Esercitazioni per il Corso di Fisica

Cinematica del punto

Prof. Luca Pacher

Corso di Laurea in Farmacia

A.A. 2022/2023

25/10/2022

Cinematica del punto

Formulario di cinematica /1

- se studio il moto in una dimensione parlo di **moto rettilineo** (vario)

- in generale, **distanza** percorsa, **velocità** e **accelerazione** sono funzioni del tempo :

$$x = x(t), \quad v = v(t), \quad a = a(t)$$

- definisco **velocità <u>media</u>** tra 2 punti x_1, x_2 come :

$$\boxed{v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}$$

- definisco **accelerazione <u>media</u>** tra 2 punti x_1, x_2 come :

$$\boxed{a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}}$$

Formulario di cinematica /2

- parlo di moto **rettilineo uniforme** quando avviene con **velocità costante** :

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \text{cost.} \quad \rightarrow \quad \boxed{x(t) = x_0 + vt}$$

- parlo di moto **rettilineo uniformemente accelerato** quando avviene con **accelerazione costante**:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \text{cost.} \quad \rightarrow \quad \boxed{v(t) = v_0 + at}$$

Da cui anche :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{supposto } t_0 = 0 \\ v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \end{cases}$$

Per i più curiosi ...

Velocità media vs. velocità istantanea :

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \boxed{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}}$$

La velocità istantanea è la **derivata prima**, rispetto al tempo, dello spazio percorso

Accelerazione media vs. accelerazione istantanea :

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \boxed{a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}}$$

L'accelerazione istantanea è la **derivata prima**, rispetto al tempo, della velocità, quindi anche la **derivata seconda** dello spazio percorso

Moto rettilineo **generico** :

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \;\rightarrow\; dx(t) = v(t)dt \;\rightarrow\; \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t')dt'$$

$$a(t) = \frac{dx(t)}{dt} \;\rightarrow\; dv(t) = a(t)dt \;\rightarrow\; \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t')dt'$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = x - x_0 \;\rightarrow\; \boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')dt'}$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = v - v_0 \;\rightarrow\; \boxed{v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t')dt'}$$

E queste relazioni sono valide ... **per qualunque tipo di moto rettilineo** !

Dall' Analisi Matematica :

$$\boxed{\frac{d}{dx} x^n = n\ x^{(n-1)}} \qquad \boxed{\int x^n\ dx = \frac{x^{(n+1)}}{n+1}}$$

Esempi :

$$y(z) = 2z \ \rightarrow \ \frac{dy}{dz} = 2$$

$$y(t) = t^2 \ \rightarrow \ \frac{dy}{dt} = 2\,t$$

$$y = x^3 \ \rightarrow \ \frac{dy}{dx} = 3\,x^2$$

$$\int t\,dt = \frac{1}{2}\,t^2$$

Caso particolare: **moto rettilineo uniforme**

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \text{cost}$$

$$\rightarrow \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \text{cost}\ dt' = x_0 + \text{cost} \int_{t_0}^{t} dt' = x_0 + \text{cost}\ (t - t_0)$$

cioè ritroviamo la solita relazione lineare :

$$\boxed{x(t) = x_0 + v(t - t_0)}$$

Per l'accelerazione invece :

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\text{cost} = 0 \ \rightarrow \quad \boxed{a = 0}$$

Caso particolare: **moto rettilineo uniformemente accelerato**

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \text{cost}$$

$$\rightarrow \quad v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} \text{cost}\ dt' = v_0 + \text{cost} \int_{t_0}^{t} dt' = v_0 + \text{cost}\ (t - t_0)$$

cioè ritroviamo la solita relazione lineare :

$$\boxed{v(t) = v_0 + a(t - t_0)}$$

Nota la velocità posso calcolare lo spazio (assumiamo $t_0 = 0$) :

$$\rightarrow \quad x(t) = x_0 + \int_0^t v(t')\ dt' = x_0 + \int_0^t (v_0 + at')\, dt'$$

$$\rightarrow \quad x(t) = x_0 + v_0 \int_0^t dt' + a \int_0^t t'\ dt' = \boxed{x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2}$$

Infine la "magia" della Fisica :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v \;\rightarrow\; a\,dx = v\,dv \qquad \text{con } a = \text{cost}$$

Integrando :

$$\int_{x_0}^{x} a\,dx' = \int_{v_0}^{v} v'dv' \;\rightarrow\; a(x - x_0) = \left[\frac{1}{2}v'^2\right]_{v_0}^{v} = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2)$$

ovvero ritroviamo anche la relazione che lega accelerazione e velocità :

$$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)}$$

Esempio di esame scritto

Un grande classico ...

Fisica per Farmacia (STF0060)
Esame scritto
8 Luglio 2021

Esercizio 1

Un treno A parte da Torino diretto verso Milano, distante 128 km, viaggiando ad una velocità media costante di 100 km/h. Un secondo treno B parte alla stessa ora da Milano diretto verso Torino e viaggia ad una velocità media costante di 80 km/h. Determinare:

a) dopo quanto tempo i due treni si incontrano

b) a quale distanza da Torino i due treni si incontrano

Esercizio 1

Si misura che il sangue che scorre in un'arteria ha la velocità di 120 cm/s in un punto e 90 cm/s se misurata in un secondo punto distante 40 cm lungo la stessa arteria. **Supponendo che l'accelerazione sia costante** determinare :

a) la velocità media del sangue tra i due punti

b) quanto tempo impiega ad andare da un punto all'altro ?

c) quanto vale l'accelerazione ?

