Esercitazioni per il Corso di Fisica

Urti, baricentro e leve

Dr. Luca Pacher

pacher@to.infn.it

Corso di Laurea in Farmacia

A.A. 2020/2021

24/11/2020

Esercizio 1

Sul **teorema dell'impulso** :

Una palla da tennis di massa 50 g che viaggia inizialmente a velocità 10 m/s viene colpita da una racchetta. Dopo l'urto, di durata 0.1 s, la palla riparte in direzione opposta con velocità doppia. Calcolare la forza media esercitata dalla racchetta durante l'urto e la variazione di energia cinetica della palla. Si tratta di un urto elastico oppure anelastico ?

– assumiamo come **sistema di riferimento** un asse x orizzontale con verso concorde alla direzione iniziale della palla

– posta $v_0 = 10$ m/s conosciamo i **vettori velocità** iniziale e finale :

$$\mathbf{v_{in}} = v_0\,\mathbf{i} = (v_0, 0, 0) \quad \rightarrow \quad \mathbf{v_{fin}} = -2\,v_0\,\mathbf{i} = (-2\,v_0, 0, 0)$$

– quindi anche le **quantità di moto** prima e dopo l'urto :

$$\mathbf{p_{in}} = m\,\mathbf{v_{in}} = m\,v_0\,\mathbf{i} \quad \rightarrow \quad \mathbf{p_{fin}} = m\,\mathbf{v_{fin}} = -2\,m\,v_0\,\mathbf{i}$$

– usiamo la **legge di Newton** scritta in termini di **variazioni di quantità di moto** :

$$\boxed{\overline{\mathbf{F}} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}}$$

ATTENZIONE ! Questa è solo una **forza media** !

Sostituendo :

$$\overline{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{p_{fin}} - \mathbf{p_{in}}}{\Delta t} = \frac{-2\, m\, v_0\, \mathbf{i} - v_0\, \mathbf{i}}{\Delta t} = -\left(\frac{3\, m\, v_0}{\Delta t}\right)\, \mathbf{i}$$

Numericamente, in modulo (usiamo anche 50 g $= 50 \times 10^{-3}$ kg $= 0.05$ kg) :

$$|\overline{\mathbf{F}}| = \frac{3\, m\, v_0}{\Delta t} = \frac{3 \cdot 0.05 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}}{0.1 \text{ s}} = 15 \text{ N}$$

La **variazione di energia cinetica** vale invece :

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= E_{k,fin} - E_{k,in} = \frac{1}{2}\, m\, \left[v_{fin}^2 - v_{in}^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\, m\, \left[(2\, v_0)^2 - v_0^2\right] = \frac{3}{2}\, m\, v_0^2 = \frac{3 \cdot 0.05 \text{ kg} \cdot (10 \text{ m/s})^2}{2} = 7.5 \text{ J} \end{aligned}$$

Essendoci **variazione di energia cinetica** si tratta di un **urto anelastico** (l'energia cinetica NON si conserva).

Esercizio 2

Potrebbe essere **un esercizio completo di dinamica** **in stile esame** ...

Su un piano inclinato scabro lungo 2m si trova una cassa di 10 kg inizialmente ferma nel punto più alto del piano. L'angolo di inclinazione del piano è di 30°. Determinare :

- *a) il coefficiente di attrito statico*
- *b) la velocità al fondo della rampa dopo aver messo in moto la cassa e supponendo che il coefficiente di attrito dinamico sia il 30% di quello statico*

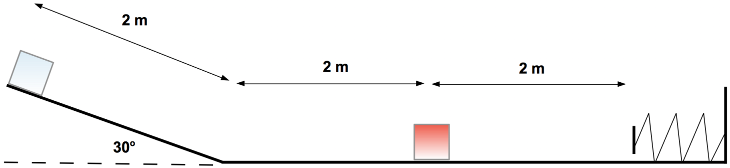
Al fondo della rampa si trova poi un piano orizzontale di attrito trascurabile. Dopo aver percorso altri 2 m la cassa urta una seconda cassa di ugual massa con un urto perfettamente anelastico. Determinare :

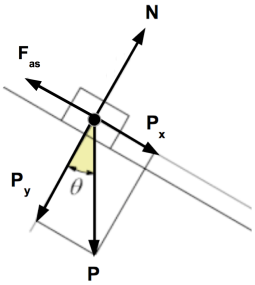
- *c) la velocità delle due casse dopo l'urto*

Percorsi altri altri 2 m le due casse vanno a comprimere una molla di costante elastica 3000 N/m. Determinare

- *d) la compressione della molla*

e) Cosa cambierebbe se l'urto fosse elastico ? La compressione della molla sarebbe maggiore o minore ?


