Esercitazioni per il Corso di Fisica

Lavoro, energia, conservazione dell'energia meccanica

Prof. Luca Pacher

Corso di Laurea in Farmacia

A.A. 2022/2023

16/11/2022

Formulario di dinamica /1

- la **risultante** **<u>vettoriale</u>** delle forze applicate su un corpo determina la sua **<u>accelerazione</u>** :

$$\boxed{\sum \mathbf{F} = m\,\mathbf{a}} \qquad \underline{\textbf{legge di Newton}}$$

- forza **peso** :

$$\boxed{\mathbf{P} = m\,\mathbf{g}} \quad \rightarrow \qquad \text{ragioneremo poi su cosa sia veramente "g"}$$

- forza di richiamo **elastica** (ad esempio una molla) :

$$\boxed{\mathbf{F} = -k\,\mathbf{x}} \qquad \underline{\textbf{legge di Hooke}}$$

- forza di **attrito** **<u>radente</u>** (in modulo) :

$$\boxed{|\mathbf{F}_A| = \mu\,|\mathbf{N}|}$$

  - vettorialmente sempre **opposta** alla direzione del moto
  - distinguiamo tra coefficiente di attrito **statico** e **dinamico**: $\mu_s > \mu_d$

Formulario di dinamica /2

- definizione di **lavoro** compiuto da una forza **costante** $\mathbf{F}$ lungo uno spostamento $\mathbf{s}$:

$$\boxed{W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{F}|\,|\mathbf{s}| \cos\theta}$$

N.B : se i vettori forza e spostamento sono **ortogonali** tra loro il lavoro è sempre nullo (e.g. forza di Lorentz)

- definizione di **energia cinetica** di un corpo in movimento :

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}\, m\, v^2} \quad \text{dove} \quad v^2 = |\mathbf{v}|^2$$

- **teorema dell'energia cinetica** (o delle "forze vive") per il calcolo del lavoro :

$$\boxed{W_{AB} = \Delta E_k = E_{k,B} - E_{k,A}}$$

... sempre valido !

Formulario di dinamica /3

- alcune forze sono però "speciali" in quanto il lavoro **non dipende dal percorso** ma solo da punto di partenza e punto di arrivo

- si chiamano **forze conservative**

- le forze conservative sono caratterizzate da una **funzione scalare** U chiamata **energia potenziale** che permette di calcolare il lavoro come **"meno" la differenza di energia potenziale** :

$$\boxed{W_{AB} = -\Delta U} = -(U_B - U_A) = U_A - U_B$$

- si chiama **energia meccanica** la somma :

$$\boxed{E_m = E_k + U}$$

Esempio : **energia potenziale <u>gravitazionale</u>** :

$$\boxed{U_g = m\,g\,z}$$

Esempio : **energia potenziale <u>elastica</u> di una molla** :