Per prima cosa, **traduciamo in linguaggio matematico** il testo e le richieste dell'esercizio :

- l'ipotesi è quella di un **moto uniformemente decelerato** (la velocità del sangue diminuisce) tra i due punti dell'arteria :

$$(x_1,\ v_1) \quad (x_2,\ v_2)$$

- viene data **la distanza** tra i due punti :

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \ 40 \text{ cm}$$

- nei dati iniziali **non ci sono informazioni sul tempo** !

L'equazione del moto uniformemente accelerato che lega velocità e posizioni

$$\boxed{v_2^2 - v_1^2 = 2a\ (x_2 - x_1)}$$

sembra quindi essere un buon punto di partenza.

Cominciamo a calcolare la **velocità media** del sangue tra i punti x_1 e x_2 :

- la **velocità media** è per definizione :

$$\boxed{v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}$$

- l'**accelerazione media** invece è per definizione :

$$\boxed{a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}}$$

- l'ipotesi è che il moto del sangue sia uniformemente accelerato quindi:

$$a(t) = a_m = \text{ cost.}$$

Scomponendo la differenza dei quadrati come "somma per differenza" ottengo :

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\ (x_2 - x_1)\ \rightarrow\ (v_2 + v_1)(v_2 - v_1) = 2a\ (x_2 - x_1)$$

Dividiamo membro a membro per $\Delta t = (t_2 - t_1)$

$$\frac{(v_2 + v_1)(v_2 - v_1)}{t_2 - t_1} = 2a\ \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\ \rightarrow\ (v_2 + v_1)\frac{\Delta v}{\Delta t} = 2a\ \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Ma $\Delta v/\Delta t = a$ è proprio l'accelerazione, mentre $\Delta x/\Delta t = v_m$ la velocità media cercata !

$$\rightarrow\ (v_2 + v_1)\frac{\Delta v}{\Delta t} = (v_2 + v_1)\ a = 2a\, v_m\quad \rightarrow\quad \boxed{v_m = \frac{v_1 + v_2}{2}}$$

Nel moto uniformemente accelerato la velocità media tra 2 punti è il valor medio delle velocità ! (ma questo è un caso particolare di questo tipo di moto, in generale NON È VERO !)

Derivazione alternativa :

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \qquad a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Ma conosco anche la legge oraria :

$$x_2 = x_1 + v_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a\,(t_2 - t_1)^2$$

Sostituisco :

$$v_m = \frac{\cancel{x_1} + v_1(t_2 - t_1) + 1/2a\,(t_2 - t_1)^2 - \cancel{x_1}}{t_2 - t_1} = v_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}\right)(t_2 - t_1)$$

$$\rightarrow \quad v_m = \boxed{\frac{v_1 + v_2}{2}}$$

Possiamo allora **calcolare la velocità media del sangue** usando questo risultato :

$$v_m = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{120 \text{ cm/s} + 90 \text{ cm/s}}{2} = \frac{210 \text{ cm/s}}{2} = 105 \text{ cm/s}$$

Nota la velocità media si ricava poi **il tempo impiegato** dal sangue per scorrere tra i due punti dell'arteria :

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_m} = \frac{40 \text{ cm}}{105 \text{ cm/s}} \approx 0.38 \text{ s}$$

L'**accelerazione del sangue** può essere infine calcolata in due modi equivalenti.

- dalla definizione di accelerazione media :

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{90 \text{ cm/s} - 120 \text{ cm/s}}{0.38 \text{ s}} = \frac{-30 \text{ cm/s}}{0.38 \text{ s}} \approx -78.9 \text{ cm/s}^2$$

- dalla relazione iniziale tra velocità e posizioni da cui siamo partiti :

$$v_2^2 - v_1^2 = 2\ a\ (x_2 - x_1) \ \rightarrow\ a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2(x_2 - x_1)} = \frac{(v_2 + v_1)(v_2 - v_1)}{2(x_2 - x_1)}$$

$$\rightarrow\ a = \frac{(90 \text{ cm/s} + 120 \text{ cm/s})(90 \text{ cm/s} - 120 \text{ cm/s})}{2 \cdot 40 \text{ cm}}$$

$$= \frac{(210 \text{ cm/s})(-30 \text{ cm/s})}{80 \text{ cm}} \approx -78.9 \text{ cm/s}^2$$

Esercizio 2

Un tipico problema di sicurezza stradale:

Il pilota di un automezzo che viaggia a 144 km/h vede un improvviso ostacolo in mezzo alla strada e frena. Sapendo che il tempo di reazione del pilota è di 0.2 s e che l'automezzo è in grado di produrre una **decelerazione costante** *di 10 m/s* ^{2}*, calcolare :*

a) in quanto tempo l'automezzo si ferma (tempo di arresto complessivo)

b) quale spazio ha percorso da quando il conducente ha visto l'ostacolo

- Riportiamo innanzitutto i dati iniziali nelle unità di misura del SI :

$$v_0 = 144 \text{ km/h} = 144 \ \cdot (10^3 \text{ m}/3600 \text{ s}) = 40 \text{ m/s}$$