2 m
2 m
2 m
30°



a) *il coefficiente di attrito statico*

Imponiamo che la componente tangenziale $\mathbf{P_x}$ della forza peso $\mathbf{P} = m\,\mathbf{g}$ sia equilibrata dalla forza di attrito statico $\mathbf{F_{as}}$:

$$|\mathbf{F_{as}}| = |\mathbf{P_x}| \;\rightarrow\; \mu_s N = P_x = m\,g\,\sin\theta\;, \quad N = P_y = m\,g\,\cos\theta$$

Da cui :

$$\mu_s = \frac{P_x}{N} = \frac{\cancel{m\,g}\,\sin\theta}{\cancel{m\,g}\,\cos\theta} = \tan\theta \;\rightarrow\; \mu_s = \tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.6$$

b) *la velocità al fondo della rampa dopo aver messo in moto la cassa e supponendo che il coefficiente di attrito dinamico sia il 30% di quello statico*

$$\rightarrow \quad \mu_d = 0.3\,\mu_s$$

Abbiamo già risolto un problema simile ricavando attraverso il teorema dell'energia cinetica il **lavoro fatto dalle forze non conservative** (attrito) come **variazione dell'energia meccanica** :

$$\boxed{W_a = \Delta E_m \ = \left(\frac{1}{2} m\, v_{fin}^2 + m\, g\, z_{fin}\right) - \left(\frac{1}{2} m\, v_{in}^2 + m\, g\, z_{in}\right)}$$

Scendendo una lunghezza $L = 2$ m lungo il piano la forza di attrito compie il lavoro :

$$W_a = \mathbf{F_{ad}} \cdot \mathbf{L} = |\mathbf{F_{ad}}|\, L\, \cos 180^\circ = -\,\mu_d\, N\, L = -0.3\,\mu_s\, m\, g\, \cos\theta\, L$$

Condizioni aggiuntive : $v_{in} = 0$, $z_{fin} = 0$, $z_{in} = h = L \sin\theta$

$$\rightarrow \quad v_{fin} = \sqrt{\frac{2\,(m\,g\,h + W_a)}{m}} = \sqrt{\frac{2\,(\cancel{m}\,g\,L\,\sin\theta - 0.3\,\mu_s\,\cancel{m}\,g\,\cos\theta\,L)}{\cancel{m}}}$$

Se uso $\mu_s = \tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$ posso ancora semplificare :

$$v_{fin} = \sqrt{2\,g\,L\,\left(\sin\theta - 0.3\,\frac{\sin\theta}{\cancel{\cos\theta}}\,\cancel{\cos\theta}\right)} = \sqrt{2\,g\,L\,\sin\theta\,\left(1 - 0.3\right)}$$

Numericamente :

$$v_{fin} = \sqrt{2 \cdot (9.81\ \mathrm{m/s^2}) \cdot (2\ \mathrm{m}) \cdot 0.5 \cdot 0.7} = 3.7\ \mathrm{m/s}$$

Osserviamo ancora che $L\sin\theta$ è proprio l'altezza h (la quota) dalla quale parte la cassa, quindi la velocità che abbiamo ottenuto vale anche :

$$L\sin\theta = h \quad \rightarrow \quad v_{fin} = \sqrt{2\,g\,h\left(1-0.3\right)}$$

Possiamo confrontare questo risultato con quello che avremmo ottenuto se **NON avessimo avuto attrito sul piano** e applicando la conservazione dell'energia meccanica :

$$m\,g\,h = \frac{1}{2}m\,v_{fin}^2 \quad \rightarrow \quad v_{fin} = \sqrt{2\,g\,h}$$

Correttamente quindi **la presenza dell'attrito** riduce la velocità massima che raggiungerebbe la cassa se non ci fosse attrito :

$$\sqrt{2\,g\,h\left(1-0.3\right)} < \sqrt{2\,g\,h}$$

NOTA

Avremmo potuto ottenere per v_{fin} **lo stesso risultato** utilizzando anche la sola **cinematica**, infatti :

– il moto lungo il piano inclinato è **uniformemente accelerato**, quindi possiamo usare la relazione :

$$v_{fin}^2 - v_{in}^2 = 2\,a\,L$$

– la cassa parte da ferma :

$$v_{in} = 0 \quad \rightarrow \quad v_{fin} = \sqrt{2\,a\,L}$$

– infine l' **accelerazione** è determinata dalla **risultante delle forze** lungo la direzione del moto (legge di Newton) :

$$\sum F_x = m\,a \;\rightarrow\; a = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{P_x - F_{ad}}{m} = \frac{\cancel{m}\,g\,\sin\theta - \mu_d\,\cancel{m}\,g\,\cos\theta}{\cancel{m}}$$