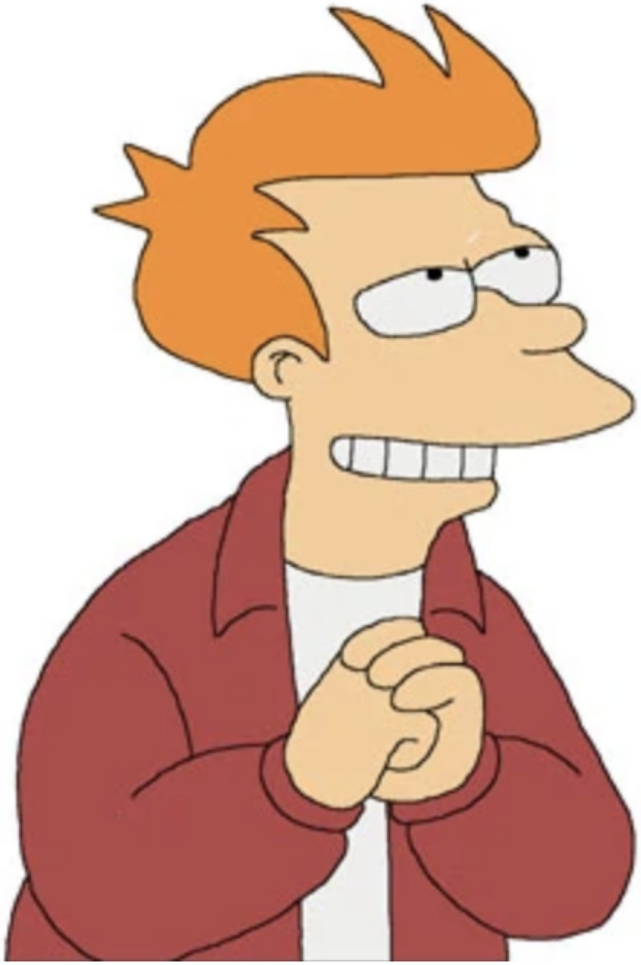
$$\boxed{U_e = \frac{1}{2}kx^2}$$

In presenza di **sole forze conservative** l'energia meccanica totale **<u>si conserva</u>** :

$$E_m = E_k + U = \text{cost}$$

MA... in presenza di **forze di attrito**
l'energia meccanica **<u>NON</u> SI CONSERVA** !

Sempre per i più curiosi...



Lavoro ed energia cinetica

- nel caso più generale possibile il **vettore forza** può **<u>cambiare</u> punto per punto** lungo la traiettoria del moto, quindo non essere costante :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) \;\rightarrow\; \text{questo si chiama un } \textbf{"campo" vettoriale}$$

- si parte dal definire un **<u>lavoro infinitesimo</u>** :

$$dW = \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$$

- per calcolare il **<u>lavoro totale</u>** nell'andare da A a B bisogna allora **integrare sul percorso** :

$$\boxed{W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}} \;\rightarrow\; \text{questo si chiama un } \textbf{integrale "di linea"}$$

Caso più semplice: **moto rettilineo <u>vario</u>** :

- problema unidimensionale, forza parallela alla direzione del moto (ad esempio lungo asse x) :

$$d\,W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = F dx$$

- in modo del tutto generale l'accelerazione **<u>può anche non essere costante</u>** lungo il percorso !

$$F = ma \qquad \text{con } a = a(x) \;\rightarrow\; F = F(x)$$

- calcoliamo **il lavoro** nell'andare tra due punti A e B :

$$W = \int_A^B (ma)\, dx = m \int_A^B a\, dx = m \int_A^B \frac{dv}{dt}\, dx = m \int_{v_A}^{v_B} v\, dv$$

$$\rightarrow\; W = m \int_{v_A}^{v_B} v\, dv = \left[\frac{1}{2} m\, v^2\right]_{v_A}^{v_B} = \boxed{\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \Delta E_K}$$

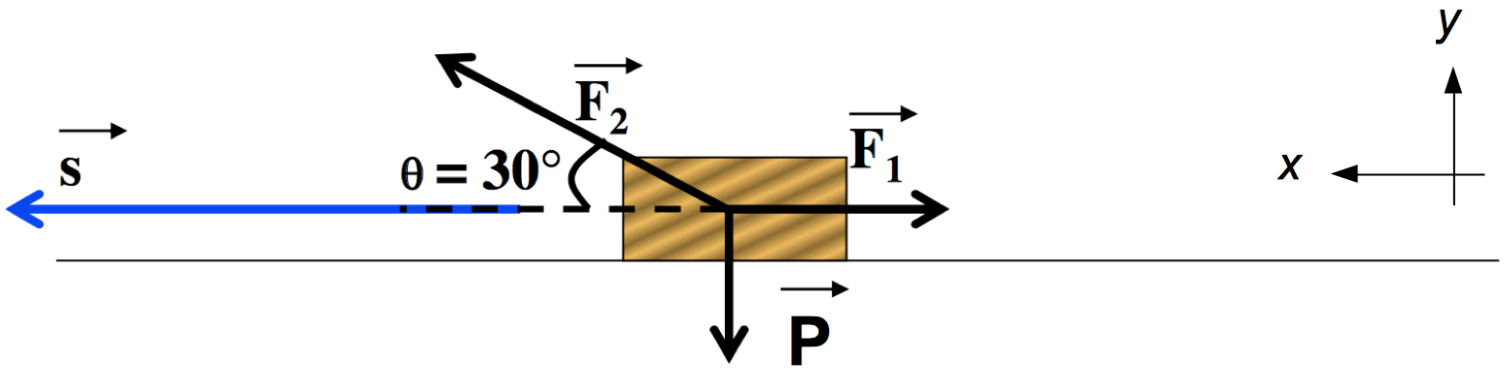
<u>teorema dell'energia cinetica</u>

Esercizio 1

Sulla definizione di **lavoro** in Fisica :