- Cerchiamo di comprendere il testo e tradurre le richieste in linguaggio matematico :

$$\begin{array}{ll} t = t_0,\ x = x_0,\ v(t_0) = v_0 & \text{il pilota vede l'ostacolo} \\ t = t_1,\ x = x_1,\ v(t_1) = v_1 & \text{il pilota comincia a frenare} \\ t = t_2,\ x = x_2,\ v(t_2) = v_2 & \text{l'auto si ferma} \end{array}$$

- $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ è il tempo di reazione in cui percorro $\Delta x_1 = x_1 - x_0$ con **velocità costante**
- $\Delta t_2 = t_2 - t_1$ è il tempo di frenata in cui percorro $\Delta x_2 = x_2 - x_1$ con **accelerazione costante**
- dal momento che **decelero**, **l'accelerazione è <u>negativa</u>**, $a = -10 \text{ m/s}^2$

Cosa è richiesto nell'esercizio :

$$\Delta t_{tot} = \Delta t_1 + \Delta t_2$$

$$\Delta x_{tot} = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

La scelta dell'**origine** del nostro sistema di riferimento (x, t) è **arbitraria**, mettiamoci nella condizione più semplice :

$$(x_0\,, t_0) = (0\,, 0)$$

Tenendo conto del tempo di reazione del pilota, l'automezzo percorre un certo spazio con **moto rettilineo uniforme** prima di iniziare la frenata :

$$t_1 = 0.2 \text{ s}, \quad v_0 = v_1 = 40 \text{ m/s}$$

$$x(t = t_1) = \cancel{x_0} + v_0(t_1 - \cancel{t_0}) = \left(40\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \times 0.2 \text{ s} = 8 \text{ m}$$

$$\boxed{\Delta t_1 = 0.2 \text{ s} \quad \Delta x_1 = 8 \text{ m}}$$

- Dopo il tempo di reazione del pilota, l'auto inizia a frenare con decelerazione costante 10 m/s^2... utilizzo le equazioni del **moto uniformemente accelerato** !
- dal momento che l'auto alla fine si ferma posso **imporre che la velocità finale sia nulla** :

$$v(t = t_2) = 0 \text{ m/s}$$

- applico la **legge oraria** che lega velocità-tempo nel moto uniformemente accelerato :

$$v(t_2) = v(t_1) + a(t_2 - t_1)$$

- ricavo il **tempo di frenata** del veicolo :

$$\Delta t_2 = t_2 - t_1 = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{a} = \frac{-40 \text{ m/s}}{-10 \text{ m/s}^2} = 4 \text{ s}$$

In questo intervallo di tempo l'auto percorre una distanza :

$$\begin{aligned}\Delta x_2 = x(t_2) - x(t_1) &= v_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a(t_2 - t_1)^2 \\ &= 40\ \frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}} \cdot 4\ \mathsf{s} + \frac{1}{2}\left(-10\ \frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}^2}\right)(4\ \mathsf{s})^2 = 80\ \mathsf{m}\end{aligned}$$

Complessivamente quindi l'automezzo si ferma in un tempo

$$\boxed{\Delta t_{tot} = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 4.2\ \mathsf{s}}$$

dopo aver percorso una distanza

$$\boxed{\Delta x_{tot} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 88\ \mathsf{m}}$$

Esercizio 3

Sul moto verticale dei corpi :

Una palla è lanciata verso l'alto con una velocità iniziale di 30 m/s, calcolare il tempo impiegato per ricadere alla posizione iniziale e l'altezza massima raggiunta dalla palla.

- il moto avviene sotto l'effetto dell'**accelerazione di gravità**, il cui valore locale in prossimità della superficie terrestre vale circa :

$$\boxed{g = 9.81 \text{ m/s}^2}$$

- si tratta di un moto rettilineo (avviene lungo la verticale) **uniformente**
  - **decelerato** verso l'alto
  - **accelerato** verso il basso

- scegliamo **a piacere un verso per il nostro sistema di riferimento**, ad esempio $z > 0$ verso l'alto a partire da $z = 0$ in cui lancio la palla con velocità iniziale $v_0 = 30$ m/s

Con queste premesse possiamo scrivere che :

- **la velocità diminuisce** mano a mano che la palla sale di altezza, con legge oraria

$$\boxed{v(t) = v_0 - g\ t}$$

- la palla raggiunge **altezza massima** z_{max} al tempo t_{max} e **si ferma** :

$$v(t = t_{max}) = 0 \ \rightarrow \ \ t_{max} = \frac{v_0}{g} = \frac{30 \text{ m/s}}{9.81 \text{ m/s}^2} = \ 3.06 \text{ s}$$

- ovviamente il moto è poi simmetrico verso il basso, quindi il **tempo totale** impiegato per ricadere alla posizione iniziale è il doppio :

$$\Delta t_{tot} = 2\ t_{max} = \boxed{6.12 \text{ s}}$$

L' **altezza massima** z_{max} raggiunta dalla palla può essere calcolata in diversi modi, alcuni più furbi degli altri :

