

Appunti di  
**COMPLEMENTI DI MECCANICA  
QUANTISTICA**  
Corso di Laurea Magistrale in Fisica  
Università degli Studi di Torino

Docente: Marco Regis

# Prefazione

Queste dispense ripercorrono quanto svolto a lezione durante l'insegnamento di *Complementi di Meccanica Quantistica*, che tengo dall'a.a. 2022/23. Per ampie parti si basano sulle note dei docenti degli anni precedenti. In particolare, sono in debito con Mauro Anselmino, Domenico Barbato e Marco Billò per aver condiviso il loro materiale con me. Ovviamente, la responsabilità di qualsiasi inesattezza possa essere presente è solo mia (e ringrazio anticipatamente gli studenti per tutte le segnalazioni che mi arriveranno).

Queste dispense sono scritte in forma di note, non di libro. Ciò significa che in alcuni passaggi vengono forniti forse eccessivi dettagli relativamente ai passaggi matematici, a scapito di ampiezza e profondità di discussione relativamente ai temi affrontati in maniera più discorsiva durante le lezioni. Inoltre, non vi sono riferimenti bibliografici nel testo. Per questi, come per una trattazione più dettagliata ed approfondita degli argomenti, si rimanda al libro consigliato per il corso:

- *Gauge Theories in Particle Physics*, volume 1, I.J.R. Aitchison, A.J.G. Hey, Graduate Student Series in Physics

# Contents

<b>1</b>	<b>Richiami iniziali</b>	<b>1</b>
1.1	Richiami di Meccanica Quantistica . . . . .	1
1.1.1	Perturbazioni dipendenti dal tempo . . . . .	4
1.1.2	Lo spin . . . . .	6
1.2	Richiami di Relatività Speciale . . . . .	8
1.2.1	Relatività Galileiana . . . . .	8
1.2.2	Postulati della Relatività Ristretta . . . . .	8
1.2.3	Trasformazioni relativistiche . . . . .	10
1.2.4	Formalismo tensoriale . . . . .	12
1.3	Richiami di Elettromagnetismo . . . . .	16
1.3.1	Equazioni di Maxwell . . . . .	16
1.3.2	Potenziali scalare e vettore . . . . .	16
1.3.3	Il gauge di Lorenz . . . . .	17
1.4	Formulazione covariante dell'elettro-magnetismo . . . . .	18
1.4.1	Onde elettromagnetiche . . . . .	19
1.4.2	Tensore di campo elettromagnetico . . . . .	20
1.4.3	Formule riassuntive . . . . .	24
1.5	Interazione di una particella carica con il campo e.m. . . . .	24
1.5.1	Il principio di gauge in M.Q. . . . .	28
<b>2</b>	<b>Meccanica quantistica relativistica</b>	<b>31</b>
2.1	Equazione di Klein-Gordon . . . . .	31
2.2	Equazione di Dirac . . . . .	34
2.2.1	Rappresentazioni esplicite dell'algebra di Clifford . . . . .	37
2.2.2	Covarianza relativistica e trasformazioni degli spinori di Dirac . . . . .	39
2.2.3	Lo spinore aggiunto . . . . .	43
2.2.4	Bilineari spinoriali . . . . .	44
2.2.5	Equazione di continuità per l'equazione di Dirac . . . . .	45
2.3	Soluzioni dell'equazione di Dirac . . . . .	46
2.4	Considerazioni fisiche sull'equazione di Dirac . . . . .	49
2.5	Interazione elettromagnetica per le equazioni relativistiche . . . . .	51

<b>3</b>	<b>Fondamenti di Teoria Quantistica dei Campi</b>	<b>54</b>
3.1	Formalismo di Lagrange-Hamilton in meccanica classica - dimensione finita	54
3.2	Formalismo di Lagrange-Hamilton in meccanica quantistica - dimensione finita . . . . .	56
3.3	Formalismo di Lagrange-Hamilton in teoria classica dei campi . . . . .	57
3.3.1	Simmetrie, correnti e cariche . . . . .	59
3.4	Il formalismo di Lagrange-Hamilton in teoria dei campi quantistica . . . . .	62
3.4.1	Il campo scalare reale di Klein-Gordon . . . . .	63
3.4.2	Il campo complesso di Klein-Gordon . . . . .	68
3.5	Il campo di Dirac . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Elementi di Elettrodinamica Quantistica</b>	<b>78</b>
4.1	Lagrangiana di QED per particelle con spin $1/2$ . . . . .	78
4.2	Lagrangiana di QED per particella con spin 0 . . . . .	81
4.3	Campo elettromagnetico e sua quantizzazione . . . . .	82
4.4	Hamiltoniana di interazione . . . . .	85
4.5	Rappresentazione di interazione . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Interazioni per particelle di spin 0</b>	<b>89</b>
5.1	Interazione elettromagnetica tra due particelle cariche di spin 0 . . . . .	93
5.2	Propagatore di una particella di spin 0 . . . . .	97
5.3	Sezione d'urto di un processo a due corpi . . . . .	99
5.4	Scattering elastico tra particelle scalari . . . . .	105
5.4.1	Sezione d'urto per lo scattering di Rutherford . . . . .	106
5.5	Sezione d'urto per i processi $\pi + \pi \rightarrow \pi + \pi$ . . . . .	107
5.6	Scattering Compton sui pioni ed invarianza di gauge . . . . .	110
5.7	Regole di Feynman: particelle di spin 0 . . . . .	114
<b>6</b>	<b>Interazioni per particelle di spin <math>\frac{1}{2}</math></b>	<b>116</b>
6.1	Scattering elastico $e^- + \pi \rightarrow e^- + \pi$ . . . . .	117
6.2	Scattering $e^+ \pi^+$ . . . . .	122
6.3	Propagatore dell'elettrone . . . . .	123
6.4	Regole di Feynman: particelle di spin $1/2$ . . . . .	125
6.5	Scattering Compton sugli elettroni . . . . .	126
6.6	Sezione d'urto per il processo $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$ . . . . .	129
<b>A</b>	<b>Unità naturali</b>	<b>132</b>
<b>B</b>	<b>Oscillatore armonico - metodo algebrico</b>	<b>135</b>
<b>C</b>	<b>Variabili di Mandelstam</b>	<b>139</b>
<b>D</b>	<b>Proprietà della traccia delle matrici <math>\gamma</math></b>	<b>141</b>

# Contents

# Chapter 1

## Richiami iniziali

Obiettivo primario di questo insegnamento è l'apprendimento dei fondamenti della Meccanica Quantistica Relativistica e della Teoria dei Campi. Verrà introdotta l'Elettrodinamica Quantistica e il punto d'approdo sarà il calcolo di sezioni d'urto nei processi di interazione elettromagnetica, al prim'ordine perturbativo. Si concluderà con brevi cenni sulla trattazione quantistica delle forze nucleari e sul contenuto del Modello Standard di fisica delle particelle.

Prima di affrontare tali argomenti è però necessario recuperare i concetti fondamentali alla base della Meccanica Quantistica non relativistica e della Relatività Ristretta. Esse rappresentano il nostro punto di partenza e si può dire che la loro combinazione sarà il cuore del corso.

### 1.1 Richiami di Meccanica Quantistica

Riprendiamo i concetti base della Meccanica Quantistica, fondamentali per le discussioni future:

**1** - Un sistema quantistico è descritto da uno stato  $|\psi\rangle$  che è un elemento dello spazio di Hilbert e può essere rappresentato usando diverse basi. Spesso lo stato di un sistema fisico è descritto attraverso una **funzione d'onda**  $\psi(q_i, s_\alpha; t)$ , la quale è in generale una funzione complessa dei gradi di libertà classici  $q_i$  del sistema (ad esempio, la posizione), del tempo  $t$  e di ogni altro grado di libertà addizionale "interno"  $s_\alpha$  (ad esempio, lo spin).

**2** - Le osservabili fisiche sono rappresentate da **operatori hermitiani** che agiscono sullo spazio degli stati. I più semplici esempi sono forniti dagli operatori posizione e impulso che, nello spazio delle posizioni, assumono la forma:

$$\hat{x}_i = x_i \quad ; \quad \hat{p}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}$$

e per i quali ricordiamo la relazione di commutazione fondamentale:

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_i] = i\hbar \delta_{ij}$$

**3** - Uno stato  $|\psi_n\rangle$ , rappresentabile tramite una funzione d'onda  $\psi_n(q; s; t)$  è *autostato* di un operatore  $\hat{\Omega}$  se

$$\hat{\Omega}|\psi_n\rangle = \omega_n |\psi_n\rangle , \quad (1.1)$$

dove l'*autovalore*  $\omega_n$  è in generale un numero complesso. Se l'operatore  $\hat{\Omega}$  è *hermitiano*, cioè se soddisfa  $\hat{\Omega}^\dagger = \hat{\Omega}$ , e può dunque corrispondere ad un'osservabile fisica, i suoi autovalori  $\omega_n$  sono *reali*. Inoltre l'insieme dei suoi autostati  $|\psi_n\rangle$  forma una base ortonormale (O.N.) completa:

$$\begin{cases} \langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm} & \text{(ortonormalità)} , \\ \sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| = \mathbf{1} & \text{(completezza)} . \end{cases} \quad (1.2)$$

Nel linguaggio delle funzioni d'onda, queste proprietà si riscrivono come

$$\begin{cases} (\psi_n, \psi_m) \equiv \int d^D x \psi_n^*(\vec{x}) \psi_m(\vec{x}) = \delta_{nm} , \\ \sum_n \psi_n(\vec{x}) \psi_n^*(\vec{y}) = \delta^D(\vec{x} - \vec{y}) , \end{cases} \quad (1.3)$$

per un sistema definito in  $D$  dimensioni spaziali.

