Esercitazioni per il Corso di Fisica

Moto circolare, quantità di moto e urti

Prof. Luca Pacher

pacher@to.infn.it

Corso di Laurea in Farmacia

A.A. 2022/2023

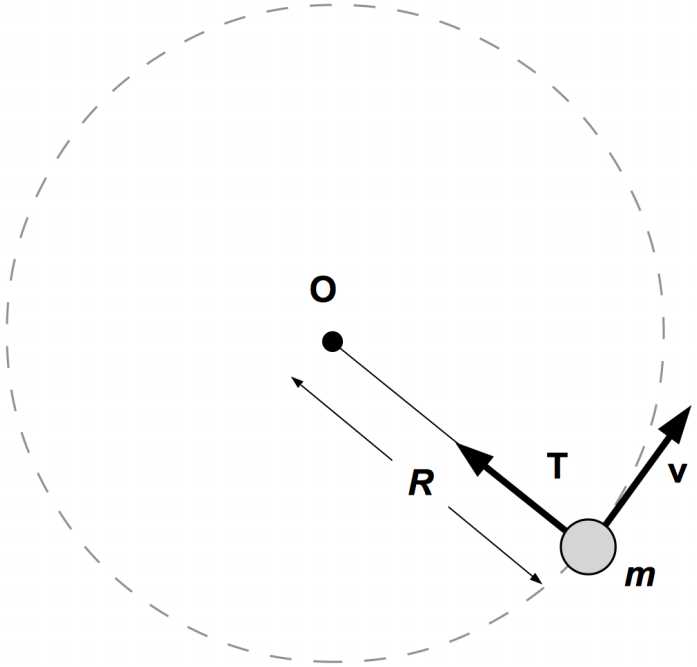
24/11/2022

Esercizio 1

Sul **moto circolare** :

Una massa di 1 kg è vincolata a muoversi su un piano orizzontale senza attrito, collegata ad un perno attraverso un filo inestensibile di massa trascurabile di lunghezza 40 cm. Supponendo che il moto sia circolare uniforme con modulo della velocità 5 m/s, determinare :

- *la velocità angolare del moto*
- *la tensione sul filo*



L'ipotesi è quella di avere un **moto circolare uniforme**, quindi :

- il moto avviene con **velocità angolare** ω costante (da determinare) e con **accelerazione angolare** α nulla :

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \text{cost.} \qquad \alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 0$$

- il moto è "uniforme" in termini di velocità angolare costante, ma rimane comunque per definizione un **moto accelerato** in quanto il **<u>vettore</u> velocità** è costante in modulo ma **<u>cambia continuamente direzione</u>**

- velocità angolare e **modulo** della velocità lineare (tangenziale) sono tra loro legati :

$$\boxed{v = \omega\, R}$$

- il **<u>vettore</u> accelerazione** ha due componenti, **accelerazione tangenziale** e **accelerazione normale (centripeta)** :

$$\boxed{a_T = \alpha\, R \qquad a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2\, R}$$

Dal testo del problema conosciamo

$$v = 5 \text{ m/s} \qquad R = 40 \text{ cm} = 0.4 \text{ m}$$

quindi :

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{5 \text{ m/s}}{0.4 \text{ m}} = \boxed{12.5 \text{ rad/s}}$$

D'altra parte è **il filo** che vincola il moto della massa ad essere circolare. Essendoci un'accelerazione (quella normale) si manifesta anche una **forza centripeta** che è proprio la **tensione del filo** :

$$T = m\, a_N = m\, \frac{v^2}{R} = m\, \omega^2\, R$$

Numericamente :

$$T = 1 \text{ kg} \cdot (12.5 \text{ rad/s})^2 \cdot 0.4 \text{ m} = \boxed{6.25 \text{ N}}$$

Esercizio 2

Sul **moto circolare** :

Un'automobile si muove a velocità costante 90 km/h. Ad un certo istante, visto un ostacolo, il guidatore frena e l'auto si ferma in 10 s. Trascurando il tempo di reazione del guidatore e sapendo che le ruote hanno diametro pari a 50 cm, determinare :