- noto t_{max}, utilizzo la legge quadratica del moto... non conviene !

$$z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \;\rightarrow\; z_{max} = v_0 t_{max} - \frac{1}{2}\, g\, t_{max}^2$$

- conosco velocità iniziale/finale e accelerazione :

$$v^2 - v_0^2 = -2g(z - z_0) \;\rightarrow\; z_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(30 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2} = \boxed{45.9 \text{ m}}$$

- posso semplicemente **utilizzare la definizione di velocità media** :

(il modo più semplice e immediato ...)

$$v_m = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{z_{max}}{t_{max}} = \frac{v_0}{2} \;\rightarrow\; z_{max} = \frac{v_0}{2}\, t_{max} = (15 \text{ m/s}) \cdot (3.06 \text{ s}) = 45.9 \text{ m}$$

Esercizio 4

Sulle *condizioni iniziali* nelle leggi orarie:

Due ciclisti iniziano una gara di 10 km. Se il primo ciclista viaggia con velocità costante 50 km/h e il secondo con velocità 30 km/h calcolare :

- *di quanto può ritardare la partenza il primo per poter ancora vincere la gara*
- *il vantaggio minimo (in termini di distanza) che può avere il secondo per poter vincere la gara*

Primo passo... formalizzare il problema in linguaggio matematico !

- chiamiamo A e B i due ciclisti
- abbiamo a che fare con **due moti rettilinei uniformi <u>indipendenti</u>** ...
- ... quindi scriviamo per i due ciclisti **<u>due leggi orarie del tutto generali</u>** :

$$x_a(t) = x_{0a} + v_a\ (t - t_{0a}) \quad \text{con } v_a = 50 \text{ km/h}$$

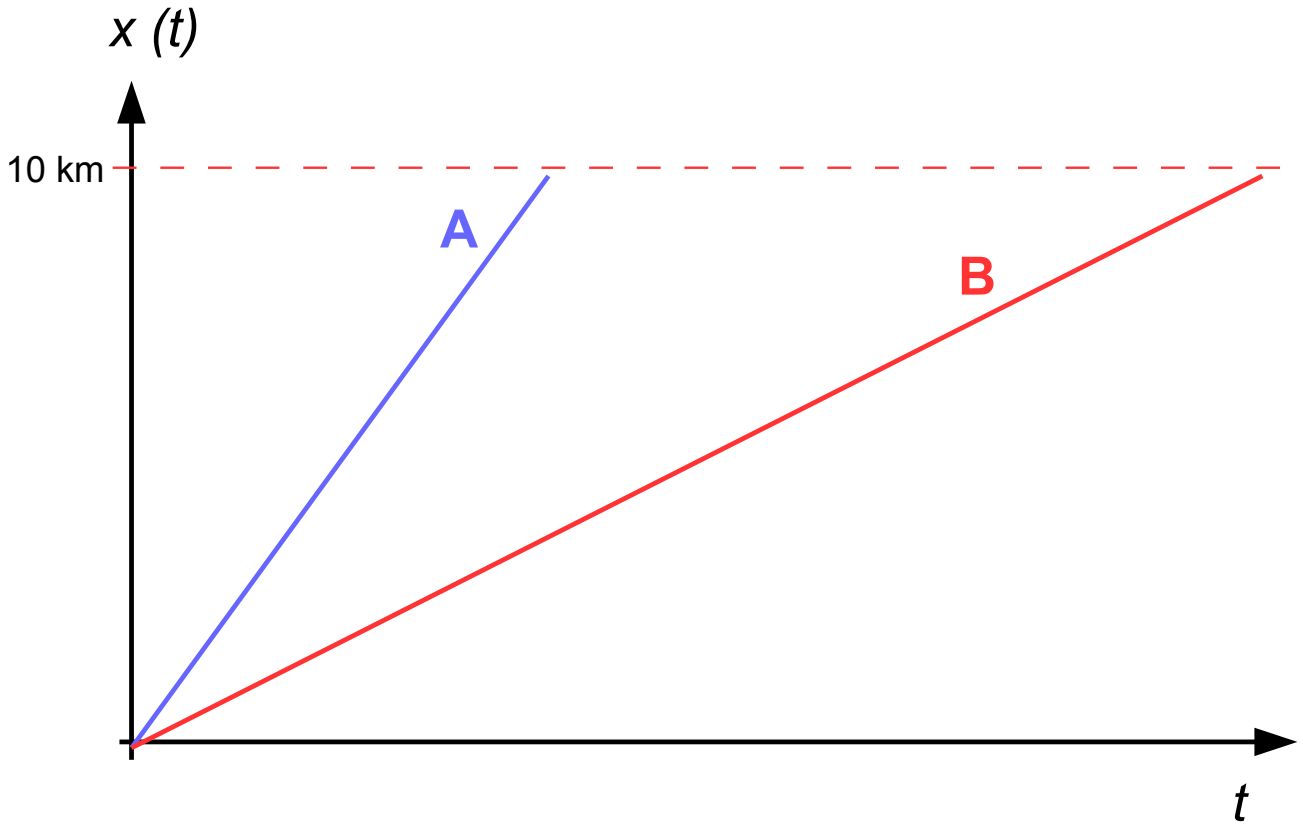
$$x_b(t) = x_{0b} + v_b\ (t - t_{0b}) \quad \text{con } v_b = 30 \text{ km/h}$$

- la distanza totale percorsa vale :

$$L = 10 \text{ km}$$

- *"partire dopo"* oppure *"avere un vantaggio"* significa **lavorare sulle <u>condizioni iniziali</u>**

Chiaramente essendo il ciclista A più veloce del ciclista B ...
senza ritardi o vantaggi è il ciclista A a vincere la gara.