Indicheremo a volte la misura di integrazione  $d^D x$  come  $dV$ . Il fatto che  $|\psi_n\rangle$  sia una sistema completo significa che ogni stato  $|\psi\rangle$  si può decomporre attraverso:

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle , \quad (1.4)$$

con  $c_n \in \mathbb{C}$ .

**4** - I possibili risultati di una *misura* dell'osservabile  $\hat{\Omega}$  sono i suoi autovalori  $\omega_n$ . Il *valor medio* di  $\hat{\Omega}$  in una serie di misure effettuate nel medesimo stato  $|\psi\rangle$ , rappresentato da una funzione d'onda  $\psi(x)$ , è

$$\langle \psi | \hat{\Omega} | \psi \rangle = \int d^D x \psi^*(\vec{x}) \hat{\Omega} \psi(\vec{x}) . \quad (1.5)$$

Lo stato  $|\psi\rangle$  è normalizzato, cioè si ha

$$1 = \langle \psi | \psi \rangle = \int d^D x |\psi(\vec{x})|^2 . \quad (1.6)$$

Possiamo calcolare il valor medio  $\langle \psi | \hat{\Omega} | \psi \rangle$  espandendo lo stato  $|\psi\rangle$  nella base degli autostati di  $\hat{\Omega}$ :

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{\Omega} | \psi \rangle &= \sum_{n,m} c_n^* c_m \langle \psi_n | \hat{\Omega} | \psi_m \rangle = \sum_{n,m} c_n^* c_m \omega_m \langle \psi_n | \psi_m \rangle \\ &= \sum_n |c_n|^2 \omega_n , \end{aligned} \quad (1.7)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la relazione di ortonormalità (1.2). Questo implica che  $|c_n|^2$  rappresenta la *probabilità* di ottenere il valore  $\omega_n$  effettuando una misura di  $\hat{\Omega}$  nello stato  $|\psi\rangle$ . Tale interpretazione si applica anche all'operatore di posizione e porta all'interpretazione della *funzione d'onda* come *ampiezza* di densità di *probabilità di posizione*:

$$\rho(\vec{x}) \equiv |\psi(\vec{x})|^2 = \text{densità di probabilità di posizione.} \quad (1.8)$$

Dalle definizioni di cui sopra risulta evidente che, in uno spazio tridimensionale, la funzione d'onda abbia dimensioni  $L^{-3/2}$ , mentre la densità di probabilità abbia dimensioni  $L^{-3}$ .

**5** - L'*evoluzione temporale* del sistema è determinata, nella formulazione tramite la funzione d'onda, dall'*equazione di Schrödinger*:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi . \quad (1.9)$$

Nel caso di una particella di massa  $m$  soggetta ad un potenziale  $\hat{U}(\vec{x})$ , quest'equazione assume la forma

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \hat{U}(\vec{x}) \right) \psi(\vec{x}, t) , \quad (1.10)$$

Possiamo cominciare ad intuire perchè questa equazione non sia relativistica: vi compaiono infatti derivate prime rispetto al tempo e seconde rispetto allo spazio, mentre in un'equazione relativistica le coordinate spazio-temporali vengono trattate tutte allo stesso modo.

**6** - Partendo dall'equazione di Schrödinger e definendo la densità di corrente di probabilità:

$$\vec{j} \equiv -\frac{i\hbar}{2m} \left( \psi^* \vec{\nabla} \psi - (\vec{\nabla} \psi^*) \psi \right) , \quad (1.11)$$

si ottiene l'*equazione di continuità* (verificare per esercizio o rivedere da MQ1):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 . \quad (1.12)$$

La versione finita di questa equazione, usando il teorema della divergenza, è

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} d\Sigma . \quad (1.13)$$

Considerando un volume  $V$  corrispondente a tutto lo spazio a disposizione del sistema il secondo membro si annulla, in quanto le  $\psi$  sono nulle al contorno e quindi lo è anche  $\vec{j}$ . Si ottiene così dal primo membro:

$$\frac{d}{dt} \int_V |\psi(\vec{x}; t)|^2 dV = 0 ,$$



ovvero, la probabilità totale è conservata (non vi può essere flusso di corrente di probabilità attraverso il bordo) e la probabilità è sempre normalizzata a 1 in tale spazio (come richiesto da una buona definizione di probabilità).

Notiamo anche che, in generale, quando vale l'equazione di continuità 1.12 (e la corrente al bordo è nulla), si può definire una carica  $Q = \int dV \rho$  che è conservata nel tempo,  $dQ/dt = 0$ .

### 1.1.1 Perturbazioni dipendenti dal tempo

Consideriamo un sistema la cui Hamiltoniana può essere scritta come

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{U}(t) , \quad (1.14)$$

dove  $\hat{H}_0$  è indipendente dal tempo e  $\hat{U}(t)$  rappresenta una piccola perturbazione. Supponiamo di conoscere lo spettro (cioè gli autovalori) e le autofunzioni di  $\hat{H}_0$ :

$$\hat{H}_0 u_n(\vec{x}) = E_n u_n(\vec{x}) . \quad (1.15)$$

Le autofunzioni  $u_n(\vec{x})$  corrispondono a soluzioni stazionarie  $\phi_n(\vec{x}, t)$  dell'equazione di Schrödinger imperturbata:

$$i\hbar \frac{\partial \phi_n}{\partial t} = \hat{H}_0 \phi_n , \quad (1.16)$$

con

$$\phi_n(\vec{x}, t) = u_n(\vec{x}) e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}} . \quad (1.17)$$

Notiamo che l'insieme delle funzioni  $\phi_n$  può essere scelta in modo da formare una base ortonormale completa. Cerchiamo ora di risolvere l'equazione di Schrödinger completa

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad (1.18)$$

con l'hamiltoniana  $\hat{H}$  definita in eq. (1.14). La funzione d'onda  $\psi(\vec{x}, t)$  può venire espansa nella base degli stati stazionari di  $\hat{H}_0$ ,  $\phi_n$ :

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_n a_n(t) \phi_n(\vec{x}, t) . \quad (1.19)$$

Otteniamo così

$$i\hbar \sum_n \frac{\partial}{\partial t} (a_n(t) \phi_n(\vec{x}, t)) = \sum_n a_n(t) (\hat{H}_0 + \hat{U}(t)) \phi_n(\vec{x}, t) \quad (1.20)$$

da cui, utilizzando la (1.16), segue

$$i\hbar \sum_n \frac{da_n}{dt} \phi_n = \sum_n a_n \hat{U} \phi_n . \quad (1.21)$$

Dividendo per  $i\hbar$  e prendendo il prodotto scalare con uno stato imperturbato  $\phi_m$  abbiamo

$$\sum_n \frac{da_n}{dt} (\phi_m, \phi_n) = \frac{1}{i\hbar} \sum_n a_n (\phi_m, \hat{U} \phi_n) \quad (1.22)$$

da cui, usando l'ortonormalità della base  $\phi_n$  ed esplicitando il prodotto scalare, otteniamo

$$\frac{da_m}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \sum_n a_n \int d^3x \phi_m^*(\vec{x}, t) \hat{U}(\vec{x}, t) \phi_n(\vec{x}, t) . \quad (1.23)$$

Questa è una formula esatta, che si può integrare formalmente rispetto al tempo ottenendo

$$a_m(t) - a_m(t_i) = \frac{1}{i\hbar} \sum_n \int_{t_i}^t dt' a_n(t') \int d^3x \phi_m^*(\vec{x}, t') \hat{U}(\vec{x}, t') \phi_n(\vec{x}, t') . \quad (1.24)$$

Supponiamo che lo stato al tempo iniziale  $t = t_i$  sia uno degli stati stazionari imperturbati:

$$\psi(\vec{x}, t_i) = \phi_i(\vec{x}, t_i) \quad \Leftrightarrow \quad a_n(t_i) = \delta_{ni} . \quad (1.25)$$

Supponiamo inoltre che  $\hat{U}(t)$  sia piccolo (rispetto all'energia dello stato iniziale). Allora anche  $a_n(t) - a_n(t_i)$  è piccolo e nel membro di destra della (1.24) possiamo rimpiazzare, al prim'ordine perturbativo,

$$a_n(t) \rightarrow a_n(t_i) = \delta_{ni} . \quad (1.26)$$

Consideriamo il tempo finale  $t = t_f$ , e usiamo l'indice  $f$  invece dell'indice  $m$ , assumendo che  $f \neq i$ . Dunque nel membro di sinistra della (1.24) abbiamo

$$a_f(t_f) - a_f(t_i) = a_f(t_f) . \quad (1.27)$$

Infatti  $f \neq i$  implica  $a_f(t_i) = 0$ , vedi la (1.25). Per definizione,  $a_f(t_f)$  è il coefficiente dello stato imperturbato  $\phi_f(\vec{x}, t)$  – autostato di  $\hat{H}_0$  con energia  $E_f$  – nell'espansione dello stato  $\psi(\vec{x}, t_f)$ . Esso rappresenta quindi l'ampiezza di probabilità che il sistema, inizialmente nello stato imperturbato  $\phi_i$ , sotto l'influsso della perturbazione  $\hat{U}(t)$  venga a trovarsi al tempo  $t_f$  nello stato  $\phi_f$ . Per tale ragione passiamo a denotarlo come

$$a_{fi}(t_f) . \quad (1.28)$$

Al prim'ordine perturbativo otteniamo dunque dalla (1.24) l'espressione dell'ampiezza  $a_{fi}$  come

$$a_{fi}(t_f) = \frac{1}{i\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt e^{i\frac{(E_f - E_i)}{\hbar}t} \int d^3x u_f^*(\vec{x}) \hat{U}(\vec{x}, t) u_i(\vec{x}) \quad (1.29)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \int dt e^{i\frac{E_f}{\hbar}t} \langle f | \hat{U} | i \rangle e^{-i\frac{E_i}{\hbar}t} , \quad (1.30)$$

dove abbiamo usato Eq. (1.17). Questa struttura ricorrerà anche nella trattazione perturbativa delle teorie di campo che considereremo più avanti (il fatto che sia presente un'integrazione in  $d^3x dt$  rende immediata la generalizzazione al caso relativistico).