- *la velocità angolare e la frequenza di rotazione delle ruote prima della frenata*
- *la decelerazione angolare subita ad opera dei freni*
- *il numero di giri fatti dalle ruote prima di fermarsi*

– riportiamo tutti i dati nelle unità del Sistema Internazionale (SI) :

$$v_0 = 90 \text{ km/h} \;=\; \frac{90 \times 10^3 \text{ m}}{3600 \text{ s}} \;=\; 25 \text{ m/s} \qquad 2\,R = 50 \text{ cm} = 0.5 \text{ m}$$

– nota la **velocità iniziale** v_0 possiamo calcolare subito la **velocità angolare** iniziale ω_0 delle ruote :

$$v_0 \;=\; \omega_0\, R \;\;\rightarrow\;\; \omega_0 \;=\; \frac{v_0}{R} \;=\; \frac{25 \text{ m/s}}{(0.5/2) \text{ m}} \;=\; 100 \text{ rad/s}$$

– la **frequenza** di rotazione delle ruote si ottiene dalla velocità angolare :

$$\boxed{\omega \;=\; 2\pi f} \;\rightarrow\; f_0 \;=\; \frac{\omega_0}{2\pi} \;=\; \frac{100 \text{ rad/s}}{6.28 \text{ rad}} \;=\; 15.9 \text{ s}^{-1} \;=\; 15.9 \text{ Hz}$$

– sapendo che l'automobile **si ferma** in 10 s possiamo calcolare anche l'**accelerazione angolare** :

$$v_{fin} = 0 \;\rightarrow\; \omega_{fin} = 0 \;\rightarrow\; \alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{(0 - 100) \text{ rad/s}}{10 \text{ s}} = -10 \text{ rad/s}^2$$

Per calcolare il numero di giri delle ruote abbiamo invece bisogno di calcolare lo **spazio totale percorso** da esse attraverso la **legge oraria** del moto circolare :

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 + \omega_0\, t + \frac{1}{2}\,\alpha\, t^2}$$

Per risalire allo **spazio percorso** ricordiamo la definizione di radiante :

$$s(t) = R\;\theta(t) \;\;\rightarrow\;\; \boxed{s(t) = s_0 + v_0\, t + \frac{1}{2}\, a_{_T}\, t^2}$$

dove $a_{_T} = \alpha\, R$ è l'**accelerazione tangenziale**.

Osserviamo ancora che essendo l'accelerazione tangenziale costante e applicando la **definizione di accelerazione** (ricordando che $v_{fin=0}$ e supposto $t_0 = 0$) :

$$a_T = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{fin} - v_0}{t - t_0} = -\frac{v_0}{t} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} a_T \, t^2 = \frac{1}{2}(-v_0/t)\, t^2 = -\frac{1}{2} v_0 \, t$$

$$\rightarrow \quad s(t) = s_0 + v_0 \, t - \frac{1}{2} v_0 \, t = s_0 + \frac{1}{2} v_0 \, t$$

Lo **spazio percorso** in un tempo di 10 s è dato da :

$$\Delta s = s - s_0 = \cancel{s_0} + \frac{1}{2} v_0 \, t - \cancel{s_0} = 0.5 \cdot 25 \text{ m/s} \cdot 10 \text{ s} = 125 \text{ m}$$