Primo caso: quanto **tempo di ritardo** il ciclista più veloce può permettersi per vincere comunque la gara ?

- i due ciclisti partono comunque dallo stesso punto, scegliamo $x = 0$:

$$x_{0a} = x_{0b} = 0$$

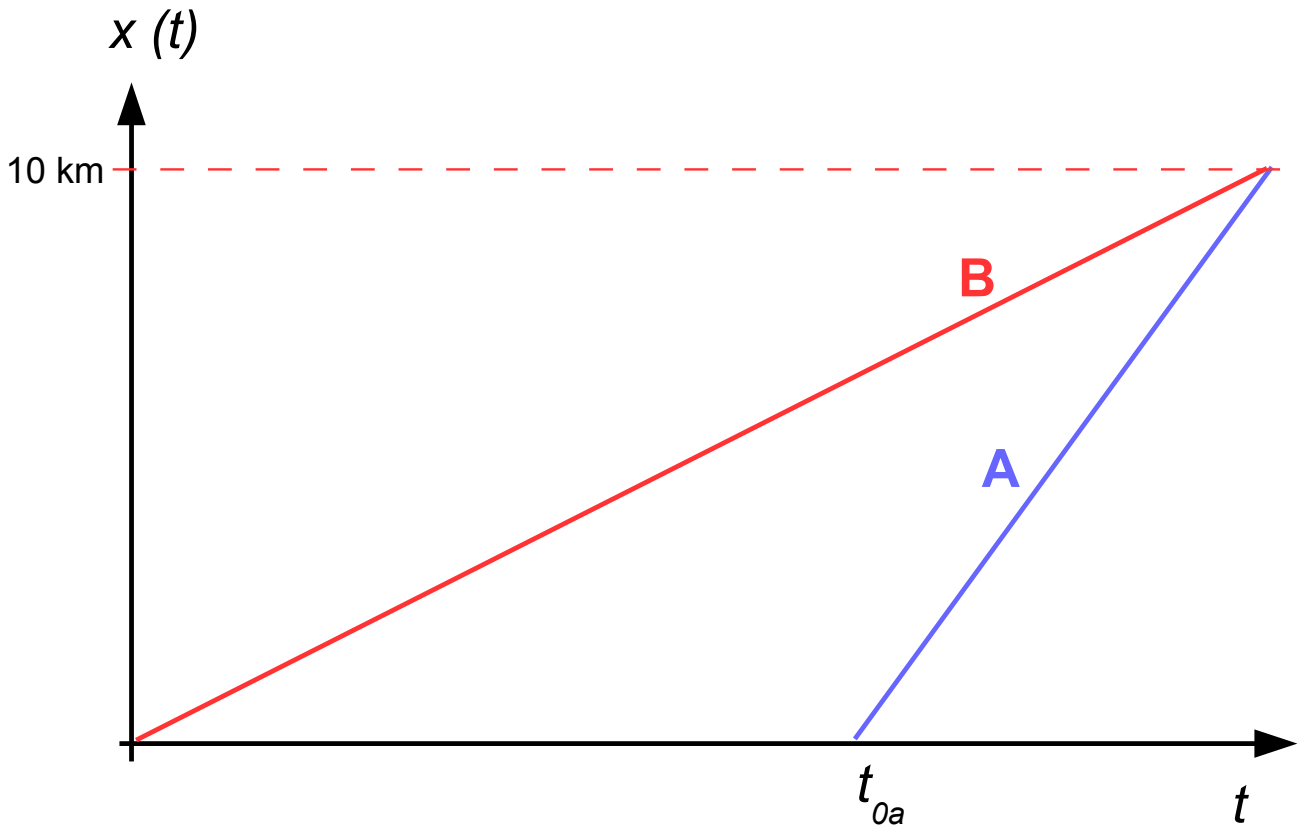
- MA ... il ciclista A parte DOPO :

$$t_{0b} = 0 \ , \ t_{0a} \neq 0$$

- le equazioni del moto sono quindi :

$$\begin{cases} x_a(t) = v_a \ (t - t_{0a}) \\ \\ x_b(t) = v_b \ t \end{cases}$$

Dal punto di vista **geometrico** avere $(t - t_{0a})$ nell'equazione di una retta significa ... **<u>traslare</u> la legge oraria** del ciclista A verso destra !