Un massa di peso 40 N è posto su un piano orizzontale liscio. Sul corpo agiscono due forze $\mathbf{F_1}$ *e* $\mathbf{F_2}$ *di intensità rispettivamente 20 N e 30 N come in figura. Determinare :*

- *il lavoro compiuto da ciascuna forza, compresa la forza peso, associato ad uno spostamento del corpo di 10 m.*
- *l'accelerazione a cui è soggetta la massa*



Ricordiamo la definizione di **lavoro** nel caso di una **forza costante** lungo uno spostamento $\mathbf{s}$:

$$\boxed{W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{F}|\,|\mathbf{s}|\,\cos\theta}$$

essendo θ l'angolo compreso tra i **vettori forza e spostamento**.

1) Lavoro della forza $\mathbf{F_1}$:

$$\boxed{\theta = 180^\circ} \;\rightarrow\; W_1 = 20\ \mathsf{N} \cdot 10\ \mathsf{m} \cdot \cos 180^\circ = 20\ \mathsf{N} \cdot 10\ \mathsf{m} \cdot (-1) = -200\ \mathsf{J}$$

2) Lavoro della forza $\mathbf{F_2}$:

$$\boxed{\theta = 30^\circ} \;\rightarrow\; W_2 = 30\ \mathsf{N} \cdot 10\ \mathsf{m} \cdot \cos 30^\circ = 30\ \mathsf{N} \cdot 10\ \mathsf{m} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 259.8\ \mathsf{J}$$

3) Lavoro della forza peso $\mathbf{P}$:

$$\boxed{\theta = -90^\circ} \;\rightarrow\; W_P = 40\ \mathsf{N} \cdot 10\ \mathsf{m} \cdot \cos(-90^\circ) = 0\ \mathsf{J}$$

Per calcolare l'accelerazione della massa applichiamo la **legge di Newton** nella forma :

$$\sum \mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$

- **scegliamo** un sistema di riferimento (x, y) e scriviamo tutte le forze **in <u>componenti</u>** :

$$\mathbf{P} = m\,\mathbf{g} = (0, -m\,g, 0) \quad \mathbf{F_1} = (-F_1, 0, 0) \quad \mathbf{F_2} = (F_2 \cos\theta, F_2 \sin\theta, 0)$$

- lungo **la verticale** la forza peso è bilanciata dalla reazione vincolare e dalla componente $F_2 \sin\theta$:

$$-m\,g + F_2 \sin\theta + N = 0$$

- lungo l'orizzontale il moto è uniformemente accelerato :

$$-F_1 + F_2 \cos\theta = m\,a = \left(\frac{P}{g}\right) a$$

$$\rightarrow \; a = \frac{(-F_1 + F_2 \cos\theta)\,g}{P} = \frac{(-20\ \mathrm{N} + 30\ \mathrm{N} \cos 30^\circ)\,9.81\ \mathrm{m/s^2}}{40\ \mathrm{N}} = 1.5\ \mathrm{m/s^2}$$

Esercizio 2

Sulla **conservazione dell'energia meccanica** :

Un blocco di 2 kg è inizialmente spinto contro una molla di costante elastica 500 N/m, accorciandola di 20 cm. Tolto il vincolo, la molla spinge il blocco lungo una rotaia orizzontale priva di attrito e poi su per un piano inclinato 45°, anch'esso privo di attrito. Determinare :

- *la velocità del blocco quando abbandona la molla*
- *l'altezza massima raggiunta dal blocco nel risalire il piano inclinato*
- *lo spazio percorso sul piano inclinato*

– energia **cinetica** del corpo in movimento :

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m\, v^2}$$

– energia potenziale **elastica** della molla :