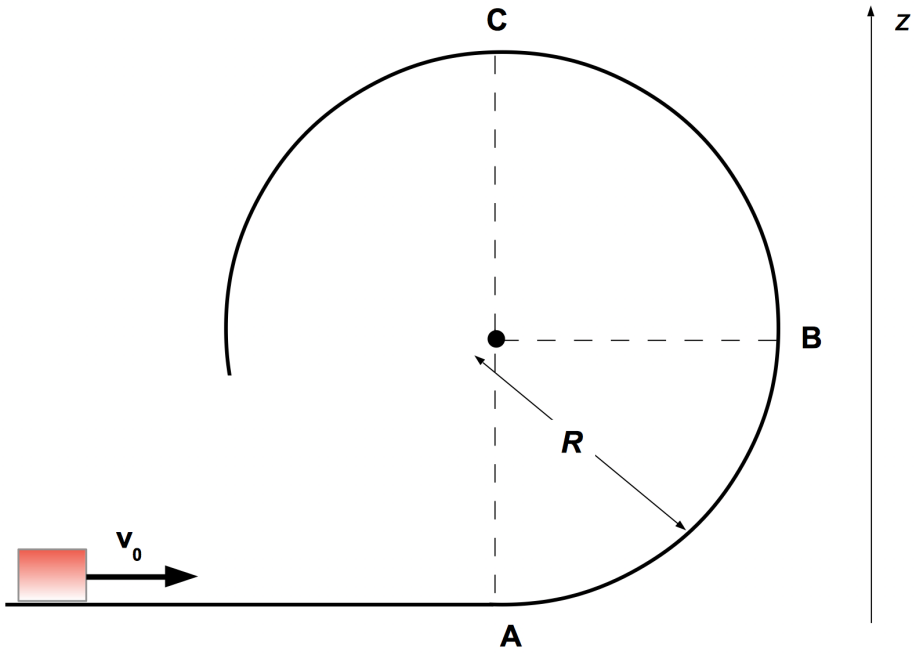
In **numero di giri** è allora dato dal rapporto tra lo spazio percorso in 10 s e la circonferenza delle ruote :

$$N = \frac{\Delta s}{2\pi R} = \frac{\Delta s}{\pi (2R)} = \frac{125 \text{ m/s}}{3.14 \cdot 0.5 \text{ m}} \approx 80$$

Esercizio 3

Il problema del **"giro della morte"** :

Un punto materiale di massa m si muove su una guida orizzontale liscia con velocità iniziale v_0. Quando passa nella posizione A esso inizia a salire lungo una guida circolare di raggio R, anch'essa senza attrito. Calcolare la velocità della massa e la reazione vincolare della guida nei punti B e C. Qual è il minimo valore della velocità iniziale v_0 affinchè la massa arrivi nel punto C mantenendo il contatto con la guida ?



– scegliamo come sistema di riferimento un asse z verticale verso l'alto

– dal momento che non ci sono attriti la velocità nei vari punti della guida può essere ricavata applicando la **conservazione dell'energia meccanica** :

$$\boxed{E_m = E_k + U_g = \text{cost.}}$$

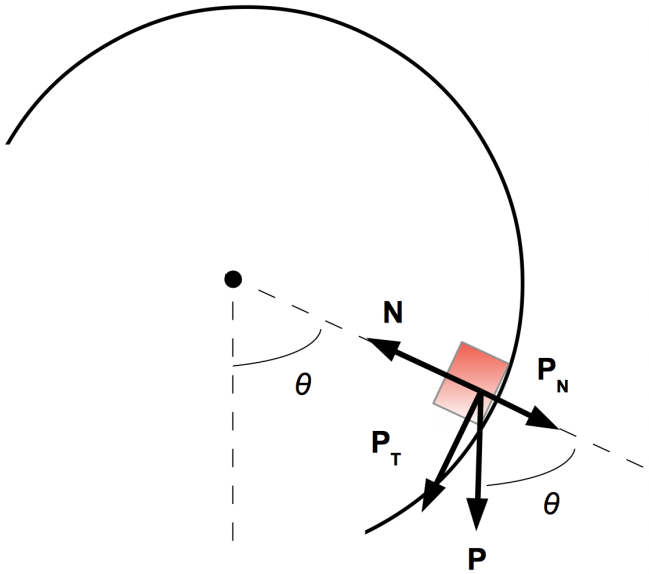
$$\frac{1}{2} m\, v_0^2 = \frac{1}{2} m\ v^2 + m\, g\, z \quad \rightarrow \quad v(z) = \sqrt{v_0^2 - 2\, g\, z}$$

Nel punto B :

$$z = R \quad \rightarrow \quad v_{_B} = \sqrt{v_0^2 - 2\, g\, R}$$

Nel punto C :

$$z = 2R \quad \rightarrow \quad v_{_C} = \sqrt{v_0^2 - 4\, g\, R}$$



– applichiamo la **legge di Newton** :

$$\sum \mathbf{F} = m\,\mathbf{a} \quad \rightarrow \quad \mathbf{N} + \mathbf{P} = m\,\mathbf{a}$$