Fattorizziamo meglio e usiamo anche $\mu_d = 0.3\,\mu_s$:

$$a = (\sin\theta - 0.3\,\mu_s \cos\theta)\; g \quad \rightarrow \quad v_{fin} = \sqrt{2\,g\,L\,\big(\sin\theta - 0.3\,\mu_s \cos\theta\big)}$$

Infine usiamo per l'attrito statico $\mu_s = \tan\theta = \sin\theta / \cos\theta$:

$$v_{fin} = \sqrt{2\,g\,L\,\left(\sin\theta - 0.3\,\frac{\sin\theta}{\cancel{\cos\theta}}\,\cancel{\cos\theta}\right)} = \sqrt{2\,g\,L\,\sin\theta\,\big(1 - 0.3\big)}$$

$$= \sqrt{2\,g\,h\,\big(1 - 0.3\big)}$$

c) *la velocità delle due casse dopo l'urto*

– essendo per ipotesi un **urto completamente anelastico** le due casse **rimangono attaccate dopo l'urto** e si muovono come un'unica massa di valore $2\,m$ (le casse sono uguali) e velocità v'_{fin} da determinare

– applichiamo la conservazione della quantità di moto :

$$m\ v_{fin} + 0 = (m + m)\ v'_{fin}$$

$$\rightarrow\ v'_{fin} = \frac{m}{2m} v_{fin} = \frac{1}{2} v_{fin} = 0.5 \cdot 3.7 \text{ m/s} = 1.85 \text{ m/s}$$

Come "intuitivo", essendo le due masse uguali dopo l'urto la velocità si dimezza.

d) *la compressione della molla*

Per ipotesi il piano orizzontale è privo di attrito, quindi possiamo applicare la **conservazione dell'energia meccanica** e imporre che **tutta l'energia cinetica** posseduta del sistema delle due masse attaccate **si trasformi in energia potenziale elastica** :

$$\frac{1}{2}(2\,m)\,v'^{\,2}_{fin} = \frac{1}{2}\,k\,(\Delta x)^2$$

$$\rightarrow\ \Delta x = \sqrt{\frac{2\,m\,v'^{\,2}_{fin}}{k}} = v_{fin}\sqrt{\frac{2\,m}{k}} = (1.85\ \mathrm{m/s}) \cdot \sqrt{\frac{20\ \mathrm{kg}}{3000\ \mathrm{N/m}}} = 0.3\ \mathrm{m}$$

e) *Cosa cambierebbe se l'urto fosse elastico ? La compressione della molla sarebbe maggiore o minore ?*

Nel caso di **urto elastico** **anche l'energia cinetica si conserva !** Dobbiamo quindi scrivere **due leggi di conservazione** :

1. conservazione della quantità di moto

$$\sum \mathbf{p}_{in} = \sum \mathbf{p}_{fin}$$

2. conservazione dell'energia cinetica

$$\sum E_{k,in} = \sum E_{k,fin}$$

Dal momento che queste due equazioni devono valere contemporaneamente ci possiamo aspettare di dover **risolvere un sistema** con incognite le velocità finali delle due casse.

Per non fare confusione chiamiamo A e B le due masse, con $m_A = m_B$ e velocità $v_{A,in}, v_{B,in} = 0$ (prima dell'urto) e $v_{A,fin}, v_{B,fin}$ (dopo l'urto). Scriviamo allora le due leggi di conservazione :

$$\begin{cases} m_A v_{A,in} + 0 = m_A\, v_{A,fin} + m_B\, v_{B,fin} \\ \\ \dfrac{1}{2}\, m_A\, v_{A,in}^2 + 0 = \dfrac{1}{2}\, m_A\, v_{A,fin}^2 + \dfrac{1}{2}\, m_B\, v_{B,fin}^2 \end{cases}$$

Semplificando (masse uguali e fattori 1/2) :

$$\begin{cases} v_{A,in} = v_{A,fin} + v_{B,fin} \\ \\ v_{A,in}^2 = v_{A,fin}^2 + v_{B,fin}^2 \end{cases}$$

Ricaviamo ad esempio $v_{A,fin}$ dalla prima equazione :

$$v_{A,fin} = v_{A,in} - v_{B,fin}$$

Sostituiamo questo risultato nella seconda :

$$\begin{aligned} v_{A,in}^2 &= (v_{A,in} - v_{B,fin})^2 + v_{B,fin}^2 \\ &= v_{A,in}^2 + v_{B,fin}^2 - 2\,v_{A,in}\,v_{B,fin} + v_{B,fin}^2 \\ &= v_{A,in}^2 + 2\,v_{B,fin}^2 - 2\,v_{A,in}\,v_{B,fin} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \; \cancel{v_{A,in}^2} = \cancel{v_{A,in}^2} + 2\,v_{B,fin}^2 - 2\,v_{A,in}\,v_{B,fin} \; \rightarrow \; \boxed{v_{B,fin}(v_{B,fin} - v_{A,in}) = 0}$$

