

Esercitazioni

per il Corso di Fisica

Calorimetria, gas ideali

Dr. Luca Pacher

pacher@to.infn.it

Corso di Laurea in Farmacia

A.A. 2020/2021

10/12/2020

Su **calore** e **calore specifico** :

Si vogliono scaldare 20 litri di acqua con uno scaldabagno elettrico portando la temperatura dell'acqua da 5°C a 55°C . Assumendo che non ci sia dispersione di calore con l'ambiente circostante calcolare :

- *quanta energia occorre fornire*
- *per quanto tempo lo scaldabagno deve restare acceso assumendo che esso abbia una potenza di 1.2 kW*

- ricordiamo le definizioni di **capacità termica** e **calore specifico** per un corpo di massa m :

$$C = \frac{Q}{\Delta T} \quad , \quad c = \frac{C}{m} = \frac{Q}{m \Delta T}$$

- ricordiamo anche che dalla definizione di **(piccola) caloria (cal)** mi servono 4.186 J per innalzare di 1°C (tra 14.5 e 15.5°C) la temperatura di 1 g di acqua :

$$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}$$

- quindi conosciamo anche il **calore specifico dell'acqua** (anche se non dato dal problema) :

$$c_{H_2O} = \frac{4.186 \text{ J}}{\text{g}^\circ\text{C}} = \frac{4186 \text{ J}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$$

- dobbiamo innalzare la temperatura dell'acqua :

$$T_i = 5^\circ\text{C} , T_f = 55^\circ\text{C} \rightarrow \Delta T = T_f - T_i = 50^\circ\text{C}$$

- non sbagliamo le conversioni !

$$\boxed{1 \ell = 1 \text{ dm}^3} \rightarrow 20 \ell(\text{H}_2\text{O}) = 20 \text{ kg}$$

- abbiamo tutto per calcolare la quantità di calore (energia) richiesta :

$$Q = c m \Delta T = \frac{4186 \text{ J}}{\text{kg}^\circ\text{C}} \cdot 20 \text{ kg} \cdot 50^\circ\text{C} = \boxed{4.186 \times 10^6 \text{ J}}$$

- per ipotesi **non si ha dispersione di calore nell'ambiente esterno**, quindi tutta l'energia consumata dallo scaldabagno si trasforma in calore Q fornito all'acqua
- ricordando infine che **lavoro = energia (calore)**, dalla definizione di **potenza** calcoliamo il tempo necessario a scaldare l'acqua :

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Q}{t}$$

$$\rightarrow t = \frac{Q}{P} = \frac{4.186 \times 10^6 \text{ J}}{1.2 \text{ kW}} = \boxed{3488 \text{ s} = 58 \text{ min}}$$

Sull'**equilibrio termico** e il **principio zero** della termodinamica :

Due corpi solidi, fatti della stessa sostanza, hanno masse 0.3 kg e 0.8 kg. Questi vengono messi in contatto termico in un ambiente adiabatico. Sapendo che le temperature iniziali dei due corpi sono 800 K e 200 K rispettivamente, calcolare la temperatura di equilibrio.

- riportiamo i dati iniziali del problema :

$$m_1 = 0.3 \text{ kg} , T_1 = 800 \text{ K} \qquad m_2 = 0.8 \text{ kg} , T_2 = 200 \text{ K}$$

- essendo $T_1 > T_2$ intuitivamente il corpo di massa m_1 **cede calore** e si raffredda, mentre il corpo di massa m_2 **assorbe calore** e si riscalda
- alla fine del processo i due corpi a contatto raggiungono la stessa **temperatura di equilibrio** T_{eq} , da determinare

$$T_1 > T_2 \quad \rightarrow \quad T_1 > T_{eq} > T_2$$

- i due corpi sono fatti **della stessa sostanza**, quindi **hanno lo stesso calore specifico** $c_1 = c_2$ e non è necessario conoscerlo
- il processo di termalizzazione è **adiabatico**, questo significa che **non c'è scambio di calore con l'ambiente circostante** :

$$\Delta Q = 0 \quad \rightarrow \quad Q_{ceduto} = -Q_{assorbito}$$

Sostituendo nell'uguaglianza :

$$Q_{ceduto} = -Q_{assorbito} \rightarrow m_1 c_1 (T_{eq} - T_1) = -m_2 c_2 (T_{eq} - T_2)$$

$$m_1 \cancel{c_1} (T_{eq} - T_1) = m_2 \cancel{c_2} (T_2 - T_{eq}) \rightarrow \boxed{T_{eq} = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}}$$

La **temperatura di equilibrio** è quindi una **media pesata** delle temperature iniziali.

