Esercitazioni per il Corso di Fisica

Meccanica dei fluidi ideali e reali

Dr. Luca Pacher

pacher@to.infn.it

Corso di Laurea in Farmacia

A.A. 2019/2020

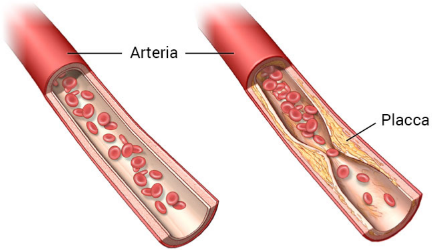
1/12/2020

Esercizio 1

Sulla definizione di **portata di un condotto** e sull'**equazione di continuità** :

Un'arteria di raggio 2.5 mm è parzialmente bloccata da una placca (stenosi). Nella regione ostruita il raggio effettivo scende a 1.8 mm e la velocità media del sangue è di 50 cm/s. Assumendo che la densità del sangue sia 1.04 g/cm^3 :

- *calcolare la velocità media del sangue nella regione non ostruita*
- *trovare la differenza di pressione dovuta alla placca*



– ricordiamo la definizione di **portata di un condotto** per un fluido :

$$\boxed{Q = \frac{V}{\Delta t} = \frac{S\,\Delta x}{\Delta t} = S\,v}$$

– è il volume di liquido che attraversa una sezione S di un condotto in un certo tempo

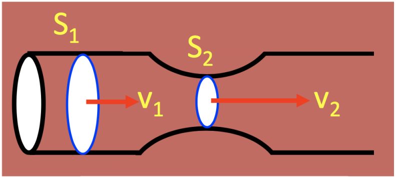
– in condizioni di 1) liquido ideale, 2) **condotto rigido** (sezioni costanti **nel tempo**†) e 3) **moto stazionario** (velocità costanti **nel tempo**†) si ha che **la portata è costante** :

$$\boxed{Q = S\,v = \text{cost.}} \qquad \textbf{equazione di continuità}$$

– assumiamo che l'arteria sia un **condotto cilindrico di sezione** :

$$S = \pi R^2$$

† **ATTENZIONE !** Sezione e velocità costanti nel tempo, ma ovviamente S e v possono **variare lungo il condotto** stesso !



– indichiamo con 1 la regione NON ostruita e con 2 quella ostruita

– applichiamo **l'equazione di continuità** :

$$Q_1 = Q_2 \quad \rightarrow \quad \boxed{S_1\, v_1 = S_2\, v_2}$$

– possiamo allora ricavare la **velocità del sangue nella regione NON ostruita** dell'arteria :

$$v_1 = \left(\frac{S_2}{S_1}\right) v_2 = \left(\frac{\pi {R_2}^2}{\pi {R_1}^2}\right) v_2 = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 v_2$$

Numericamente :

$$v_2 = \left(\frac{1.8 \times 10^{-1}\ \text{cm}}{2.5 \times 10^{-1}\ \text{cm}}\right)^2 \cdot 50\ \text{cm/s} = \boxed{25.9\ \text{cm/s}}$$

Per calcolare la **differenza di pressione** tra le due regioni dobbiamo invece ricorrere al **teorema di Bernoulli** :

$$\boxed{p + \rho\, g\, h + \frac{1}{2}\,\rho\, v^2 = \text{cost.}} \quad \rightarrow \quad p_1 + \rho\, g\, h_1 + \frac{1}{2}\,\rho\, v_1^2 = p_2 + \rho\, g\, h_2 + \frac{1}{2}\,\rho\, v_2^2$$

Nell'ipotesi di **condotto orizzontale** non abbiamo variazioni di quota :

$$\boxed{h_1 = h_2} \;\rightarrow\; p_1 + \cancel{\rho\, g\, h_1} + \frac{1}{2}\,\rho\, v_1^2 = p_2 + \cancel{\rho\, g\, h_2} + \frac{1}{2}\,\rho\, v_2^2$$