Tipicamente considereremo situazioni in cui la perturbazione agisce per un tempo limitato, ovverossia in cui  $t_f - t_i$  è molto maggiore del tempo tipico in cui  $\hat{U}(t) \neq 0$ , e quindi possiamo utilizzare la trattazione di cui sopra in cui stati iniziale e finale sono imperturbati. In pratica prendiamo il limite in cui  $t_i \rightarrow -\infty$  e  $t_f \rightarrow \infty$ .

Analizziamo due importanti casi particolari.

- Perturbazione *indipendente dal tempo*. In tal caso l'integrale sul tempo nell'equazione (1.29) si riduce ad una rappresentazione della delta di Dirac:

$$\int dt e^{i\frac{(E_f - E_i)}{\hbar}t} = 2\pi\hbar \delta(E_f - E_i) \quad (1.31)$$

così che otteniamo

$$a_{fi} = \frac{2\pi}{i} \delta(E_f - E_i) \left( u_f, \hat{U} u_i \right) . \quad (1.32)$$

La transizione, dunque, può avvenire solo tra stati degeneri.

- Perturbazione *oscillante*. Supponiamo che il potenziale di perturbazione sia della forma

$$\hat{U}(\vec{x}, t) = U_0(\vec{x}) e^{-i\omega t} + U_0^\dagger(\vec{x}) e^{+i\omega t} . \quad (1.33)$$

In questo caso l'integrale sul tempo è dato da

$$\int dt e^{i\frac{(E_f - E_i \pm \hbar\omega)}{\hbar}t} = 2\pi\hbar \delta(E_f - E_i \pm \hbar\omega) . \quad (1.34)$$

Dunque l'energia dello stato finale può solo essere

$$E_f = E_i \mp \hbar\omega . \quad (1.35)$$

La transizione può dunque avvenire solo se tale condizione è compatibile con lo spettro delle energie  $E_n$ , e quindi solo per specifiche frequenze. Quando la transizione è possibile, il sistema

- *assorbe* un quanto di energia  $\hbar\omega$  se il fattore oscillante è del tipo  $\exp(-i\omega t)$ ;
- *emette* un quanto di energia  $\hbar\omega$  se il fattore oscillante è del tipo  $\exp(i\omega t)$ .

### 1.1.2 Lo spin

In M.Q. non relativistica lo spin è un numero quantico intrinseco, introdotto per spiegare l'effetto Zeeman anomalo e vari altri fenomeni. Esso fornisce agli stati un grado di libertà

discreto aggiuntivo. Nel caso di particelle di spin 1/2, come gli elettroni, l'operatore di spin è dato da:

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}, \quad (1.36)$$

dove

$$\sigma^x = \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

sono le matrici di Pauli. Le componenti dello spin soddisfano la stessa algebra del momento angolare (lo spin è anche chiamato momento angolare intrinseco):

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar \hat{S}_z, \quad \dots \text{ (ciclicamente) }, \quad (1.38)$$

che si può anche scrivere, utilizzando il simbolo di Levi-Civita  $\epsilon^{ijk}$ , completamente antisimmetrico e con  $\epsilon^{123} = 1$ , come

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar \epsilon^{ijk} \hat{S}_k. \quad (1.39)$$

[Per completezza ricordiamo anche l'espressione dell'operatore momento angolare orbitale in tre dimensioni:  $\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y$ ,  $\hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z$ ,  $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ .]

L'operatore di spin agisce su un fattore bi-dimensionale dello spazio degli stati, con vettori di base per i quali vengono usate varie notazioni:

$$|1\rangle = |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \chi_+; \quad |2\rangle = |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \chi_-. \quad (1.40)$$

Tali vettori di base sono autostati della terza componente dello spin,  $\hat{S}_z$ . Si ha infatti

$$\begin{aligned} \hat{S}_z |\uparrow\rangle &= \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle, \\ \hat{S}_z |\downarrow\rangle &= -\frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Un generico stato di spin (usando ora la notazione in termini di vettori bidimensionali) sarà

$$\chi = a_+ \chi_+ + a_- \chi_-, \quad (1.42)$$

con i coefficienti  $a_{\pm}$  che soddisfano la condizione di normalizzazione

$$|a_+|^2 + |a_-|^2 = 1. \quad (1.43)$$

Il grado di libertà di spin è superimposto agli altri (posizione, etc...). Ad esempio, per un elettrone nell'atomo di idrogeno la funzione d'onda prenderà la forma

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) \chi_{\pm}. \quad (1.44)$$

## 1.2 Richiami di Relatività Speciale

### 1.2.1 Relatività Galileiana

Il principio di relatività della meccanica classica consiste nell'assumere che le leggi della meccanica abbiano la stessa forma per tutti gli osservatori inerziali. Siccome la legge fondamentale della dinamica,  $m\vec{a} = \vec{F}$  per una particella, coinvolge le accelerazioni, le trasformazioni di coordinate che le lasciano invariate sono le seguenti.

- Traslazioni temporali (1 parametro). Corrispondono alla relazione tra i sistemi di riferimento di due osservatori che scelgono diverse origini per l'asse dei tempi.
- Traslazioni spaziali (3 parametri). Mettono in relazione due osservatori che scelgono diverse origini spaziali.
- Rotazioni spaziali (3 parametri). Collegano le coordinate scelte da osservatori che differiscono per una rotazione rigida degli assi spaziali prescelti.
- Trasformazioni di Galileo (3 parametri):

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}_r t, \quad (1.45)$$

dove  $\vec{v}_r$  è la velocità relativa, costante, tra i due osservatori. Da questa relazione segue la legge di composizione delle velocità:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_r, \quad (1.46)$$

mentre le due accelerazioni coincidono:  $\vec{a}' = \vec{a}$ . Queste trasformazioni lasciano dunque invariata la legge fondamentale della dinamica classica.

Si può facilmente vedere che queste trasformazioni formano un gruppo<sup>1</sup>, detto gruppo di Galileo, che ha 10 parametri e rappresenta il gruppo di invarianza della meccanica classica.

### 1.2.2 Postulati della Relatività Ristretta

La relatività galileiana viene rivisitata da Einstein, assumendo due postulati:

**1 - Principio di relatività (ristretta):** tutte le leggi fisiche, e non solo quelle della meccanica classica, devono avere la stessa forma per tutti gli osservatori inerziali (cioè in tutti i sistemi di riferimento che si muovono l'uno rispetto all'altro di moto rettilineo uniforme).

**2 - Costanza della velocità della luce:** la velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore  $c = 2.9979 \times 10^8$  m/s in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

---

<sup>1</sup>Brevemente, un gruppo è un insieme dotato di un'operazione binaria (legge di composizione) tale che: a) vale la proprietà associativa, b) esiste un elemento neutro e c) per ogni elemento esiste l'inverso.

Le trasformazioni di Galileo sono chiaramente incompatibili con l'assunzione della costanza della velocità della luce.

**L'invariante relativistico** Perché i due assunti siano compatibili, è necessario che le trasformazioni tra osservatori in moto relativo uniforme siano modificate rispetto a quelle di Galileo, date in eq. (1.45). Consideriamo due "eventi", cioè due punti dello spazio tempo che hanno coordinate  $(t, \vec{x})$  e  $(t + dt, \vec{x} + d\vec{x})$  secondo un osservatore inerziale  $O$ . La modifica dev'essere tale che la quantità

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 \quad (1.47)$$

rimanga invariata per qualsiasi altro osservatore inerziale. In particolare, per un raggio luminoso qualsiasi osservatore inerziale ha  $ds^2 = 0$ , perchè ciò gli attribuisce la velocità  $|d\vec{x}|/dt = c$ .

**Notazione quadri-dimensionale** Introduciamo la coordinata  $x^0 = ct$ , che ha le dimensioni di una lunghezza, e consideriamo il quadrivettore colonna  $x$  di componenti  $x^\mu$ , con  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Analogamente indichiamo come  $dx$  il vettore colonna di componenti  $dx^\mu$ . Introduciamo inoltre la matrice

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.48)$$

Gli elementi di questa matrice, che indichiamo come  $\eta_{\mu\nu}$  con  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ , sono noti come "tensore metrico" o semplicemente "metrica" di Minkowski. Esplicitamente,  $\eta_{00} = 1$ ,  $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$ , mentre tutte le altre componenti sono nulle. L'invariante  $ds^2$  si può ora riscrivere in termini matriciali come

$$ds^2 = dx^T \eta dx. \quad (1.49)$$

In componenti, questo viene riscritto usualmente, impiegando la convenzione di Einstein sugli indici ripetuti per esprimere il prodotto matriciale, come

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.50)$$

Infatti, effettuando i prodotti matriciali, si ha facilmente

$$\begin{aligned} dx^T \eta dx &= (dx^0 \ dx^1 \ dx^2 \ dx^3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} \\ &= (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = ds^2. \end{aligned} \quad (1.51)$$

### 1.2.3 Trasformazioni relativistiche

Le simmetrie spazio-temporali della meccanica e dell'elettromagnetismo corrispondono dunque alle trasformazioni che preservano l'invariante relativistico  $ds^2$ , cioè alle trasformazioni che formano il gruppo di invarianza della metrica di Minkowski  $\eta$ , detto *gruppo di Poincaré*, il quale contiene due sottogruppi, il gruppo delle traslazioni spazio-temporali e il cosiddetto gruppo di Lorentz. Il gruppo di Poincaré è l'analogo relativistico del gruppo di Galileo.