La **soluzione banale** $v_{B,fin} = 0$ dell'equazione di secondo grado porta ad un **risultato NON fisico** e va scartata :

$$v_{B,fin} = 0 \quad \rightarrow \quad v_{A,fin} = v_{A,in} \;\; \text{(non ha senso essendoci l'urto !)}$$

La seconda soluzione è invece quella corretta :

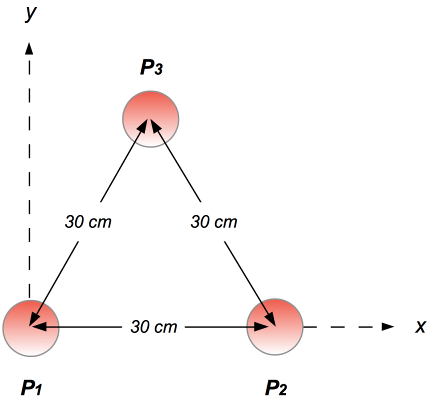
$$v_{B,fin} - v_{A,in} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} v_{A,fin} = 0 \\ \\ v_{B,fin} = v_{A,in} \end{cases}$$

Come ci si poteva aspettare, **essendo le due masse uguali** dopo l'urto **la prima cassa si ferma e la seconda acquista la stessa velocità che aveva la prima** !

$$v_{B,fin} = 3.7 \text{ m/s} \;\; \text{(e quindi l'accorciamento della molla sarebbe maggiore)}$$

Sulla definizione di **centro di massa (baricentro)** di un sistema :

Determinare la posizione del centro di massa di un sistema di 3 punti materiali di massa 1 kg posti ai vertici di un triangolo equilatero di lato 30 cm.



Ricordiamo la definizione di **centro di massa** per un **sistema di punti materiali** di posizioni $\mathbf{r_i}$:

$$\boxed{\mathbf{r}_{\mathbf{CM}} = \frac{\sum_i m_i \ \mathbf{r_i}}{\sum_i m_i}}$$

Si tratta di una **"media pesata"** delle singole posizioni, dove i **"pesi"** di questa media sono le masse dei punti materiali.

Passando alle componenti $\mathbf{r_i} = (x_i, y_i, z_i)$:

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i \ x_i}{\sum_i m_i} \quad , \quad y_{CM} = \frac{\sum_i m_i \ y_i}{\sum_i m_i} \quad , \quad z_{CM} = \frac{\sum_i m_i \ z_i}{\sum_i m_i}$$

– chiamiamo ℓ il lato del triangolo rettangolo e h la sua altezza, con

$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^{\,2} \;\rightarrow\; \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2}\;\ell$$

– scegliamo un **sistema di riferimento** (x, y) centrato (ad esempio) nella massa di sinistra, allora le coordinate dei 3 punti materiali sono :

$$P_1 : (0, 0) \qquad\quad P_2 : (\ell, 0) \qquad\quad P_3 : \left(\frac{\ell}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell\right)$$

– calcoliamo le **coordinate del centro di massa** con $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ kg :

$$x_{CM} = \frac{m_1\,\cancel{x_1} + m_2\,x_2 + m_3\,x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m\ell + m\dfrac{\ell}{2}}{3\,m} = \frac{\ell}{2} = 15 \text{ cm}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1\,\cancel{y_1} + m_2\,\cancel{y_2} + m_3\,y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\ell}{3\,m} = \frac{\ell}{2\,\sqrt{3}} = 8.66 \text{ cm}$$

Esercizio 4

Una semplice **leva di primo genere** :

Un bambino è seduto ad uno dei due estremi di unaltalena a 200 cm dal fulcro centrale. Il padre lo fa giocare premendo laltro braccio dell'altalena a 45 cm dal centro. Il peso del bambino è pari a 180 N. Quale forza deve esercitare il padre, in direzione perpendicolare all'altalena, per fare in modo che questa rimanga in posizione orizzontale e non ruoti ? Qual e il guadagno di questa leva ?

Applicando la **condizione di equilibrio rotazionale** :

$$\sum \tau = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{F_r\, b_r = F_m\, b_m}$$

La forza (motrice) che deve applicare il padre del bambino è allora :

$$F_m = F_r \frac{b_r}{b_m} = m\, g\, \frac{b_r}{b_m} = 180 \text{ N} \left(\frac{200 \text{ cm}}{45 \text{ cm}} \right) = 800 \text{ N}$$

Il guadagno meccanico vale invece :

$$G = \frac{F_r}{F_m} = \frac{b_m}{b_r} = \frac{45 \text{ cm}}{200 \text{ cm}} = 0.225 < 1$$

Si tratta quindi come atteso di una situazione svantaggiosa.