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2} k\, x^2}$$

– energia potenziale **gravitazionale** :

$$\boxed{U_g = m\, g\, z}$$

– non essendoci attriti in gioco, tutte le forze sono **conservative**, quindi l'**energia meccanica si conserva**

$$E_m = E_k + U_e + U_g = \text{cost}$$

- per prima cosa **scegliamo un sistema di riferimento**, in questo caso (x, z)
- $z = 0$ rappresenta il piano orizzontale, per il quale scegliamo **zero** come potenziale gravitazionale di riferimento
- il blocco è inizialmente fermo, quindi non c'è energia cinetica, l'energia meccanica è solo energia elastica :

$$E_m = U_e = \frac{1}{2} k\, x^2$$

- quando il blocco si stacca dalla molla, tutta l'energia potenziale elastica immagazzinata nella molla **si trasforma** in energia cinetica :

$$E_m = \frac{1}{2} k\, x^2 = \frac{1}{2} m\, v^2$$

- da questa condizione ricaviamo subito la **velocità iniziale** del blocco (usiamo anche 20 cm = 0.2 m) :

$$v_{in} = \sqrt{\frac{k\, x^2}{m}} = x \sqrt{\frac{k}{m}} = (0.2 \text{ m/s}) \cdot \sqrt{\frac{500 \text{ N/m}}{2 \text{ kg}}} = \boxed{3.16 \text{ m/s}}$$

- il blocco sale poi lungo il piano inclinato **fino a fermarsi** raggiunta un'altezza h

- questo significa che tutta l'energia cinetica **si trasforma** in energia potenziale gravitazionale :

$$E_m = E_k = U_g \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} m\, v_{in}^2 = m\, g\, h \quad \rightarrow \quad h = \frac{v_{in}^2}{2\, g}$$

Numericamente:

$$h = \frac{(3.16 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2} = \boxed{0.51 \text{ m}}$$

- nota l'altezza raggiunta e l'angolo di inclinazione $\theta = 45°$ ricaviamo lo spazio percorso L lungo il piano con l'utilizzo della trigonometria :

$$\sin\theta = \frac{h}{L} \quad \text{con} \quad \sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; L = \frac{h}{\sin\theta} = h\,\frac{2}{\sqrt{2}} = \boxed{0.72 \text{ m}}$$

Osserviamo ancora che è possibile ottenere **lo stesso risultato** applicando **la legge di Newton** e la **cinematica** :

- la massa risale il piano inclinato sotto l'azione della forza peso che tende a rallentarla fino a fermarla
- scelto un sistema di coordinate (x, y) ortogonale al piano inclinato si va a scomporre la forza peso come già visto negli esercizi precedenti
- il moto **lungo il piano** determinato dalla legge di Newton e dalla scomposizione del vettore forza peso è quindi un moto **rettilineo uniformemente decelerato** con accelerazione

$$a = -g \, \sin\theta$$

- essendo un moto uniformemente accelerato (decelerato) possiamo applicare la legge che lega quadrati delle velocità iniziale/finale, spazio percorso e accelerazione

$$v_{fin}^2 - v_{in}^2 = 2\,a\,L = -2\,g\,\sin\theta\,L$$

- la massa alla fine si ferma, quindi

$$v_{fin} = 0 \quad \rightarrow \quad v_{in}^2 = 2\,g\,\sin\theta\,L = 2\,g\,h \quad \rightarrow \quad \boxed{h = \frac{v_{in}^2}{2\,g}}$$

Esercizio 3

Sul **moto verticale dei corpi** risolto con la conservazione dell'energia meccanica :

Una pallina di massa 50 g viene lanciata verso l'alto con velocità iniziale di 6 m/s. Trascurando l'attrito dell'aria, determinare l'altezza massima raggiunta. Quanto vale il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale nel fermare la pallina ?