**Traslazioni spazio-temporali** Tra le trasformazioni che lasciano invariato  $ds^2$  vi sono ovviamente le traslazioni spazio-temporali

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} , \quad (1.52)$$

che dipendono da 4 parametri reali  $a^{\mu}$ ; le differenze infinitesime infatti non cambiano in tal caso, e si ha  $dx'^{\mu} = dx^{\mu}$ , come già visto nel caso Galileiano.

**Trasformazioni di Lorentz** Consideriamo ora trasformazioni lineari omogenee

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} , \quad (1.53)$$

ovverosia, in notazione matriciale  $x' = \Lambda x$ . Sotto queste trasformazioni si ha

$$ds'^2 = dx'^T \eta dx' = dx^T \Lambda^T \eta \Lambda dx , \quad (1.54)$$

che è uguale a  $ds^2$  se la matrice  $\Lambda$  soddisfa la condizione

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta , \quad (1.55)$$

cioè se preserva il tensore metrico. Si può vedere che tali matrici hanno 6 componenti indipendenti (in  $3 + 1$  dimensioni spazio-temporali). Tre di questi parametri possono essere scelti come gli angoli che parametrizzano le *rotazioni spaziali*, che già facevano parte delle invarianze Galileiane; gli altri tre sono collegate alle trasformazioni dette "*boosts*".

Le rotazioni spaziali sono date da  $t' = t$ ,  $\vec{x}' = R\vec{x}$  dove  $R$  è una matrice  $3 \times 3$  ortogonale,  $R^T R = \mathbf{1}$ , che dipende da 3 parametri angolari. In questo caso la matrice  $\Lambda$  ha la forma diagonale a blocchi

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R \end{pmatrix} . \quad (1.56)$$

I boost invece rimpiazzano le trasformazioni di Galileo tra osservatori inerziali in moto relativo uniforme e dipendono dalle tre componenti della velocità relativa. Esse agiscono non banalmente sul tempo e su una o più delle coordinate spaziali. Le trasformazioni

che collegano le coordinate usate da due osservatori in moto relativo uniforme con velocità  $v$  lungo, per esempio, l'asse  $x \equiv x^1$  sono descritte dalla matrice di Lorentz

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.57)$$

e hanno dunque la forma

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1), \\ x'^1 &= \gamma(-\beta x^0 + x^1), \\ x'^2 &= x^2, \\ x'^3 &= x^3, \end{aligned} \quad (1.58)$$

dove

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.59)$$

Il termine  $\gamma$  è anche detto **fattore di Lorentz**.

Tutte le leggi della fisica che sono valide in un sistema di riferimento inerziale devono essere invarianti rispetto alle equazioni di trasformazione sopra introdotte, le quali presentano alcune interessanti caratteristiche.

- Innanzitutto sono riconducibili alle trasformazioni di Galileo (1.45) nel limite  $v/c \rightarrow 0$ ; la relatività galileiana è dunque inclusa nella relatività ristretta come caso particolare.
- È immediato vedere come  $\gamma$ , e di conseguenza  $x'$  e  $t'$ , tendano all'infinito per  $v \rightarrow c$ , cioè non è possibile avere sistemi di riferimento in moto reciproco con velocità superiore a  $c$ .
- La coordinata spaziale  $x$  compare nella legge di trasformazione di  $t$ . Da questo segue la relatività della simultaneità degli eventi, ovvero se due eventi hanno coordinate  $(\vec{x}_1, t_1), (\vec{x}_2, t_2)$  gli istanti a cui saranno osservati da un osservatore  $\mathcal{C}'$ :

$$\begin{aligned} t_1' &= \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1\right) \\ t_2' &= \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2\right) \end{aligned}$$

non coincideranno anche se  $t_1 = t_2$ .

- Le trasformazioni di Lorentz non sono singolari (esiste cioè la trasformazione inversa ottenibile ponendo  $v \rightarrow -v$ ) e formano un gruppo (in quanto la successione di due trasformazioni di Lorentz è ancora una trasformazione di Lorentz).



**Trasformazioni discrete**

Vi sono delle trasformazioni isolate, cioè non dipendenti da parametri continui, che in modo ovvio preservano l'invariante  $ds^2$ , quadratico sia in  $dt$  che in  $d\vec{x}$ . Tra di esse vi è la parità temporale

$$T : x^0 \rightarrow -x^0 , \quad (1.60)$$

rappresentata dalla matrice

$$\Lambda_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\eta , \quad (1.61)$$

che ovviamente soddisfa la condizione (1.55). Similmente vi è la parità spaziale

$$P : \vec{x} \rightarrow -\vec{x} , \quad (1.62)$$

rappresentata dalla matrice

$$\Lambda_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta . \quad (1.63)$$

ed ovviamente la composizione delle due, ovvero sia la parità su tutte le coordinate:

$$PT : x^\mu \rightarrow -x^\mu , \quad (1.64)$$

rappresentata dalla matrice

$$\Lambda_{PT} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{1} . \quad (1.65)$$

Le trasformazioni di Lorentz che si ottengono componendo tali trasformazioni discrete con gli elementi del gruppo ristretto (rotazioni e boost) formano il gruppo di Lorentz  $O(1,3)$ . Aggiungendo le traslazioni si ha il gruppo di Poincaré.

**1.2.4 Formalismo tensoriale**

Le leggi fondamentali della meccanica e dell'elettromagnetismo devono essere invarianti sotto il gruppo di Poincaré, e in particolare sotto il gruppo di Lorentz. Per poter descrivere le teorie fisiche e le loro equazioni è necessario organizzarne gli elementi in oggetti che hanno ben definite proprietà di trasformazione sotto il gruppo di Lorentz, a partire dai quali si possono formare quantità invarianti seguendo delle semplici regole. Il formalismo tensoriale è dunque utile a distinguere le proprietà geometriche e fisiche intrinseche del sistema fisico da quelle che semplicemente dipendono dalle coordinate.

**Quadrivettori controvarianti** La quantità  $a^\mu$  che si trasformano come  $x^\mu$  (e quindi come  $dx^\mu$ ) sono dette quadri-vettori controvarianti; per essi usiamo anche la notazione matriciale  $a$  per indicare il vettore colonna di componenti  $a^\mu$ . Sotto trasformazioni di Lorentz si ha dunque

$$a^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu a^\nu, \quad (1.66)$$

cioè, in notazione matriciale,

$$a \rightarrow \Lambda a. \quad (1.67)$$

**Esempio: la quadrivelocità** Il tempo proprio  $\tau$  è definito attraverso  $ds^2 = c^2 d\tau^2$  (corrispondente ad una particella a riposo, per cui  $d\vec{x} = 0$ ). Dalla definizione, vediamo che  $d\tau$  è un invariante relativistico. Se lo utilizziamo per parametrizzare la traiettoria di una particella, in un qualsiasi S.R. inerziale con coordinate  $x^\mu$ , come  $x^\mu(\tau)$ , la “velocità” rispetto al tempo proprio

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (1.68)$$

si trasforma esattamente come  $x^\mu$  sotto una trasformazione del gruppo di Lorentz:

$$u^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu u^\nu. \quad (1.69)$$

**Quadrivettori covarianti** Gli operatori di derivazione rispetto a  $x^\mu$ , cioè  $\partial/\partial x^\mu$  – spesso indicati come  $\hat{\partial}_\mu$  – si trasformano in modo inverso a  $dx^\mu$ . Questo lo si può vedere applicandoli ad una funzione scalare delle coordinate  $f(x)$ . La funzione trasformata  $f'$  dev'essere tale che  $f'(x') = f(x)$ . Dunque si ha

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial f'(x')}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial f(x)}{\partial x^\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \frac{\partial f(x)}{\partial x^\nu}. \quad (1.70)$$

Gli oggetti  $b_\mu$  che si trasformano come  $\hat{\partial}_\mu$  sono detti quadri-vettori covarianti. Useremo la notazione  $\underline{b}$  per indicare il vettore colonna di componenti  $b_\mu$ . Sotto trasformazioni di Lorentz abbiamo dunque

$$b_\mu \rightarrow b_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu, \quad (1.71)$$

cioè, in notazione matriciale,

$$\underline{b} \rightarrow (\Lambda^{-1})^T \underline{b}. \quad (1.72)$$

**Esempio: il quadrimpulso** Per una particella, la convenzione qui usata è tale che nel S.R. di riposo il quadrimpulso si riduce a

$$p_\mu \rightarrow (mc, \vec{0}). \quad (1.73)$$

In un S.R. collegato a quello a riposo da un boost di parametro  $+\vec{v}$ , esso diventa, usando la (1.71) e la forma esplicita dei boosts (1.58),

$$p_\mu = (\gamma mc, -\gamma m\vec{v}) \equiv (E/c, -\vec{p}) . \quad (1.74)$$

Nel limite non-relativistico, in cui  $v/c \ll 1$  si ha

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \sim 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \quad (1.75)$$

per cui l'energia relativistica  $E = p_0 c$  diventa

$$E = \gamma mc^2 \sim mc^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) = mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 + \dots \quad (1.76)$$

ovvero l'energia cinetica più la celeberrima energia di riposo  $mc^2$ . Le componenti spaziali dell'impulso relativistico si riducono a

$$\vec{p} = \gamma m\vec{v} \sim m\vec{v} + \dots . \quad (1.77)$$

**Tensori** In generale, vi sono quantità tensoriali

$$W^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} \quad (1.78)$$

che si trasformano indipendentemente come vettori controvarianti per ogni indice alto e come vettori covarianti per ogni indice basso.