Da cui la **differenza di pressione** richiesta :

$$\Delta p \;=\; p_1 - p_2 = \;\frac{1}{2}\,\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right) \;=\; \frac{1}{2}\,\rho\,(v_2 + v_1)(v_2 - v_1)$$

Osserviamo ancora che essendo

$$v_2 > v_1 \quad \rightarrow \quad v_2^2 > v_1^2 \quad \rightarrow \quad v_2^2 - v_1^2 > 0$$

abbiamo anche

$$\Delta p \,=\, p_1 - p_2 > 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\; p_2 < p_1 \;}$$

In prossimità dell'ostruzione **la pressione è inferiore** *e quindi l'arteria* **tende a restringersi ulteriormente** *aggravando la stenosi !*

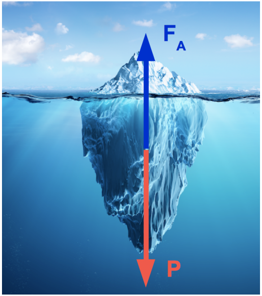
Numericamente :

$$\begin{aligned} \Delta p &= 0.5 \cdot (1.04 \text{ g/cm}^3) \cdot (50 + 25.9) \cdot (50 - 25.9) \text{ (cm/s)}^2 \\ &= 951.2 \text{ g/cm s}^2 = \boxed{\; 95.12 \text{ Pa} \;} \end{aligned}$$

Esercizio 2

Un vero "classico", sulla **spinta di Archimede** :

Sapendo che la densità del ghiaccio è 0.92 g/cm^3 *mentre quella dell'acqua del mare 1.025* g/cm^3 *determinare la <u>frazione di un iceberg che rimane sommersa</u>.*



– le forze in gioco sono la **forza peso** $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ verso il basso e la **spinta di Archimede** $\mathbf{F_A}$ verso l'alto

– il blocco di ghiaccio è in **equilibrio statico**, quindi dalla Meccanica sappiamo che **la risultante delle forze deve essere nulla** :

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{P} + \mathbf{F_A} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{P} = -\mathbf{F_A}$$

– forza peso dell'iceberg (in modulo) :

$$P = m_{\text{ghiaccio}}\, g = \rho_{\text{ghiaccio}}\, V_{\text{ghiaccio}}\, g$$

– la "spinta" di Archimede è una forza pari alla **forza peso del liquido spostato** :

$$F_A = m_{\text{acqua}}\, g = \rho_{\text{acqua}}\, V_{\text{immerso}}\, g$$

– per la **condizione di equilibrio** i moduli delle due forze sono uguali :

$$P = F_A \quad \rightarrow \quad \rho_{\text{ghiaccio}}\, V_{\text{ghiaccio}}\, \cancel{g} = \rho_{\text{acqua}}\, V_{\text{immerso}}\, \cancel{g}$$

– la **frazione di iceberg sommersa** è allora data dal **rapporto tra le densità** :

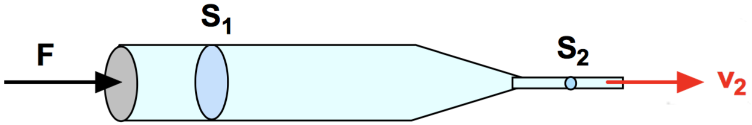
$$f_{\text{sommersa}} = \frac{V_{\text{immerso}}}{V_{\text{ghiaccio}}} = \frac{\rho_{\text{ghiaccio}}}{\rho_{\text{acqua}}} = \frac{0.92\ \text{g/cm}^3}{1.025\ \text{g/cm}^3} = \boxed{0.9}$$

Come noto, la "punta dell'iceberg" è solo una minima parte, circa il 90 % rimane sommerso !