Abbiamo già risolto un esercizio simile usando i risultati validi per il **moto uniformemente accelerato** :

- il moto verticale della pallina (assumiamo come riferimento un asse z verso l'alto) viene **frenato dall'accelerazione di gravità costante**

$$v(t) = v_0 - g\,t$$

- quando la palla raggiunge l'**altezza massima** la sua velocità finale è nulla

$$v_{fin} = 0$$

- per calcolare l'altezza massima raggiunta posso usare la relazione che lega velocità al quadrato e spazio percorso

$$v_{fin}^2 - v_{in}^2 = -2\,g\,(z_{fin} - z_{in})$$

$$v_{fin} = 0 \;\rightarrow\quad -v_{in}^2 = -2\,g\,h_{max} \;\rightarrow\; \boxed{h_{max} = \frac{v_{in}^2}{2\,g}}$$

Possiamo **ottenere lo stesso risultato** applicando la **conservazione dell'energia meccanica** :

$$\boxed{E_m = E_k + U_g = \text{cost}} \quad \rightarrow \quad E_{k,in} + U_{g,in} = E_{k,fin} + U_{g,fin}$$

Ricordando le espressioni per **energia cinetica** ed **energia potenziale gravitazionale** :

$$\frac{1}{2}\, m\, v_{in}^2 + m\, g\, z_{in} = \frac{1}{2}\, m\, v_{fin}^2 + m\, g\, z_{fin}$$

$$v_{fin} = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{2}\, m\, v_{in}^2 = m\, g\, (z_{fin} - z_{in}) = m\, g\, h_{max} \;\rightarrow\; \boxed{h_{max} = \frac{v_{in}^2}{2\, g}}$$

Numericamente:

$$h_{max} = \frac{(6\ \text{m/s})^2}{2 \cdot 9.81\ \text{m/s}^2} = 1.83\ \text{m}$$

Quanto vale **il lavoro** compiuto dalla forza gravitazionale nel fermare la pallina ?

$$m = 50 \text{ g} = 50 \times 10^{-3} \text{ kg} = 0.05 \text{ kg}$$

1) Applicando la **definizione di lavoro** :

$$\begin{aligned} W &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{s} = m\,\mathbf{g} \cdot \mathbf{s} = m\,g\,h_{max}\,\cos 180^\circ \\ &= (0.05 \text{ kg}) \cdot (9.81 \text{ m/s}^2) \cdot (1.83 \text{ m})(-1) = -0.9 \text{ J} \end{aligned}$$

2) Applicando il **teorema dell'energia cinetica (teorema delle forze vive)** :

$$\begin{aligned} W &= \Delta E_k = E_{k,fin} - E_{k,in} = \frac{1}{2}\,m\,(\cancel{v_{fin}^2} - v_{in}^2) = -\frac{1}{2}\,m\,v_{in}^2 \\ &= -0.5 \cdot 0.05 \text{ kg} \cdot (6 \text{ m/s})^2 = -0.9 \text{ J} \end{aligned}$$

3) Applicando la **conservatività della forza gravitazionale** :

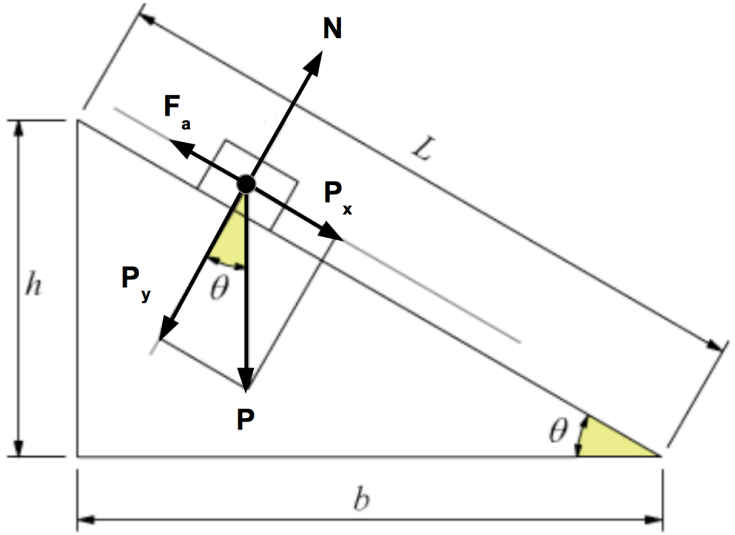
$$W = -\Delta U_g = -(U_{g,fin} - U_{g,in}) = -m\,g\,h_{max} = -0.9 \text{ J}$$