**Alzare e abbassare gli indici** Ad ogni vettore controvariante  $a^\mu$  possiamo associare un vettore covariante ottenuto abbassando gli indici con la metrica:

$$a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu , \quad \text{cioè} \quad \underline{a} = \eta a . \quad (1.79)$$

Infatti questo oggetto si trasforma come segue<sup>2</sup>:

$$\underline{a} = \eta a \rightarrow \eta \Lambda a = (\Lambda^{-1})^T \eta a = (\Lambda^{-1})^T \underline{a} , \quad (1.81)$$

cioè proprio come un vettore covariante.

Similmente si possono “alzare gli indici” utilizzando la metrica inversa  $\eta^{\mu\nu}$  (questa è la notazione usata per gli elementi della matrice  $\eta^{-1}$ , che nel caso della metrica di Minkowski (1.48) coincide con  $\eta$ ).

---

<sup>2</sup>La proprietà fondamentale delle trasformazioni di Lorentz, eq. (1.55), può essere riscritta come

$$\eta \Lambda = (\Lambda^{-1})^T \eta . \quad (1.80)$$

**Invarianti formati tramite contrazioni** Dati un vettore controvariante  $a$  ed un vettore covariante  $\underline{b}$  il loro prodotto scalare

$$a^T \underline{b} = a^\mu b_\mu = a \cdot b \quad (1.82)$$

è invariante sotto le trasformazioni di Lorentz. Infatti, usando le (1.72,1.67),

$$a^T \underline{b} \rightarrow a^T \Lambda^T (\Lambda^{-1})^T \underline{b} = a^T \underline{b} . \quad (1.83)$$

Dati due vettori controvarianti  $a^\mu$  e  $b^\mu$  si può dunque formare l'invariante

$$a^\mu \eta_{\mu\nu} b^\nu = a^\mu b_\mu . \quad (1.84)$$

In effetti, l'invariante relativistico fondamentale  $ds^2$  è proprio di questo tipo:

$$ds^2 = dx^\mu \eta_{\mu\nu} dx^\nu . \quad (1.85)$$

Similmente, dati due vettori controvarianti  $c_\mu$  e  $d_\mu$  si può costruire l'invariante  $c_\mu \eta^{\mu\nu} d_\nu = c_\mu d^\mu$ .

Se i due vettori coincidono questo invariante è la norma quadra  $a^2 \equiv a^\mu a_\mu = a^T \underline{a}$ .

**Esempio 1: norma quadra del quadrimpulso**

$$p^2 = p_\mu p^\mu = p_\mu \eta^{\mu\nu} p_\nu = (p_0)^2 - (\vec{p})^2 = \frac{E^2}{c^2} - (\vec{p})^2 . \quad (1.86)$$

Essendo un invariante, ha lo stesso valore in ogni S.R.I., e in particolare nel S.R. a riposo in cui  $p'_\mu = (mc, \vec{0})$ . Dunque

$$p^2 = (p')^2 = m^2 c^2 . \quad (1.87)$$

Dal confronto delle due equazioni precedenti segue la **relazione di mass-shell**

$$E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2 . \quad (1.88)$$

**Esempio 2: D'Alembertiano** È scalare sotto Lorentz anche l'operatore differenziale delle equazione delle onde con velocità  $c$

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu &= \partial_\mu \eta^{\mu\nu} \partial_\nu = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\vec{\nabla})^2 \equiv \square . \end{aligned} \quad (1.89)$$

cioè l'operatore di D'Alembert.

Per concludere la sezione, abbiamo dunque capito che equazioni tensoriali del tipo:

$$A^{\mu\nu} = B^{\mu\nu} \quad (1.90)$$

sono **equazioni covarianti**, cioè hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Infatti l'azione di una trasformazione di Lorentz agisce allo stesso modo su entrambi i membri e pertanto l'uguaglianza è mantenuta. Tutte le leggi fisiche possono allora essere scritte nel formalismo tensoriale, cosa che ne garantisce la validità in tutti i sistemi di riferimento inerziali come richiesto dal principio di relatività. Tale formalismo permette immediatamente di riconoscere se una relazione tra grandezze può rappresentare una legge fisica.

## 1.3 Richiami di Elettromagnetismo

### 1.3.1 Equazioni di Maxwell

Nella teoria classica dell'elettromagnetismo le relazioni tra campo elettrico  $\vec{E}(\vec{x}, t)$ , campo magnetico  $\vec{B}(\vec{x}, t)$ , densità di carica  $\rho(\vec{x}, t)$  e densità di corrente di carica  $\vec{j}(\vec{x}, t)$  sono espresse dalle **equazioni di Maxwell**, qui riportate in forma differenziale:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad (1.91)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.92)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.93)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.94)$$

Notare che sono state utilizzate le unità di Heaviside-Lorentz<sup>3</sup>, per le quali  $[E] = [B]$ .

### 1.3.2 Potenziali scalare e vettore

I campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  hanno in totale sei componenti. Possiamo ridurre i gradi di libertà a quattro, utilizzando le due equazioni omogenee, Eqs. 1.92 e 1.93. Le quattro quantità indipendenti vengono solitamente organizzate attraverso un **potenziale scalare**  $V$  ed un **potenziale vettore**  $\vec{A}$ , definiti mediante:

$$\begin{cases} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.95)$$

---

<sup>3</sup>Il sistema di Heaviside-Lorentz consiste nel normalizzare  $\epsilon_0 = 1$ , ovvero nel riassorbire un fattore  $\sqrt{\epsilon_0}$  nella definizione della carica elettrica. Ricordando che  $\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 1/c$ , nelle unità di Heaviside-Lorentz si ha inoltre  $\sqrt{\mu_0} = 1/c$ , quindi nelle equazioni di Maxwell l'unica costante che compare è la velocità della luce  $c$ .

Verifichiamo che ciò soddisfa automaticamente Eqs. 1.92 e 1.93:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V) - \frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

Ricordando l'operatore d'Alambertiano

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2,$$

riscriviamo le altre due equazioni di Maxwell, Eqs. 1.91 e 1.94, in funzione dei potenziali:

$$\begin{cases} \square V - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = \rho \\ \square \vec{A} + \vec{\nabla} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = \frac{1}{c} \vec{j} \end{cases} \quad (1.96)$$

Abbiamo utilizzato  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -(\vec{\nabla})^2 \vec{A} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$ . L'insieme delle (1.95) e (1.96) sono note come **equazioni di Maxwell per i potenziali**.

### 1.3.3 Il gauge di Lorenz

I potenziali  $V$  e  $\vec{A}$  non sono definiti in modo univoco dalla relazione con  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  appena introdotta. Infatti, scelta una generica funzione  $\chi(\vec{x}, t)$ , i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  non cambiano sotto la seguente **trasformazione di gauge**:

$$\begin{cases} V \longrightarrow V' = V - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ \vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi \end{cases} \quad (1.97)$$

Verifichiamolo:

$$\begin{aligned}\vec{B}' &= \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} \chi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \\ \vec{E}' &= -\vec{\nabla} V' - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla} \left( V - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \vec{\nabla} \chi) = -\vec{\nabla} V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}\end{aligned}$$

Possiamo sfruttare questa **libertà di gauge** fissando la funzione  $\chi(\vec{x}, t)$  in modo da semplificare le equazioni di Maxwell non omogenee (1.96). Una diffusa e comoda scelta è rappresentata dal **gauge di Lorenz**:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (1.98)$$

sotto il quale le Eqs.(1.96) cessano di essere accoppiate e assumono la forma:

$$\begin{cases} \square V = \rho \\ \square \vec{A} = \frac{1}{c} \vec{j} \end{cases} \quad (1.99)$$

Vediamo ora qual come ottenere  $\chi(\vec{x}, t)$  per soddisfare il gauge di Lorenz. Partiamo da potenziali qualsiasi  $V$  ed  $\vec{A}$ , che **non** soddisfano tale condizione, con una trasformazione di gauge 1.97 otteniamo dei potenziali  $V'$  ed  $\vec{A}'$  tali che

$$0 = \frac{1}{c} \frac{\partial V'}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( V - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla} \chi) = \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \square \chi \quad (1.100)$$

È dunque sufficiente scegliere  $\chi$  tale che

$$\square \chi = \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}. \quad (1.101)$$

È importante anche notare che la condizione di Lorenz fissa solo parzialmente il gauge, cioè non esaurisce completamente la libertà di gauge espressa in (1.97). Infatti operando un'ulteriore trasformazione dove ora vale  $\square \chi = 0$ , si vede chiaramente dai risultati in Eq. 1.100 che la condizione di Lorenz in Eq. (1.98) resta valida.

## 1.4 Formulazione covariante dell'elettro-magnetismo

A differenza delle leggi della meccanica classica, le equazioni di Maxwell possono essere direttamente scritte in forma covariante, senza dover essere modificate.

Definiamo il quadripotenziale come un vettore covariante

$$A_\mu = (-V, \vec{A}), \quad (1.102)$$

a cui corrisponde il vettore controvariante

$$A^\mu = (-V, -\vec{A}). \quad (1.103)$$

**Trasformazioni di gauge** Le trasformazioni di gauge (1.97) in termini del quadripotenziale si riscrivono semplicemente come

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi. \quad (1.104)$$

Infatti, usando la definizione (1.102), questo corrisponde a

$$(-V, \vec{A}) \rightarrow (-V, \vec{A}) + \left( \frac{1}{c} \partial_t \chi, \vec{\nabla} \chi \right), \quad (1.105)$$

cioè alle trasformazioni (1.97).

