ($\theta = 0$) :

$$v_{_A} = v_0 \quad \rightarrow \quad \boxed{N_{_A} = m\,\frac{v_0^2}{R} + m\,g}$$

Nel punto B ($\theta = \pi/2$) :

$$v_{_B} = \sqrt{v_0^2 - 2\,g\,R} \quad \rightarrow \quad \boxed{N_{_B} = m\,\frac{v_{_B}^2}{R} = m\,\left(\frac{v_0^2}{R} - 2\,g\right)}$$

Nel punto C ($\theta = \pi$)

$$v_{_C} = \sqrt{v_0^2 - 4\,g\,R} \quad \rightarrow \quad \boxed{N_{_C} = m\,\frac{v_{_C}^2}{R} - m\,g = m\,\left(\frac{v_0^2}{R} - 5\,g\right)}$$

Affinchè la massa "non si stacchi" mai dalla guida deve essere sempre :

$$N > 0$$

Da questa condizione ricaviamo allora la **velocità minima** iniziale che deve avere la massa per completare il giro della morte senza mai cadere :

$$N_{C} > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{v_0^2}{R} - 5\,g \; > 0$$

da cui

$$\boxed{v_{0,min} > \sqrt{5\,g\,R}}$$

Esercizio 5

Sulla **conservazione della quantità di moto** :

Un carrello di massa 300 g e velocità 1 m/s urta un carrello fermo di massa 500 g. Dopo l'urto il primo carrello continua a muoversi nella direzione iniziale con velocità 0.2 m/s. Determinare la velocità assunta dal carrello colpito.

– chiamiamo A e B i due carrelli e scriviamo le condizioni del problema :

$$m_A = 0.3 \text{ kg} \quad v_{A,in} = 1 \text{ m/s} \quad v_{A,fin} = 0.2 \text{ m/s}$$

$$m_B = 0.5 \text{ kg} \quad v_{B,in} = 0 \text{ m/s} \quad v_{B,fin} = ?$$

– ricordiamo la definizione di **quantità di moto** :

$$\boxed{\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}}$$

– essendo il sistema **isolato** (non ci sono forze esterne) possiamo applicare la **conservazione della quantità di moto totale** del sistema :

$$\boxed{\sum \mathbf{p}_{in} = \sum \mathbf{p}_{fin}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{p}_{A,in} + \mathbf{p}_{B,in} = \mathbf{p}_{A,fin} + \mathbf{p}_{B,fin}$$

Dal momento che tutti i vettori in gioco sono concordi possiamo scrivere una relazione tra i soli moduli :

$$p_{B,fin} = p_{A,in} + p_{B,in} - p_{A,fin} = m_A\, v_{A,in} + m_B\, v_{B,in} - m_A\, v_{A,fin}$$

Essendo il carrello B inizialmente fermo :

$$v_{B,in} = 0 \quad \rightarrow \quad m_B\, v_{B,fin} = m_A\, v_{A,in} - m_A\, v_{A,fin} = m_A\, (v_{A,in} - v_{A,fin})$$

$$v_{B,fin} = \frac{m_A}{m_B}\, (v_{A,in} - v_{A,fin})$$

Numericamente :

$$v_{B,fin} = \frac{0.3\ \text{kg}}{0.5\ \text{kg}}\, (1 - 0.2)\ \text{m/s} = 0.48\ \text{m/s}$$