– il ciclista B percorre la distanza L in un tempo :

$$t_b = \frac{L}{v_b}$$

– il ciclista A percorre la stessa distanza L in un tempo :

$$t_a = t_{0a} + \frac{L}{v_a}$$

– per **vincere comunque la gara** devo chiedere che sia :

$$t_a < t_b \quad \rightarrow \quad t_{0a} + \frac{L}{v_a} < \frac{L}{v_b} \quad \rightarrow \quad t_{0a} < L\left(\frac{1}{v_b} - \frac{1}{v_a}\right)$$

Numericamente :

$$\rightarrow \; t_{0a} < L\left(\frac{v_a - v_b}{v_a \; v_b}\right) = 10 \text{ km}\left(\frac{50-30}{50 \cdot 30}\right)\frac{\text{h}}{\text{km}} = 0.13 \text{ h}$$

$$0.13 \text{ h} = 0.13 \text{ h} \times \frac{60 \text{ min}}{\text{h}} = \boxed{7.8 \text{ min}}$$

Secondo caso : quanto **vantaggio in termini di <u>distanza</u>** il ciclista B deve prendersi per poter invece vincere la gara ?

- i due ciclisti partono questa volta allo stesso tempo, scegliamo $t = 0$:

$$t_{0a} = t_{0b} = 0$$

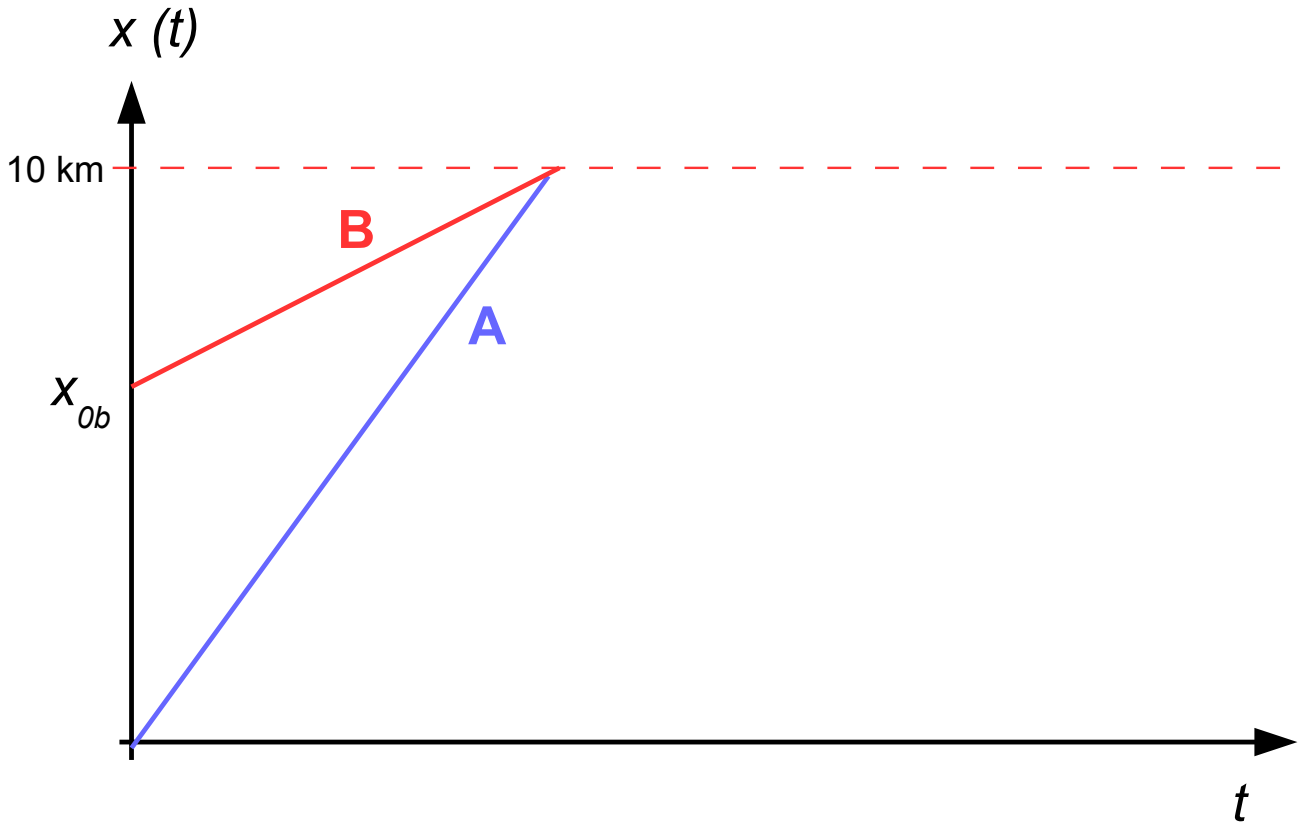
- MA ... il ciclista B parte PIÙ AVANTI !

$$x_{0a} = 0 \ , \ x_{0b} \neq 0$$

- le equazioni del moto sono quindi :

$$\begin{cases} x_a(t) = v_a \ t \\ \\ x_b(t) = x_{0b} + v_b \ t \end{cases}$$

Questa volta dal punto di vista **geometrico** avere un termine noto x_{0b} significa ... **<u>traslare</u> la legge oraria** del ciclista B verso l'alto !