Il gauge di Lorenz (1.98) si scrive come

$$\partial_\mu A^\mu = 0 . \quad (1.106)$$

Infatti questo corrisponde, tenendo conto della (1.103), a

$$0 = \partial_0 A^0 + \partial_i A^i = -\frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial A^x}{\partial x} - \frac{\partial A^y}{\partial y} - \frac{\partial A^z}{\partial z} , \quad (1.107)$$

cioè all'espressione (1.98) del gauge di Lorentz:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 . \quad (1.108)$$

**Equazioni di Maxwell nel gauge di Lorenz** Introduciamo la quadricorrente

$$j^\nu = (\rho c, \vec{j}) . \quad (1.109)$$

attraverso la quale possiamo riscrivere le equazioni inomogenee di Maxwell come:

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -\frac{1}{c} j^\nu \quad (1.110)$$

si semplificano nel gauge di Lorenz a  $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = -\frac{1}{c} j^\nu$ , cioè

$$\square A^\nu = -\frac{1}{c} j^\nu . \quad (1.111)$$

### 1.4.1 Onde elettromagnetiche

Consideriamo le equazioni di Maxwell nel gauge di Lorenz, eq. (1.111) nel vuoto, cioè con  $j^\mu = 0$ . Esse sono semplicemente

$$\square A_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial t^2} - (\vec{\nabla})^2 A_\mu = 0 . \quad (1.112)$$

Ogni componente  $A_\mu$  con  $\mu = 0, 1, 2, 3$  soddisfa dunque l'equazione delle onde con velocità  $c$ . Una base di soluzioni è fornita dalle onde piane

$$A_\mu(x) = a_\mu(k) e^{ik \cdot x} , \quad (1.113)$$

dove

$$k_\mu = (-\omega/c, \vec{k}) \quad (1.114)$$

è un quadrivettore covariante contenente la frequenza angolare  $\omega$  e il vettore numero d'onda  $\vec{k}$ . Dunque

$$e^{ik \cdot x} = e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{x}} . \quad (1.115)$$



L'equazione di Maxwell (1.112) si traduce nella *relazione di dispersione* che lega  $\omega$  e  $\vec{k}$ . Infatti, le onde piane sono autofunzioni dell'operatore  $\partial_\mu$  con autovalore  $ik_\mu$ :

$$\partial_\mu e^{ik \cdot x} = i\partial_\mu (k_\nu x^\nu) e^{ik \cdot x} = ik_\nu \delta^\nu_\mu e^{ik \cdot x} = ik_\mu e^{ik \cdot x} . \quad (1.116)$$

Esse sono dunque anche autofunzioni del d'Alambertiano  $\square = \partial^\mu \partial_\mu$ :

$$\square e^{ik \cdot x} = -k^2 e^{ik \cdot x} . \quad (1.117)$$

Imponendo l'equazione (1.112) sull'espressione (1.113) conduce alla richiesta che il quadrivettore  $k_\mu$  sia *on shell*:

$$k^2 = \omega^2/c^2 - \vec{k}^2 = 0 , \quad (1.118)$$

ovverossia che valga la relazione di dispersione

$$\omega^2 = c^2 \vec{k}^2 . \quad (1.119)$$

A livello quantistico, secondo il modello di Planck e Einstein, un'onda elettromagnetica di definiti  $\omega$  e  $\vec{k}$  ha una natura duale di particella, il *fotone*, con energia e impulso dati da

$$E = \hbar\omega , \quad \vec{p} = \hbar\vec{k} . \quad (1.120)$$

In altre parole, il fotone corrispondente ad un onda caratterizzata da  $k_\mu$  ha quadrimpulso

$$p_\mu = \hbar k_\mu . \quad (1.121)$$

Data la proporzionalità universale tra queste due grandezze, spesso il quadrivettore  $k$  viene indicato direttamente come quadrimpulso dell'onda, specialmente quando si usa il sistema di unità naturali in cui  $\hbar = 1$  che introdurremo a breve.

## 1.4.2 Tensore di campo elettromagnetico

Sappiamo che i campi elettrici e magnetici possono venire scritti in termini dei potenziali. Nella formulazione covariante, essi vengono descritti dal tensore antisimmetrico

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (1.122)$$

Un tensore antisimmetrico generico a 4 indici ha  $(4 \times 3)/2 = 6$  componenti, tanti quante le componenti di  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Tramite la (1.122) tali sei componenti sono espresse in termini delle quattro componenti del quadripotenziale, e soddisfano automaticamente le equazioni di Maxwell omogenee. Determiniamo la corrispondenza delle componenti  $F_{\mu\nu}$  coi campi elettromagnetici. Se scegliamo ad esempio gli indici  $\mu\nu = 01$ , abbiamo

$$F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial A^x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} = -E^x , \quad (1.123)$$

dove nel secondo passaggio abbiamo utilizzato la definizione del quadripotenziale, eq. (1.102), e nell'ultimo eq. (1.95). Tenendo conto dell'antisimmetria di  $F_{\mu\nu}$  e utilizzando la metrica  $\eta$  per alzare gli indici<sup>4</sup> abbiamo dunque

$$F_{01} = -F_{10} = -F^{01} = F^{10} = -E^x . \quad (1.124)$$

Similmente otteniamo

$$\begin{aligned} F_{02} &= -F_{20} = -F^{02} = F^{20} = -E^y , \\ F_{03} &= -F_{30} = -F^{03} = F^{30} = -E^z . \end{aligned} \quad (1.125)$$

Se scegliamo invece dua indici spaziali, ad esempio  $\mu\nu = 23$ , abbiamo

$$F_{23} = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = \frac{\partial A^z}{\partial y} - \frac{\partial A^y}{\partial z} = (\vec{\nabla} \times \vec{A})^x = B^x . \quad (1.126)$$

Similmente si procede per le coppie di indici 31 e 12. Così troviamo

$$\begin{aligned} F_{23} &= -F_{32} = F^{23} = -F^{32} = B^x , \\ F_{31} &= -F_{13} = F^{31} = -F^{13} = B^y , \\ F_{12} &= -F_{21} = F^{12} = -F^{21} = B^z . \end{aligned} \quad (1.127)$$

In forma matriciale, abbiamo dunque

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & B^z & -B^y \\ E^y & -B^z & 0 & B^x \\ E^z & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix} . \quad (1.128)$$

Siccome, dalla sezione precedente, sappiamo come trasforma un tensore, si possono immediatamente ottenere le leggi di trasformazione dei campi elettromagnetici che formano le componenti del tensore elettromagnetico.

**Il campo duale** Il tensore di campo duale è definito come

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} , \quad (1.129)$$

dove  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  è il simbolo di Levi-Civita quadridimensionale, completamente antisimmetrico, per il quale assumiamo la convenzione che  $\epsilon^{0123} = -1$ , e quindi, abbassando gli indici,  $\epsilon_{0123} = 1$ .<sup>5</sup>

<sup>4</sup>Ogni volta che si alza o abbassa un indice di tipo spaziale la metrica inserisce un segno meno.

<sup>5</sup>Il simbolo di Levi-Civita è un tensore invariante per trasformazioni di Lorentz proprie, per le quali  $\det \Lambda = 1$ . Cambia invece segno sotto trasformazioni di parità.

Il tensore duale contiene gli stessi gradi di libertà del tensore di campo  $F_{\mu\nu}$ , cioè i campi elettrici e magnetici, solo riarrangiati. In particolare, ad esempio, abbiamo

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{01} &= -\frac{1}{2}\epsilon^{01\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = -\frac{1}{2}(\epsilon^{0123}F_{23} + \epsilon^{0132}F_{32}) \\ &= F_{23} = B^x ,\end{aligned}\tag{1.130}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo tenuto conto del fatto che gli indici  $\rho$  e  $\sigma$  possono solo prendere i valori 2 o 3 perché tutti gli indici del simbolo di Levi-Civita devono essere diversi per non avere zero, e nell'ultimo passaggio abbiamo usato la (1.127). Similmente avviene per  $\tilde{F}^{02} = B^y$  e  $\tilde{F}^{03} = B^z$ . Abbiamo inoltre

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{23} &= -\frac{1}{2}\epsilon^{23\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = -\frac{1}{2}(\epsilon^{2301}F_{01} + \epsilon^{2310}F_{10}) = -\epsilon^{2301}F_{01} \\ &= F_{01} = -E^x ,\end{aligned}\tag{1.131}$$

dove abbiamo usato il fatto che  $\epsilon^{2301} = -\epsilon^{0123} = 1$  perché i due ordinamenti degli indici sono collegati da un numero dispari di scambi e poi la relazione (1.124). Analogamente si trova  $\tilde{F}^{31} = -E^y$  e  $\tilde{F}^{12} = -E^z$ . In notazione matriciale abbiamo in definitiva

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B^x & B^y & B^z \\ -B^x & 0 & -E^z & +E^y \\ -B^y & +E^z & 0 & -E^x \\ -B^z & -E^y & +E^x & 0 \end{pmatrix} .\tag{1.132}$$

Dal confronto con la forma del tensore  $F^{\mu\nu}$  – ricavato dalla (1.128) alzando gli indici – vediamo che

$$\tilde{F}^{\mu\nu}(\vec{E}, \vec{B}) = F^{\mu\nu}(\vec{B}, -\vec{E}) .\tag{1.133}$$

**Equazioni di Maxwell** Possiamo scrivere le equazioni di Maxwell in maniera estremamente sintetica come l'insieme di otto equazioni:

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{1}{c}j^\nu \\ \partial_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0 \end{cases}\tag{1.134}$$

Diamo anche una scrittura alternativa, della seconda equazione:

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 .\tag{1.135}$$

Consideriamo per esempio  $[\mu\nu\rho] = [123]$ , nel qual caso si ha

$$0 = \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = \frac{\partial B^x}{\partial x} + \frac{\partial B^y}{\partial y} + \frac{\partial B^z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} ,\tag{1.136}$$

cioè l'equazione di Maxwell omogenea (1.93).