Esercizio 3

Ancora su **portata**, **equazione di continuità** *e* **teorema di Bernoulli** *:*

Una siringa ipodermica contiene una soluzione di densità circa quella dell'acqua. La canna della siringa ha una sezione di diametro 0.5 cm, mentre l'ago ha una sezione di diametro 100 μm. In assenza di forza sul pistone la pressione è ovunque 1 atm. Una forza di intensità 2 N agisce poi sul pistone, facendo sì che la soluzione schizzi orizzontalmente dall'ago. Determinare la velocità della soluzione quando esce dalla punta dell'ago.
Quale deve essere la forza minima da applicare al pistone per iniettare la soluzione in una vena con pressione del sangue 12 mm Hg ?



– nell'ipotesi di fluido ideale possiamo applicare **equazione di continuità** e **teorema di Bernoulli** :

$$\boxed{Q = S\,v = \text{cost.} \quad , \quad p + \rho\,g\,h + \frac{1}{2}\,\rho\,v^2 = \text{cost.}}$$

– la siringa è in posizione orizzontale, quindi **non c'è variazione di quota** :

$$h_1 = h_2 \quad \rightarrow \quad p_1 + \cancel{\rho\,g\,h_1} + \frac{1}{2}\,\rho\,v_1^2 = p_2 + \cancel{\rho\,g\,h_2} + \frac{1}{2}\,\rho\,v_2^2$$

– l'equazione di continuità fornisce invece **informazioni sulle velocità** :

$$S_1\,v_1 = S_2\,v_2 \quad \rightarrow \quad v_1 = \left(\frac{S_2}{S_1}\right)\,v_2 = \left(\frac{\pi {R_2}^2}{\pi {R_1}^2}\right)\,v_2 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 v_2$$

Osserviamo però che numericamente :

$$\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = \left(\frac{100 \times 10^{-6}\ \mathsf{m}}{0.5 \times 10^{-2}\ \mathsf{m}}\right)^2 = 4 \times 10^{-4} \ \rightarrow \ \boxed{v_1 = 4 \times 10^{-4}\, v_2}$$

$v_1 \ll v_2 \quad \rightarrow \quad v_1^2 \ll v_2^2$ ... possiamo **trascurare** il contributo di v_1 !

$$p_1 + \cancel{\frac{1}{2}\,\rho\, v_1^2} = p_2 + \frac{1}{2}\,\rho\, v_2^2 \ \rightarrow \ \boxed{p_1 \approx p_2 + \frac{1}{2}\,\rho\, v_2^2}$$

La **forza esterna** F applicata sul pistone della siringa produce una **pressione esterna** che **si somma alla pressione atmosferica** :

$$p_{ext} = \frac{F}{S_1} \ \rightarrow \quad p_1 = p_{atm} + p_{ext} = p_{atm} + \frac{F}{S_1}$$

mentre dalla parte dell'ago agisce solo la pressione atmosferica, $p_2 = p_{atm}$

$$\rightarrow \quad \cancel{p_{atm}} + \frac{F}{S_1} = \cancel{p_{atm}} + \frac{1}{2}\,\rho\, v_2^2$$

Da cui la **velocità del liquido in uscita dalla siringa** come richiesto :

$$\frac{F}{S_1} = \frac{1}{2}\,\rho\, v_2^2 \quad \rightarrow \quad v_2 = \sqrt{\frac{2\,F}{\rho\, S_1}} = \sqrt{\frac{2\,F}{\rho\,\pi (d_1/2)^2}}$$

Numericamente (usiamo per la soluzione la densità dell'acqua, $\rho = 10^3$ kg/m^3) :

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \text{ N}}{(10^3 \text{ kg/m}^3) \cdot 3.14 \cdot (0.5 \times 10^{-2} \text{ m}/2)^2}} = \boxed{14.3 \text{ m/s}}$$

Quale deve essere la forza minima da applicare al pistone per iniettare la soluzione in una vena con pressione del sangue 12 mm Hg ?