Numericamente :

$$T_{eq} = \frac{0.3 \text{ kg} \cdot 800 \text{ K} + 0.8 \text{ kg} \cdot 200 \text{ K}}{(0.3 + 0.8) \text{ kg}} = \boxed{363.6 \text{ K} = 90.4 \text{ }^\circ\text{C}}$$

Osserviamo ancora che come **caso limite** se una delle due masse è molto più grande dell'altra (ad esempio, $m_1 \gg m_2$) la temperatura di equilibrio correttamente si riduce alla temperatura iniziale del corpo che ha la massa più grande :

$$T_{eq} = \frac{m_1 \left(T_1 + \frac{m_2}{m_1} T_2 \right)}{m_1 \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right)} = \frac{T_1 + \frac{m_2}{m_1} T_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}}$$

$$m_2 \ll m_1 \rightarrow \frac{m_2}{m_1} \ll 1 \rightarrow T_{eq} \approx T_1$$

Simile al precedente, ma nel caso di corpi di **sostanze diverse** :

Un blocco di metallo di massa 0.5 kg e temperatura iniziale 450 °C viene immerso in 25 kg di acqua a temperatura 23 °C. Assumendo che il processo sia adiabatico e noti i calori specifici dell'acqua e del ferro, calcolare la temperatura di equilibrio.

$$c_A = 4186 \text{ J/(kg K)} \quad , \quad c_F = 448 \text{ J/(kg K)}$$

Anche in questo caso il processo per ipotesi è **adiabatico**, quindi il sistema ferro-acqua non scambia calore anche con l'ambiente circostante.

Applichiamo la **conservazione dell'energia** tenuto conto che le sostanze sono diverse, quindi anche i calori specifici :

$$m_F c_F (T_{eq} - T_F) = m_A c_A (T_A - T_{eq})$$

$$\rightarrow T_{eq} = \frac{m_F c_F T_F + m_A c_A T_A}{m_F c_F + m_A c_A}$$

Numericamente (usiamo anche che $T_A = 23^\circ\text{C} = 296.15\text{ K}$ e $T_F = 450^\circ\text{C} = 723.15\text{ K}$) :

$$T_{eq} = \frac{(0.5 \cdot 448 \cdot 723.15) + (25 \cdot 4186 \cdot 296.15)}{(0.5 \cdot 448) + (25 \cdot 4186)} = \boxed{297\text{ K} = 23.8^\circ\text{C}}$$

Sulla **dilatazione termica lineare** :

*Una rotaia è formata da un profilato di alluminio (coefficiente di dilatazione lineare $23.8 \times 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$) di lunghezza 2.4 m alla temperatura di 12°C .
Determinare la lunghezza della rotaia se la sua temperatura raggiunge 50°C .*

Applichiamo la relazione sperimentale per la **dilatazione termica lineare** di un corpo :

$$L(T) = L_0 + \alpha L_0 (T - T_0) = L_0 (1 + \alpha \Delta T)$$

Numericamente :

$$L(T = 50 \text{ }^\circ\text{C}) = (2.4 \text{ m}) \cdot [1 + 23.8 \times 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C} \cdot (50 - 12)^\circ\text{C}] = 2.402 \text{ m}$$

Sull'equazione di stato dei gas perfetti :

Una mole di idrogeno viene riscaldata alla pressione costante di 1 atm passando da una temperatura iniziale di $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ad una temperatura finale di $80\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Determinare :

- il lavoro compiuto nella trasformazione
- la variazione di energia interna del sistema
- il calore assorbito dal gas

- riportiamo i dati iniziali del problema e traduciamo in linguaggio matematico cosa sappiamo :

$$T_i = 0^\circ\text{C} , \quad T_f = 80^\circ\text{C} , \quad n = 1 \text{ mol} , \quad p_i = p_f = \text{cost} = 1 \text{ atm}$$

- dal testo del problema sappiamo anche che la trasformazione è **ISOBARA** perchè avviene a **pressione costante**
- ricordiamo anche l'**equazione dei gas perfetti** (ideali) :

$$pV = nRT$$

con $R = 8.31 \text{ J/mol K}$ **costante dei gas ideali**.

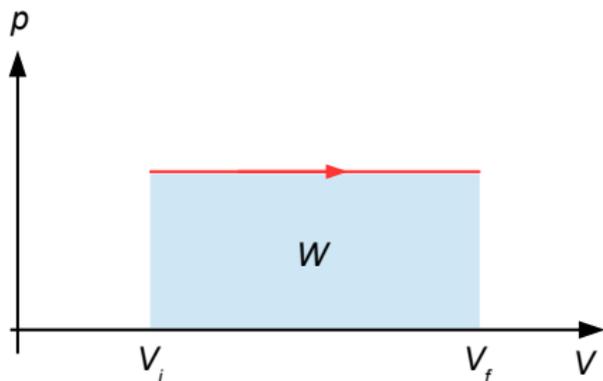
- l'equazione di stato ci permette quindi di calcolare anche **volume iniziale** e **volume finale** del gas note le altre quantità :

$$V_i = \frac{nRT_i}{p_i} \quad , \quad V_f = \frac{nRT_f}{p_f} \quad \text{con} \quad p_i = p_f = p$$