Possiamo poi avere l'indice temporali e due indici spaziali. Ad esempio, con  $[\mu\nu\rho] = [012]$  si ottiene

$$0 = \partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} = \frac{1}{c} \frac{\partial B^z}{\partial t} + \frac{\partial E^y}{\partial x} - \frac{\partial E^x}{\partial y} = \frac{1}{c} \frac{\partial B^z}{\partial t} + \left( \vec{\nabla} \times \vec{E} \right)^z . \quad (1.137)$$

Similmente, i casi  $[013]$  e  $[023]$  ci danno le altre componenti dell'equazione vettoriale

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 , \quad (1.138)$$

cioè dell'equazione di Maxwell omogenea (1.92).

Per ricavare le equazioni di Maxwell inomogenee (1.91) e (1.94) poniamo  $\nu = 0$  nella prima equazione di (1.134)

$$\partial_i F^{i0} = -\frac{1}{c} j^0 = -\rho . \quad (1.139)$$

Tenendo conto delle (1.124,1.125) questa corrisponde a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho . \quad (1.140)$$

Scegliendo invece  $\nu$  pari a un indice spaziale, ad esempio  $\nu = 1$ , abbiamo

$$\partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = -\frac{1}{c} j^1 . \quad (1.141)$$

Utilizzando le equazioni (1.124,1.127) questa diventa

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E^x}{\partial t} - \partial_y B^z + \partial_z B^y = -\frac{1}{c} j^x , \quad (1.142)$$

cioè la componente  $x$  dell'equazione vettoriale

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \vec{j} . \quad (1.143)$$

Le altre componenti sono ottenute scegliendo  $\nu = 2, 3$ .

**Invarianti quadratici nella field strength** A partire dal tensore di campo  $F_{\mu\nu}$  si può costruire un'espressione invariante che è molto importante in quanto rappresenta, come vedremo più avanti, la densità Lagrangiana della teoria classica del campo elettromagnetico. Tale invariante è

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2F_{0i} F^{0i} + F_{ij} F^{ij} , \quad (1.144)$$

dove il coefficiente 2 è dovuto al contributo in cui gli indici 0 e  $i$  sono scambiati. Tenendo conto della (1.124) abbiamo

$$2F_{01}F^{01} = -2(E^x)^2 ; \quad (1.145)$$

analogamente accade per  $i = 2, 3$ . Utilizzando la (1.127) troviamo

$$F_{12}F^{12} + F_{21}F^{21} = 2(B^z)^2 . \quad (1.146)$$

Similmente accade per le altre due coppie di indici spaziali. In definitiva, dunque, abbiamo

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2 \left( |\vec{B}|^2 - |\vec{E}|^2 \right) . \quad (1.147)$$

Possiamo anche costruire una seconda espressione quadratica invariante sotto trasformazioni proprie di Lorentz, cioè

$$\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} . \quad (1.148)$$

Con un semplice calcolo si trova che

$$\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -4\vec{E} \cdot \vec{B} . \quad (1.149)$$

Questa quantità, a differenza di  $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ , cambia segno sotto parità.

### 1.4.3 Formule riassuntive

Riassumiamo di seguito le principali equazioni e definizioni del formalismo covariante, tensoriale, classico dell'elettromagnetismo.

Definizione quadricorrente e quadripotenziale	$j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ , $A_\mu = (-V, \vec{A})$
Relazione tra tensore di campo e potenziale	$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$
Equazioni di Maxwell	$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{1}{c}j^\nu \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \end{cases}$
Trasformazioni di gauge	$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi$
Gauge di Lorenz	$\partial_\mu A^\mu = 0 \rightarrow \square A^\mu = -\frac{1}{c}j^\mu$

## 1.5 Interazione di una particella carica con il campo e.m.

Vogliamo ora ricavare l'equazione di Schrödinger per una particella interagente con il campo elettromagnetico. Il risultato che otterremo avrà una grande importanza nel prossimo capitolo. Cominciamo ricapitolando la trattazione classica.

### Hamiltoniana e Lagrangiana classiche

La forza di Lorentz che agisce su una particella di carica  $q$  e velocità  $\vec{v}$  in moto in un campo elettro-magnetico è data da:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}\right) \quad (1.150)$$

Per descrivere questa interazione nel formalismo Hamiltoniano o Lagrangiano è necessario utilizzare i potenziali  $V$  ed  $\vec{A}$ . In particolare, il termine magnetico è proporzionale a

$$\vec{v} \times \vec{B} = \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = v_i \vec{\nabla} A^i - v^i \partial_i \vec{A}, \quad (1.151)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo scritto  $\partial_i$  per  $\partial/\partial x^i$  e usato la relazione, valida per qualsiasi terna di vettori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$ , che non assumiamo commutare fra di loro:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = a_i \vec{b} c^i - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}, \quad (1.152)$$

dove gli indici ripetuti (“contratti”) sono da intendersi sommati. Questa relazione segue utilizzando l'espressione in componenti del prodotto esterno:

$$\left(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})\right)^i = \epsilon^{ijk} a_j (\vec{b} \times \vec{c})_k = \epsilon^{ijk} a_j \epsilon_{klm} b^l c^m. \quad (1.153)$$

Per il tensore di Levi-Civita vale la seguente proprietà, facilmente verificabile:

$$\epsilon^{kij} \epsilon_{klm} = \delta_l^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_l^j. \quad (1.154)$$

Tenendo conto anche del fatto che  $\epsilon^{ijk} = \epsilon^{kij}$ , la (1.153) diventa

$$\left(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})\right)^i = \left(\delta_l^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_l^j\right) a_j b^l c^m = a_j b^i c^j - a_j b^j c^i, \quad (1.155)$$

che coincide con la proprietà (1.152).

Le equazioni del moto per la particella soggetta alla forza (1.150) sono dunque

$$m\vec{a} = \vec{F} = -q\vec{\nabla}V - \frac{q}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{q}{c}\left(v_i \vec{\nabla}A^i - v^i \partial_i \vec{A}\right). \quad (1.156)$$

dove  $m$  è la massa della particella e  $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{x}}$  la sua accelerazione.

Queste equazioni del moto seguono dalla semplice Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + qV, \quad (1.157)$$

che è ottenuta dall'Hamiltoniana classica con la sostituzione

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}. \quad (1.158)$$

Infatti le corrispondenti equazioni di Hamilton sono

$$\vec{v} = \dot{\vec{x}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{1}{m} \left( \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right), \quad (1.159)$$

$$\dot{\vec{p}} = -\vec{\nabla} H = \frac{1}{m} \frac{q}{c} \left( \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)_i \vec{\nabla} A^i - q \vec{\nabla} V. \quad (1.160)$$

La seconda può anche essere scritta, usando la prima, come

$$\dot{\vec{p}} = \frac{q}{c} v_i \vec{\nabla} A^i - q \vec{\nabla} V. \quad (1.161)$$

Derivando rispetto al tempo la prima equazione e moltiplicandola per la massa otteniamo

$$m \vec{a} = \dot{\vec{p}} - \frac{q}{c} \frac{d\vec{A}}{dt}. \quad (1.162)$$

Utilizzando la (1.161) ed esplicitando la derivata totale temporale di  $\vec{A}$  come

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{dx^i}{dt} \partial_i \vec{A} \quad (1.163)$$

verifichiamo

$$\begin{aligned} m \vec{a} &= \frac{q}{c} v_i \vec{\nabla} A^i - q \vec{\nabla} V - \frac{q}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{q}{c} v^i \partial_i \vec{A} \\ &= \frac{q}{c} \left( v_i \vec{\nabla} A^i - v^i \partial_i \vec{A} \right) - q \vec{\nabla} V - \frac{q}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ &= \frac{q}{c} \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + q \left( -\vec{\nabla} V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B} + q \vec{E}. \end{aligned} \quad (1.164)$$

La corrispondente Lagrangiana  $L$  è ottenuta tramite la trasformata di Legendre:

$$L = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - H, \quad (1.165)$$

dove  $\vec{p}$  va espresso in termini di  $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$  invertendo l'equazione (1.159):

$$\vec{p} = m \vec{v} + \frac{q}{c} \vec{A}. \quad (1.166)$$

Dunque abbiamo

$$\begin{aligned} L &= \left( m \vec{v} + \frac{q}{c} \vec{A} \right) \cdot \vec{v} - \frac{1}{2m} (m \vec{v})^2 - qV \\ &= \frac{m}{2} (\vec{v})^2 - qV + \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v}. \end{aligned} \quad (1.167)$$

Notiamo che la Lagrangiana (1.167) è data dalla Lagrangiana libera più un semplice termine di interazione

$$L_{\text{int}} = -qV + \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} . \quad (1.168)$$

La corrispondente azione di interazione può essere scritta come

$$S_{\text{int}} = \frac{q}{c} \int dt \left( -cV + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \right) . \quad (1.169)$$

Quest'espressione è naturalmente espressa come un invariante relativistico:

$$\begin{aligned} S_{\text{int}} &= -\frac{q}{c} \int dt \left( cV - \vec{A} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \right) = -\frac{q}{c} \int dt \left( V \frac{dx^0}{dt} - \vec{A} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \right) \\ &= \frac{q}{c} \int dt \left( A_0 \frac{dx^0}{dt} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \right) = \frac{q}{c} \int dt A_\mu \frac{dx^\mu}{dt} . \end{aligned} \quad (1.170)$$

Siccome  $A_\mu$  trasforma come un vettore covariante, l'azione di interazione in Eq. (1.170) è un invariante relativistico. Anche se la coordinata temporale non è invariante, e quindi la velocità  $dx^\mu/dt$  non è un vettore controvariante, la quantità  $(dx^\mu/dt) dt$  che compare nell'integrale lo è: la misura di integrazione si trasforma in modo inverso alla operazione di derivazione rispetto a  $t$ . In effetti, l'azione di interazione è invariante per una qualsiasi riparametrizzazione  $t \rightarrow t'(t)$  della coordinata temporale utilizzata per parametrizzare la traiettoria della particella. In particolare, possiamo parametrizzarla col tempo proprio  $\tau(t)$ :

$$S_{\text{int}} = \frac{q}{c} \int d\tau A_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} \int d\tau A_\mu u^\mu . \quad (1.171)$$

In questo caso, essa è direttamente scritta in termini di vettori ( $A_\mu$  e  $u^\mu$ ) ed invarianti ( $d\tau$ ).