– questa volta il ciclista B percorre una distanza $L - x_{0b}$ in un tempo :

$$t_b = \frac{L - x_{0b}}{v_b}$$

– mentre il ciclista A impiega un tempo :

$$t_a = \frac{L}{v_a}$$

– perchè il ciclista B più lento possa vincere la gara devo chiedere che sia :

$$t_b < t_a \quad \rightarrow \quad \frac{L - x_{0b}}{v_b} < \frac{L}{v_a} \quad \rightarrow \quad x_{0b} > L\left(1 - \frac{v_b}{v_a}\right)$$

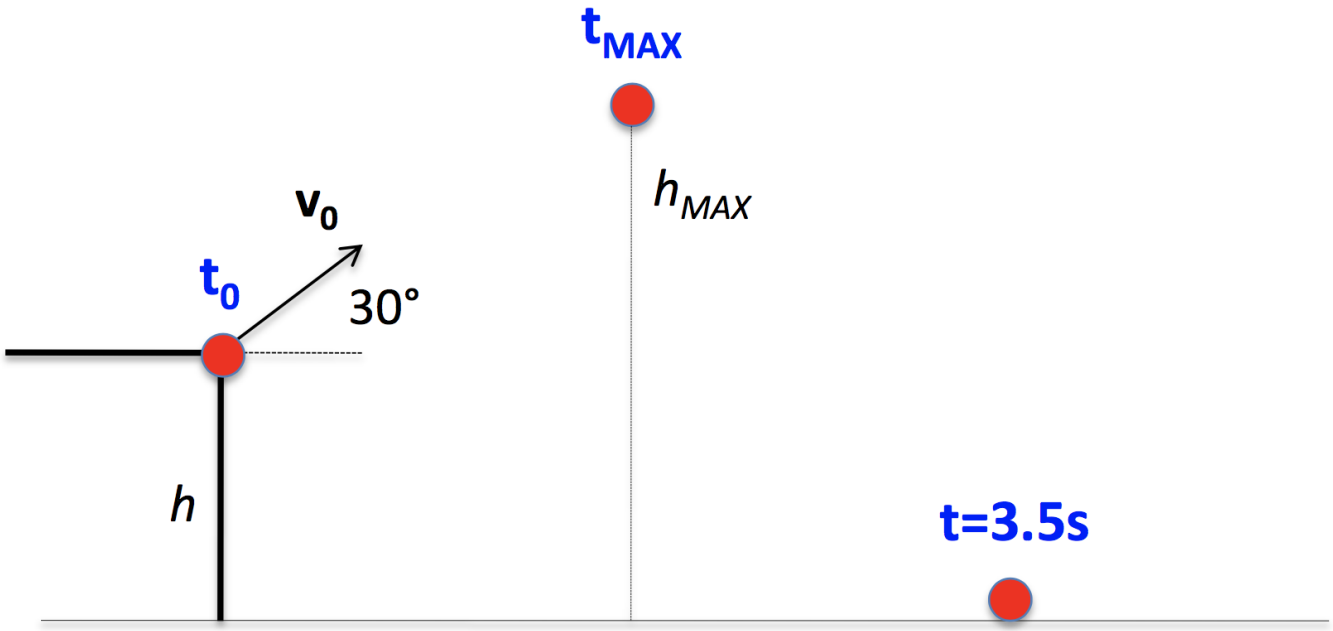
Numericamente :

$$\rightarrow \; x_{0b} > 10 \text{ km}\left(1 - \frac{30 \text{ km/h}}{50 \text{ km/h}}\right) = \boxed{4 \text{ km}}$$

Esercizio 5

Sul moto parabolico dei corpi :

Una pallina lanciata da un'altezza h con modulo di velocità $v_0 = 10$ m/s e angolo 30 gradi colpisce il suolo dopo 3.5 s. Determinare l'altezza h da cui è stata lanciata la pallina e l'altezza massima h_{max} da essa raggiunta.



- La traiettoria della pallina è di tipo **parabolico** ed è il risultato della **combinazione di 2 moti**

  - moto rettilineo uniforme lungo l'asse x :

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t$$

  - moto uniformemente accelerato lungo l'asse y :

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2}\, g\, t^2 \;\rightarrow\; \boxed{y_0 = h}$$ (prima incognita del problema)

$$v_y(y) = v_{oy} + a\, t = v_{oy} - g\, t$$

- La velocità iniziale è **un vettore di <u>componenti</u>** :

$$\boxed{v_{0x} = v_0 \;\cos\theta} \qquad \boxed{v_{0y} = v_0 \;\sin\theta}$$

$$\rightarrow\; v_{0x} = \; 10\; \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\; \cos 30^\circ \quad v_{0y} = \; 10\; \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\; \sin 30^\circ$$

Ricordiamo anche che :

$$\boxed{\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \boxed{\sin 30^\circ = \frac{1}{2}}$$

Per determinare l'altezza h dalla quale è stata lanciata la pallina utilizziamo la legge oraria $y(t)$ e andiamo ad imporre che :

$$y(t = 3.5 \text{ s}) = 0 \text{ m} \quad \rightarrow \quad h + v_{oy}\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 = 0 \text{ m} \quad \rightarrow \quad h = \frac{1}{2} g\, t^2 - v_{oy}\, t$$

Numericamente :

$$h = \frac{9.81}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times (3.5 \text{ s})^2 - 10 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \ \sin 30^\circ \times 3.5 \text{ s} \quad \rightarrow \quad \boxed{h = \ 42.5 \text{ m}}$$