– l'**accelerazione** (vettore) ha 2 componenti, **tangenziale + normale** (centripeta) :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a_T} + \mathbf{a_N}$$

– la **reazione vincolare** è determinata dalla risultante delle forze agenti sulla direzione normale, quindi passando alle componenti :

$$N - m\,g\,\cos\theta = m\,a_N = m\,\frac{v^2}{R}$$

La reazione è quindi massima nel punto A ($\theta = 0$), per poi decrescere con continuità fino al punto C ($\theta = \pi$) :

$$N(\theta) = m\,\frac{v^2}{R} + m\,g\,\cos\theta$$

Nel punto A ($\theta = 0$) :

$$v_{_A} = v_0 \quad \rightarrow \quad \boxed{N_{_A} = m\,\frac{v_0^2}{R} + m\,g}$$

Nel punto B ($\theta = \pi/2$) :

$$v_{_B} = \sqrt{v_0^2 - 2\,g\,R} \quad \rightarrow \quad \boxed{N_{_B} = m\,\frac{v_{_B}^2}{R} = m\left(\frac{v_0^2}{R} - 2\,g\right)}$$

Nel punto C ($\theta = \pi$)

$$v_{_C} = \sqrt{v_0^2 - 4\,g\,R} \quad \rightarrow \quad \boxed{N_{_C} = m\,\frac{v_{_C}^2}{R} - m\,g = m\left(\frac{v_0^2}{R} - 5\,g\right)}$$

Affinchè la massa "non si stacchi" mai dalla guida deve essere sempre :

$$N > 0$$

Da questa condizione ricaviamo allora la **velocità minima** iniziale che deve avere la massa per completare il giro della morte senza mai cadere :

$$N_C > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{v_0^2}{R} - 5\,g \;\; > 0$$

da cui

$$\boxed{v_{0,min} > \sqrt{5\,g\,R}}$$

Esercizio 4

Sulla **conservazione della quantità di moto** :

Un carrello di massa 300 g e velocità 1 m/s urta un carrello fermo di massa 500 g. Dopo l'urto il primo carrello continua a muoversi nella direzione iniziale con velocità 0.2 m/s. Determinare la velocità assunta dal carrello colpito.

– chiamiamo A e B i due carrelli e scriviamo le condizioni del problema :

$$m_A = 0.3 \text{ kg} \quad v_{A,in} = 1 \text{ m/s} \quad v_{A,fin} = 0.2 \text{ m/s}$$

$$m_B = 0.5 \text{ kg} \quad v_{B,in} = 0 \text{ m/s} \quad v_{B,fin} = ?$$

– ricordiamo la definizione di **quantità di moto** :

$$\boxed{\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}}$$

– essendo il sistema **isolato** (non ci sono forze esterne) possiamo applicare la **conservazione della quantità di moto totale** del sistema :

$$\boxed{\sum \mathbf{p}_{in} = \sum \mathbf{p}_{fin}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{p}_{A,in} + \mathbf{p}_{B,in} = \mathbf{p}_{A,fin} + \mathbf{p}_{B,fin}$$

Dal momento che tutti i vettori in gioco sono concordi possiamo scrivere una relazione tra i soli moduli :

$$p_{B,fin} = p_{A,in} + p_{B,in} - p_{A,fin} = m_A\, v_{A,in} + m_B\, v_{B,in} - m_A\, v_{A,fin}$$

Essendo il carrello B inizialmente fermo :

$$v_{B,in} = 0 \quad \rightarrow \quad m_B\, v_{B,fin} = m_A\, v_{A,in} - m_A\, v_{A,fin} = m_A\, \left(v_{A,in} - v_{A,fin}\right)$$

$$v_{B,fin} = \frac{m_A}{m_B}\, \left(v_{A,in} - v_{A,fin}\right)$$

Numericamente :

$$v_{B,fin} = \frac{0.3 \text{ kg}}{0.5 \text{ kg}}\, (1 - 0.2) \text{ m/s} = 0.48 \text{ m/s}$$