Esercizio 4

Sul lavoro fatto dalle **forze non conservative** :

Un bambino di massa 20 kg scende lungo uno scivolo approssimabile ad una piano inclinato di angolo 30°. Il coefficiente di attrito dinamico tra il bambino e lo scivolo è di 0.2. Se il bambino parte dalla sommità dello scivolo, posta ad altezza 2 m dal suolo, calcolare :

- *il lavoro compiuto dalla forza di attrito*
- *la velocità finale del bambino quando raggiunge il suolo*



Si tratta di un problema di **piano inclinato** in presenza di **forza di attrito** :

– noti **altezza** e **angolo di inclinazione** del piano inclinato possiamo calcolare la lunghezza dello scivolo :

$$\sin\theta = \frac{h}{L} \quad \rightarrow \quad L = \frac{h}{\sin\theta} = \frac{h}{\sin 30^\circ} = 2\,h = 4 \text{ m}$$

– scegliamo un sistema di riferimento cartesiano (x, y) che giace sul piano rispetto al quale **scomporre le forze in gioco**

– scomponiamo la forza peso $\mathbf{P} = m\,\mathbf{g}$ rispetto al sistema di riferimento scelto :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P_x} + \mathbf{P_y} \;\rightarrow\; \begin{cases} P_x = m\,g\,\sin\theta \\ \\ P_y = m\,g\,\cos\theta \end{cases}$$

– la componente P_y della forza peso è compensata dalla reazione vincolare del piano :

$$|\mathbf{N}| = P_y = m\,g\,\cos\theta$$

– la **forza di attrito** è determinata dalla reazione vincolare del piano e in modulo vale :

$$|\mathbf{F_a}| = \mu_d\,|\mathbf{N}| = \mu_d\,m\,g\,\cos\theta$$

– il **lavoro della forza di attrito** per uno spostamento L (tenuto conto che la forza di attrito **si oppone** al moto) è quindi :

$$\begin{aligned} W_a &= \mathbf{F_a}\cdot\mathbf{s} = (\mu_d\,m\,g\,\cos\theta)\,L\,\cos 180^\circ = -F_a\,L \\ &= -(0.2)\cdot(20\ \text{kg})\cdot(9.81\ \text{m/s}^2)\cdot(\cos 30^\circ)\cdot(4\ \text{m}) = \boxed{-136\ \text{J}} \end{aligned}$$

– come atteso il lavoro ottenuto è **negativo** in quanto la forza di attrito rallenta il moto (lavoro frenante)

- le forze di attrito sono **forze NON conservative**, "dissipano solo" energia
- a causa della presenza della forza di attrito (non conservativa) **NON possiamo** applicare la conservazione dell'energia meccanica totale !

$$E_m = E_k + U_g \neq \text{cost}$$

- MA ... il **teorema dell'energia cinetica (teorema delle forze vive)** resta sempre valido :

$$W = \Delta E_k = E_{k,fin} - E_{k,in}$$

- il **lavoro totale** è dato dalla somma del **lavoro dovuto alle forze conservative** e del **lavoro dovuto alle forze di attrito** :

$$W = W_c + W_a = \Delta E_k = E_{k,fin} - E_{k,in}$$

- d'altra parte il **lavoro dovuto alle forze conservative** è dato anche dalla **variazione di energia potenziale** :

$$W_c = -\Delta U = -(U_{fin} - U_{in})$$

Mettendo tutto insieme :

$$W = W_c + W_a = -\Delta U + W_a = \Delta E_k$$

$$\rightarrow \quad -(U_{fin} - U_{in}) + W_a = E_{k,fin} - E_{k,in}$$

$$W_a = (E_{k,fin} + U_{fin}) - (E_{k,in} + U_{in}) = E_{m,fin} - E_{m,in}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{W_a = \Delta E_m}$$

Il **lavoro delle forze NON conservative** è uguale alla **variazione dell'energia meccanica** !