In questo caso cambia l'espressione di p_2 nell'equazione di Bernoulli, perchè **si aggiunge il contributo della pressione del sangue**

$$p_2 = p_{atm} + p_{sangue}$$

mentre "forza minima" significa... **velocità di efflusso maggiore di zero** :

$$v_2 > 0 \;\rightarrow\; \cancel{p_{atm}} + \frac{F_{min}}{S_1} > \cancel{p_{atm}} + p_{sangue}$$

$$F_{min} > \, p_{sangue}\, S_1 \;=\; p_{sangue}\, \pi\, {R_1}^2 \;=\; p_{sangue}\, \pi \left(\frac{d_1}{2}\right)^2$$

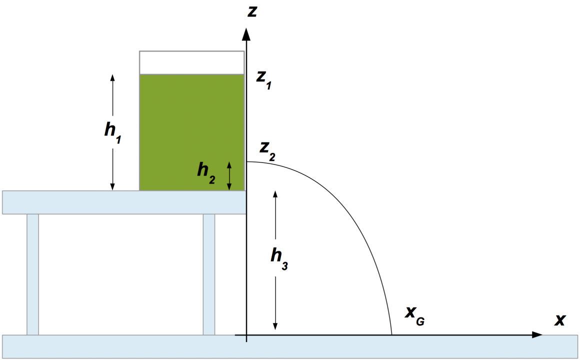
$$F_{min} > 12 \text{ mmHg} \cdot \left(\frac{1.013 \times 10^5 \text{ Pa}}{760 \text{ mmHg}}\right) \cdot 3.14 \cdot (0.5 \times 10^{-2}/2 \text{ m})^2 = \boxed{\;0.03 \text{ N}\;}$$

Esercizio 4

Un altro grande "classico", sul **teorema di Torricelli**
(e anche un ripasso sul moto parabolico dei corpi) :

Un recipiente è riempito per 30 cm di olio (densità 0.85 g/cm^3) ed è appoggiato su un tavolo alto 80 cm. Alla base del recipiente viene praticato un piccolo foro ad una distanza di 5 cm dal fondo. Supposto il foro allineato al bordo del tavolo, determinare :

– *a quale distanza dal tavolo l'olio colpisce il pavimento (gittata)*
– *la velocità al suolo*



– scegliamo un **sistema di riferimento** (x, z) e con l'aiuto di un disegno riportiamo i **dati iniziali** del problema :

$$h_1 = 30 \text{ cm} \ , \ h_2 = 5 \text{ cm} \ , \ h_3 = 80 \text{ cm}$$

$$z_1 = h_1 + h_3 \ , \ z_2 = h_2 + h_3$$

– il problema richiede di determinare la **gittata** x_G e la **velocità al suolo** v_G

Ipotesi di lavoro :

– fluido ideale, condotto rigido e moto stazionario, quindi vale l'**equazione di continuità** :

$$\boxed{Q = S\,v = \mathsf{cost}} \quad \rightarrow \quad S_1\,v_1 = S_2\,v_2 \quad \rightarrow \quad v_1 = \left(\frac{S_2}{S_1}\right) v_2$$

– il foro è "piccolo", quindi la sezione del foro è **ordini di grandezza più piccola** della sezione del recipiente ! (come nell'esercizio precedente)

$$S_2 \ll S_1 \quad \rightarrow \quad \frac{S_2}{S_1} \ll 1$$

– questo significa anche che in prima approssimazione **il livello del fluido <u>non diminuisce</u> con velocità apprezzabile** :

$$v_1 = \left(\frac{S_2}{S_1}\right) v_2 \quad \rightarrow \quad \frac{S_2}{S_1} \ll 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{v_1 \ll v_2}$$

Possiamo allora <u>**TRASCURARE**</u> il contributo cinetico

$$\frac{1}{2}\,\rho\,v_1^2$$

nell'**equazione di Bernoulli** :

$$\cancel{p_{atm}} + \rho\,g\,z_1 + \cancel{\frac{1}{2}\,\rho\,v_1^2} = \cancel{p_{atm}} + \rho\,g\,z_2 + \frac{1}{2}\,\rho\,v_2^2 \rightarrow \; \cancel{\rho}\,g\,(z_1 - z_2) = \frac{1}{2}\,\cancel{\rho}\,v_2^2$$

$$\rightarrow \; \boxed{v_2 = \sqrt{2\,g\,(h_1 - h_2)}} \qquad \underline{\textbf{teorema di Torricelli}}$$