Quando la pallina raggiunge **l'altezza massima** la sua velocità sull'asse y è nulla, quindi :

$$v_y(t = t_{max}) = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = v_{oy} - g\, t_{max} \quad \rightarrow \quad t_{max} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

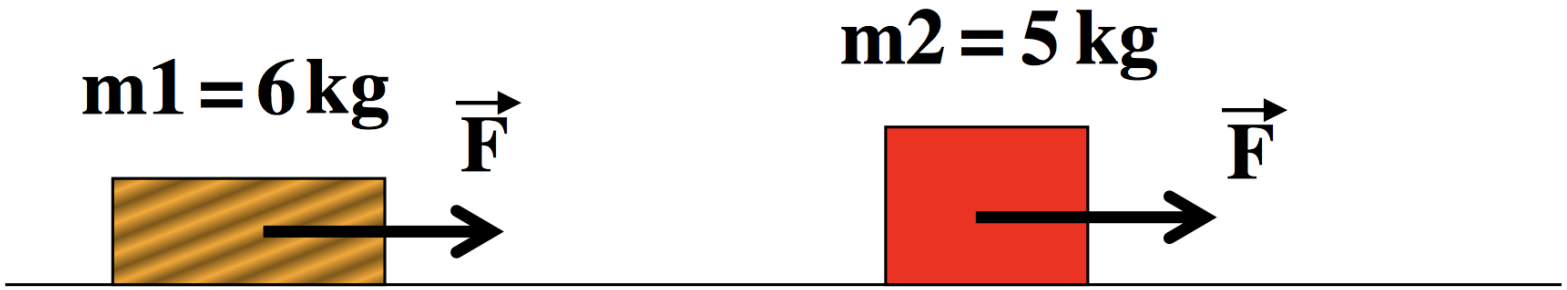
Calcoliamo infine l'altezza massima h_{max} raggiunta (seconda incognita del problema) :

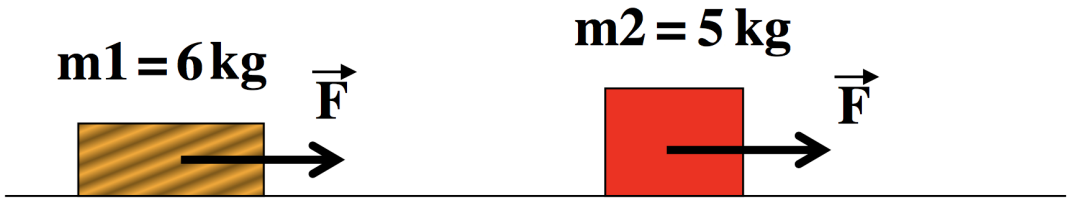
$$\begin{aligned} h_{max} &= h + v_{oy}\, t_{max} - \frac{1}{2} g\, t_{max}^2 \\ &= h + v_{oy} \left(\frac{v_{oy}}{g}\right) - \frac{1}{2}\, g \left(\frac{v_{oy}}{g}\right)^2 \\ &= h + \frac{v_{oy}^2}{2g} = h + \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g} \\ &= 42.5 \text{ m} + \frac{(10 \text{ m/s} \cdot 0.5)^2}{2 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2} = \boxed{43.8 \text{ m}} \end{aligned}$$

Esercizio 6

Un primo esempio di come sia la **dinamica** a determinare la **cinematica** :

Su due corpi di massa 6 kg e 5 kg inizialmente fermi agisce **una forza costante** *di 3 N. Dopo quanto tempo il corpo più leggero acquista la stessa velocità raggiunta da quello più pesante in un tempo di 10 s ?*





– chiamiamo le due masse m_1 e m_2

– per il **secondo principio della dinamica** :

$$\boxed{F = m\,a}$$ **legge di Newton**

– calcoliamo **le accelerazioni** sulle due masse :

$$a_1 = \frac{F}{m_1} = \frac{3\ \text{N}}{6\ \text{kg}} = 0.5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^{\ 2}} \qquad a_2 = \frac{F}{m_2} = \frac{3\ \text{N}}{5\ \text{kg}} = 0.6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^{\ 2}}$$

– l'accelerazione è costante, quindi ogni massa si muove di **moto uniformemente accelerato** :

$$v_1(t) = v_{01} + a_1\,t$$
$$v_2(t) = v_{02} + a_2\,t$$

– le due masse sono **inizialmente ferme**, quindi :

$$v_{01} = v_{02} = 0$$

– assumendo $t_1 = 10$ s, il problema chiede di trovare il tempo t_2 per il quale le due masse hanno la stessa velocità :

$$v_1\left(t_1\right) = v_2\left(t_2\right)$$

$$\rightarrow \;\; a_1 \; t_1 = a_2 \; t_2 \;\; \rightarrow \;\; t_2 = t_1 \, \frac{a_1}{a_2} = t_1 \; \left(\frac{F/m_1}{F/m_2}\right) = t_1 \, \frac{m_2}{m_1}$$

Numericamente :

$$t_2 = 10 \text{ s} \; \cdot \; \frac{5 \text{ kg}}{6 \text{ kg}} = \boxed{8.3 \text{ s}}$$