Possiamo allora utilizzare questo **importante** risultato per calcolare la velocità finale raggiunta dal bambino al fondo dello scivolo :

$$\begin{aligned} W_a &= \Delta E_m = (E_{k,fin} + U_{fin}) - (E_{k,in} + U_{in}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\, m\, v_{fin}^2 + m\, g\, z_{fin}\right) - \left(\frac{1}{2}\, m\, v_{in}^2 + m\, g\, z_{in}\right) \end{aligned}$$

Scelto un asse z verso l'alto (l'energia potenziale gravitazionale aumenta con z), abbiamo le condizioni : $v_{in} = 0 \;\; , \; z_{in} = h \;\; , \; z_{fin} = 0$

$$\rightarrow \quad W_a = \frac{1}{2}\, m\, v_{fin}^2 - m\, g\, z_{in} = \frac{1}{2}\, m\, v_{fin}^2 - m\, g\, h$$

da cui ricaviamo la velocità finale v_{fin} :

$$v_{fin} = \sqrt{\frac{2(m\, g\, h + W_a)}{m}} = \sqrt{\frac{2\,(m\, g\, h - \mu_d\, m\, g\, \cos\theta\, L)}{m}} = \sqrt{\frac{2\, \cancel{m}\, g\,(h - \cos\theta\, L)}{\cancel{m}}}$$

Ricordando che $h = L\,\sin\theta$ l'algebra si può ancora semplificare :

$$v_{fin} = \sqrt{2\,g\,\left(\sin\theta\,L - \mu_d\,\cos\theta\,L\right)} = \sqrt{2\,g\,\left(\sin\theta - \mu_d\,\cos\theta\right)\,L}$$

Numericamente :

$$v_{fin} = \sqrt{2\,\cdot 9.81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 4\ \mathrm{m}\left(\frac{1}{2} - 0.2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \boxed{5.1\ \mathrm{m/s}}$$

Avremmo potuto arrivare allo stesso risultato anche applicando la legge di Newton e la cinematica del moto uniformemente accelerato :

- il bambino scende lungo il piano con accelerazione costante determinata dalla risultante delle forze lungo l'asse x

$$P_x - F_A = m\,a \quad \rightarrow \quad \cancel{m}\,g\,\sin\theta - \mu_d\,\cancel{m}\,g\,\cos\theta = \cancel{m}\,a$$

  da cui l'accelerazione

$$\boxed{a = g\,(\sin\theta - \mu_d\,\cos\,\theta\,)}$$

- nota l'accelerazione possiamo usare la solita legge del moto uniformemente accelerato che lega quadrati delle velocità, accelerazione e spazio percorso

$$v_{fin}^2 - \cancel{v_{in}^2} = 2\,a\,L = 2\,g\,(\sin\theta - \mu_d\,\cos\,\theta\,)\,L$$

$$\rightarrow \quad v_{fin} = \sqrt{2\,g\,(\sin\theta - \mu_d\,\cos\,\theta\,)\,L}$$

Vale la pena osservare ancora che l'espressione trovata per l'accelerazione

$$a = g\ (\sin\theta - \mu_d\ \cos\ \theta\ )$$

riproduce correttamente anche i **casi limiti** del problema :

- se il piano è **privo di attrito** ($\mu_d = 0$) ritrovo correttamente il risultato già ottenuto per un piano inclinato liscio

$$a = g\ \sin\theta$$

- se il piano è **completamente verticale** ($\theta = \pi/2$) il moto diventa in caduta libera e correttamente trovo

$$a = g$$

- il **segno meno nella formula** ci dice che la presenza dell'attrito riduce ulteriormente l'accelerazione dovuta alla forza peso

Esempio di tema d'esame

Fisica per Farmacia (STF0060)
Esame scritto
14 Ottobre 2020

Mandare l'esercizio risolto a : pacher@to.infn.it

Problema 1

Un carrello di massa 0.4 kg è inizialmente spinto contro una molla di costante elastica $k = 1000$ N/m, accorciandola di 8 cm. Tolto il vincolo, la molla spinge il carrello lungo una rotaia orizzontale priva di attrito e poi su un piano inclinato di 30 ° scabro con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 1/\sqrt{3}$. Determinare :

a) la quantità di moto del carrello appena prima di iniziare la risalita sul piano inclinato

b) l'altezza massima raggiunta dal carrello nel risalire il piano inclinato

c) il lavoro svolto dalla forza di attrito