Risultato noto come "teorema di Torricelli", ci dice che il fluido fuoriesce dal foro con una velocità pari alla velocità al suolo $\sqrt{2\,g\,h}$ di un corpo in caduta libera lasciato cadere dalla stessa quota $h = h_1 - h_2$

Il fluido esce quindi dal foro con una **velocità iniziale** (cambiamo notazione) :

$$v_{0x} = \sqrt{2\,g\,(h_1 - h_2)} = \sqrt{2 \cdot (9.81\ \mathrm{m/s}^2) \cdot (30 - 5) \times 10^{-2}\ \mathrm{m}} = \boxed{2.2\ \mathrm{m/s}}$$

Al di fuori del recipiente il moto del fluido è poi un **moto parabolico sotto l'azione della forza di gravità**, quindi composizione di :

- un moto orizzontale **rettilineo uniforme** con velocità costante v_{0x}
- un moto verticale **uniformemente accelerato** con accelerazione g

Nel sistema di riferimento scelto **le equazioni del moto (leggi orarie)** sono :

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}\ t \\ z(t) = (h_2 + h_3) - \dfrac{1}{2}\,g\,t^2 \end{cases}$$

Ricavo ad esempio il **tempo di caduta** $t_{_G}$ dalla seconda equazione :

$$z(t_{_G}) = 0 \;\rightarrow\; t_{_G} = \sqrt{\frac{2(h_2 + h_3)}{g}} = \sqrt{\frac{2(80+5)\times 10^{-2}\ \mathsf{m}}{9.81\ \mathsf{m/s}^2}} = 0.42\ \mathsf{s}$$

e con questo calcolo **la gittata** $x_{_G}$ usando la prima equazione :

$$x_{_G} = v_{0x}\, t_{_G} = (2.2\ \mathsf{m/s})\cdot(0.42\ \mathsf{s}) = \boxed{\;0.92\ \mathsf{m}\;}$$

La **velocità al suolo** va calcolata infine considerando le componenti x e z del vettore velocità quando il fluido tocca terra :

$$v_G = \sqrt{v_x(t_G)^2 + v_z(t_G)^2}$$

– nella componente orizzontale la velocità è costante :

$$v_x(t_G)^2 = v_{0x}^2 = 2\,g\,(h_1 - h_2)$$

– in quella verticale possiamo (ad esempio) usare la **conservazione dell'energia meccanica** :

$$\cancel{m}\,g\,(h_2 + h_3) = \frac{1}{2}\cancel{m}\,v_z(t_G)^2 \;\rightarrow\; v_z(t_G)^2 = 2\,g\,(h_2 + h_3)$$

Mettendo insieme :

$$v_G = \sqrt{2\,g\,(h_1 - h_2) + 2\,g\,(h_2 + h_3)} = \sqrt{2\,g\,(h_1 + h_3)}$$

Numericamente :

$$v_G = \sqrt{2 \cdot (9.81\ \mathrm{m/s^2}) \cdot (30 + 80) \times 10^{-2}\ \mathrm{m}} = \boxed{4.64\ \mathrm{m/s}}$$

Esercizio 5

Sulla **legge di Hagen-Poiseuille** per un fluido reale **viscoso**:

Ad un paziente viene fatta un'iniezione con un ago ipodermico di lunghezza 3.2 cm e raggio 0.28 mm. Assumendo che la soluzione iniettata abbia la stessa densità e viscosità dell'acqua a 20 $^\circ C$, pari a 1.005 mPa s, determinare la differenza di pressione necessaria per iniettare la soluzione a 1.5 g/s

Siamo in presenza di un **fluido reale**, quindi **viscoso**. Ipotesi di lavoro :

- il flusso è ancora **laminare** e **stazionario** (i vettori velocità sono tutti paralleli tra loro e costanti nel tempo, no turbolenza)