- la trasformazione comporta quindi una **variazione di volume** del gas :

$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{nRT_f}{p_f} - \frac{nRT_i}{p_i} = \frac{nR}{p} (T_f - T_i) = \frac{nR}{p} \Delta T$$

- essendo la trasformazione isobara, sul **piano di Clapeyron** (piano pV) la trasformazione è descritta da un **segmento di retta orizzontale** tra volume iniziale e volume finale :



- il **lavoro** richiesto per **espandere il gas** è dato dall'**area sottesa** alla curva della trasformazione :

$$\boxed{W = p \Delta V} \quad \rightarrow \quad W = p (V_f - V_i) = n R \frac{T_f - T_i}{\gamma} = n R \Delta T$$

Osserviamo ancora che :

$$\Delta T(\text{K}) = \Delta T(^{\circ}\text{C}) \rightarrow \Delta T = 80^{\circ}\text{C} - 0^{\circ}\text{C} = 80^{\circ}\text{C} = 80 \text{ K}$$

Numericamente il lavoro vale allora :

$$W = 1 \text{ mol} \cdot 8.31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 80 \text{ K} = \boxed{665 \text{ J}}$$

Per il calcolo della **variazione di energia interna** dobbiamo invece ricorrere ai risultati della teoria cinetica dei gas :

- teorema dell'**equipartizione dell'energia cinetica** per un gas poli-atomico con ℓ **gradi di libertà**:

$$\boxed{\overline{E_k} = \frac{\ell}{2} k_B T} \quad \text{con} \quad k_B = \frac{R}{N_A} = 1.30 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

- calcolo per l'**energia cinetica** per un gas monoatomico ideale :

$$\ell = 3 \quad \rightarrow \quad \overline{E_k} = \frac{3}{2} k_B T$$

- calcolo per l'**energia cinetica** per un gas biatomico ideale :

$$\ell = 5 \quad \rightarrow \quad \overline{E_k} = \frac{5}{2} k_B T$$

Ricordando la **definizione di mole**, nel caso di $N = n N_A$ molecole di gas l'energia cinetica totale (quindi l'energia interna) vale :

$$U = N \overline{E_k} = N \frac{\ell}{2} k_B T = \frac{\ell}{2} \left(\frac{N R}{N_A} \right) T = \frac{\ell}{2} n R T$$

L'idrogeno gassoso H_2 è biatomico, quindi :

$$U = \frac{5}{2} n R T \quad \rightarrow \quad \boxed{\Delta U = \frac{5}{2} n R \Delta T}$$

Numericamente :

$$\Delta U = 2.5 \cdot 1 \text{ mol} \cdot 8.31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 80 \text{ K} = \boxed{1161 \text{ J}}$$

Nell'espansione del gas parte del **calore** viene trasformato in **lavoro meccanico** (variazione di volume) e parte in **variazione di energia interna** ΔU .

Ricordando allora che :

$$Q - W = \Delta U$$

primo principio della Termodinamica

$$Q = W + \Delta U \quad \rightarrow \quad Q = 665 \text{ J} + 1661 \text{ J} = 2326 \text{ J}$$

Ancora sull'**equazione di stato dei gas perfetti** :

Calcolare la densità dell'ossigeno a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ e alla pressione atmosferica.

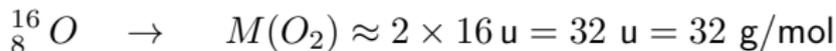
- per definizione la **densità** è il rapporto tra la **massa** m di sostanza contenuta in un certo **volume** V e il volume stesso considerato :

$$\rho = \frac{m}{V}$$

- a sua volta la massa m può essere espressa in termini di **numero di moli** n di molecole contenute nel volume V attraverso la **massa molecolare** M :

$$m = n M \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{n M}{V}$$

- se la massa molecolare è espressa in **unità di massa atomica** la densità calcolata risulta essere espressa in g/m^3
- essendo per l'ossigeno il **numero di massa** $A = 16$ possiamo scrivere :



Utilizzando allora l'equazione di stato dei gas perfetti :

$$pV = nRT \quad \rightarrow \quad \frac{n}{V} = \frac{p}{RT}$$

da cui la densità del gas come

$$\rho = \frac{nM}{V} = \left(\frac{p}{RT} \right) M \quad \rightarrow \quad \rho_{atm} = \left(\frac{p_{atm}}{RT} \right) M$$

Numericamente (ricordiamo anche che $T = 0 \text{ } ^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$ e che $p_{atm} = 10^5 \text{ Pa}$) :

$$\rho = \frac{10^5 \text{ Pa}}{8.31 \text{ J}/(\text{mol K}) \cdot 273 \text{ K}} \cdot 32 \text{ g/mol} = 1427 \text{ g/m}^3 = \boxed{1.427 \text{ kg/m}^3}$$