- MA ... **la velocità del fluido varia** tra il centro del condotto (dove è massima) e le pareti (dove è nulla)

Nel caso di un **condotto cilindrico orizzontale** di raggio R, lunghezza L e con una differenza di pressione $\Delta p = p_1 - p_2$ applicata agli estremi si dimostra che **la velocità varia con la distanza** r dall'asse del condotto secondo :

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\,\eta\,L}\,\left(R^2 - r^2\right) = \frac{\Delta p}{4\,\eta\,L}\,\left(R^2 - r^2\right)$$

$\boxed{\eta = \text{viscosità del fluido}}$

La **portata** del condotto si ottiene **integrando** la relazione $v = v(r)$ andando a coprire tutta la sezione del condotto :

$$Q = \int_S v(r)\, dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} v(r)\, r\, dr\, d\phi = \int_0^R v(r)\, 2\, \pi\, r\, dr$$

Il risultato di questo integrale è noto come **legge di Hagen-Poiseuille** :

$$\boxed{Q = \frac{\pi\, R^4\, \Delta p}{8\, \eta\, L}}$$

Fornisce la **caduta di pressione dovuta alla viscosità** nel caso di un **condotto cilindrico orizzontale** percorso da un **fluido viscoso in regime lineare e stazionario**

Dai dati del problema conosciamo la **quantità di soluzione iniettata per unità di tempo** (1.5 g/s), quindi possiamo anche ricavare la **portata del condotto** supposta la densità della soluzione ρ uguale a quella dell'acqua (nota) :

$$\rho = \frac{m}{V} \;\; \rightarrow \;\; Q = \frac{V}{\Delta t} = \frac{1}{\rho}\frac{m}{\Delta t} = \frac{1.5 \times 10^{-3}\ \mathsf{kg/s}}{10^3\ \mathsf{kg/m^3}} = 1.5 \times 10^6\ \mathsf{m^3/s}$$

Dalla **legge di Hagen-Poiseuille** ricavo infine la **differenza di pressione** richiesta :

$$\Delta p = \frac{8\,\eta\,L\,Q}{\pi\,R^4}$$

Numericamente :

$$\Delta p = \frac{8 \cdot (1.005 \times 10^{-3}\ \mathsf{Pa}) \cdot (3.2 \times 10^{-2}\ \mathsf{m}) \cdot (1.5 \times 10^6\ \mathsf{m^3/s})}{3.14 \cdot (0.28 \times 10^{-3}\ \mathsf{m})^4} = \boxed{3.2 \times 10^5\ \mathsf{Pa}}$$

Esercizio 6

Sulla **tensione superficiale** e la **legge di Laplace** :

Al termine di un'espirazione il raggio degli alveoli è di 50 μ*m, mentre le pressioni al loro interno e nella cavità pleurica sono rispettivamente -3 mmHg e -4 mmHg rispetto alla pressione atmosferica. Calcolare la tensione superficiale della parete degli alveoli in approssimazione di bolla sferica.*

Si assume l'alveolo come una **bolla sferica**, per cui è possibile applicare la **legge di Laplace** per la **tensione superficiale** :

$$\boxed{\Delta p = \frac{4\,\tau}{R}}$$

Sotto questa assunzione possiamo allora stimare la **tensione superficiale degli alveoli** :

$$\tau = \frac{R\,\Delta p}{4} = \frac{R\,(p_i - p_e)}{4}$$

Numericamente :

$$\Delta p = p_i - p_e = 4 \text{ mmHg} - 3 \text{ mmHg} = 1 \text{ mmHg}$$

$$= 1 \text{ mmHg} \cdot \left(\frac{1.013 \times 10^5 \text{ Pa}}{760 \text{ mmHg}} \right) = 133 \text{ Pa}$$

$$\rightarrow \quad \tau = \frac{(50 \times 10^{-6} \text{ m}) \cdot (133 \text{ Pa})}{4} = \boxed{2 \times 10^{-3} \text{ N/m}}$$