### Equazione di Schrödinger

A livello quantistico, l'equazione di Schrödinger associata alla Hamiltoniana classica (1.157) è

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi , \quad (1.172)$$

cioè, tenendo conto che  $\hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$ ,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left( -i\hbar \vec{\nabla} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 \psi + qV \psi . \quad (1.173)$$

Possiamo riscriverla come

$$i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial t} + i\frac{q}{\hbar} V \right) \psi = \frac{1}{2m} \left( -i\hbar \left( \vec{\nabla} - i\frac{q}{\hbar c} \vec{A} \right) \right)^2 \psi , \quad (1.174)$$



ovverosia semplicemente come

$$i\hbar D_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} (\vec{D})^2 \psi, \quad (1.175)$$

dove abbiamo introdotto le *derivate covarianti* di gauge (proprietà che vedremo tra poco)

$$D_t = \partial_t + i\frac{q}{\hbar}V, \quad \vec{D} = \vec{\nabla} - i\frac{q}{\hbar c}\vec{A}. \quad (1.176)$$

Dunque l'equazione di Schrödinger per la particella carica si ottiene da quella per la particella libera con la sostituzione

$$\partial_t \rightarrow D_t, \quad \vec{\nabla} \rightarrow \vec{D}. \quad (1.177)$$

### 1.5.1 Il principio di gauge in M.Q.

La forma dell'interazione della particella con il campo elettromagnetico incorporata nell'Hamiltoniana (1.157), o equivalentemente nella Lagrangiana (1.167), è detta "interazione minimale". Si realizza a livello quantistico tramite la promozione delle derivate ordinarie a derivate covarianti. Tale prescrizione può venir desunta da una richiesta di *simmetria*.

**Trasformazioni di fase globali** La funzione d'onda  $\psi(\vec{x}, t)$  di un sistema quantistico ha valori complessi. Tutte le osservabili fisiche sono però reali. In particolare, la densità di probabilità di osservare il sistema in  $\vec{x}$  al tempo  $t$  è data da  $|\psi(\vec{x}, t)|^2$ . Ridefinire la funzione d'onda con un cambiamento di fase *globale* (cioè indipendente dalle coordinate)

$$\psi(\vec{x}, t) \rightarrow e^{i\alpha} \psi(\vec{x}, t) \quad (1.178)$$

non ha alcun effetto fisico. Questa ridefinizione corrisponde ad una rotazione di un angolo  $\alpha$  nello spazio bidimensionale  $\mathbb{C}$  in cui prende valori la funzione d'onda.

Anche l'equazione di Schrödinger che governa l'evoluzione dinamica di  $\psi(\vec{x}, t)$  è ovviamente invariante sotto la trasformazione (1.178), in quanto la fase costante  $\exp(i\alpha)$  "passa" attraverso le derivate e può venir semplificata. Ciò vale per qualsiasi sistema, compresa la particella libera.

Le fasi  $\exp(i\alpha)$  sono numeri complessi  $u \in \mathbb{C}$  di modulo unitario, ovverosia tali che  $|u|^2 = u^*u = 1$ . La successione di due trasformazioni di fase globale  $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha}\psi$  e  $\psi' \rightarrow \psi'' = e^{i\beta}\psi'$  equivale ad un'unica trasformazione del medesimo tipo  $\psi \rightarrow \psi'' = e^{i(\alpha+\beta)}\psi = e^{i\delta}\psi$  con  $\delta = \alpha + \beta$ . Inoltre non ha importanza l'ordine nel quale si eseguono due successive trasformazioni, in quanto chiaramente:

$$e^{i\alpha}(e^{i\beta}\psi) = e^{i\beta}(e^{i\alpha}\psi)$$

Le fasi formano quindi un gruppo abeliano. Tale gruppo è detto  $U(1)$  ed è il caso più semplice<sup>6</sup> del gruppo  $U(n)$  delle matrici unitarie  $n \times n$ , cioè delle matrici tali che  $U^\dagger U = \mathbf{1}$ .

---

<sup>6</sup>Le matrici  $1 \times 1$  sono semplicemente dei numeri complessi  $u$ ; inoltre l'hermitiano coniugato si riduce al complesso coniugato e il prodotto matriciale all'usuale moltiplicazione, per cui la condizione  $U^\dagger U = \mathbf{1}$  diviene  $u^*u = 1$ .

**Trasformazioni di gauge locali e principio di gauge** La teoria libera invece *non* è invariante per trasformazioni di fase *locali*

$$\psi(\vec{x}, t) \rightarrow \psi'(\vec{x}, t) = e^{i\alpha(\vec{x}, t)} \psi(\vec{x}, t) . \quad (1.179)$$

Infatti, se  $\psi(\vec{x}, t)$  soddisfa l'equazione di Schrödinger libera, allora  $\psi'(\vec{x}, t)$  non la soddisfa più, dato che  $\partial/\partial t$  e  $\vec{\nabla}$  agiscono in maniera differente sulla fase  $\alpha(\vec{x}, t)$ . L'invarianza *locale* di U(1) può essere ottenuta solo rendendo la particella interagente con qualche campo che si trasformi in modo non banale sotto U(1). L'equazione invariante, in effetti, è esattamente quella della particella carica accoppiata ai potenziali  $V$  ed  $\vec{A}$ , cioè l'equazione (1.175), a patto che la trasformazione di U(1), oltre che agire sulla funzione d'onda, agisca anche sui potenziali come una trasformazione di gauge di parametro  $\chi = (\hbar c/q)\alpha$ :

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi , \\ V &\rightarrow V' = V - \frac{\hbar}{q} \frac{\partial \alpha}{\partial t} , \end{aligned} \quad (1.180)$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \frac{\hbar c}{q} \vec{\nabla} \alpha \quad (1.181)$$

Sotto questa trasformazione, infatti, le derivate covarianti di  $\psi$  trasformano esattamente come  $\psi$  stessa:

$$(D_t \psi)' = e^{i\alpha} D_t \psi , \quad (1.182)$$

$$(\vec{D} \psi)' = e^{i\alpha} \vec{D} \psi , \quad (1.183)$$

anche per  $\alpha(\vec{x}, t)$  generica, non costante. Da questo segue immediatamente che l'equazione (1.175) è invariante. Verifichiamo le cruciali proprietà di covarianza (1.182). Abbiamo

$$\begin{aligned} (D_t \psi)' &= \left( \partial_t + i \frac{q}{\hbar} V' \right) e^{i\alpha} \psi = \left( \partial_t + i \frac{q}{\hbar} \left( V - \frac{\hbar}{q} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) \right) e^{i\alpha} \psi \\ &= e^{i\alpha} \left( \partial_t + i \frac{q}{\hbar} V \right) \psi + i \frac{\partial \alpha}{\partial t} e^{i\alpha} \psi - i \frac{q}{\hbar} \frac{\hbar}{q} \frac{\partial \alpha}{\partial t} e^{i\alpha} \psi = e^{i\alpha} \left( \partial_t + i \frac{q}{\hbar} V \right) \psi \\ &= e^{i\alpha} D_t \psi , \end{aligned} \quad (1.184)$$

come volevasi dimostrare. Similmente,

$$\begin{aligned} (\vec{D} \psi)' &= \left( \vec{\nabla} - i \frac{q}{\hbar c} \vec{A}' \right) e^{i\alpha} \psi = \left( \vec{\nabla} - i \frac{q}{\hbar c} \left( \vec{A} + \frac{\hbar c}{q} \vec{\nabla} \alpha \right) \right) e^{i\alpha} \psi \\ &= e^{i\alpha} \left( \vec{\nabla} - i \frac{q}{\hbar c} \vec{A} \right) \psi + i \vec{\nabla} \alpha e^{i\alpha} \psi - i \frac{q}{\hbar c} \frac{\hbar c}{q} \vec{\nabla} \alpha e^{i\alpha} \psi = e^{i\alpha} \left( \vec{\nabla} - i \frac{q}{\hbar c} \vec{A} \right) \psi \\ &= e^{i\alpha} \vec{D} \psi . \end{aligned} \quad (1.185)$$

Riassumendo, una trasformazione di fase *locale*  $\exp [i\alpha(\vec{x}, t)]$  è inosservabile nella teoria dell'elettromagnetismo in quanto equivale a (o, detto in altri termini, può essere riassorbita da) una trasformazione di gauge di parametro

$$\chi = \frac{\hbar}{q}\alpha \tag{1.186}$$

dei potenziali scalare e vettore, cosa che non influenza le osservabili fisiche quali i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Quindi l'elettromagnetismo si basa su una simmetria locale U(1) legata all'invarianza di gauge.

## Chapter 2

# Meccanica quantistica relativistica

In questo capitolo esploriamo il tentativo di conciliare la Meccanica Quantistica con la Relatività Speciale, in particolare tramite l'equazione di Dirac. Questa equazione è alla base della descrizione delle particelle di materia con spin 1/2; tuttavia per avere una descrizione del tutto consistente sarà necessario cambiare punto di vista ed introdurre la Teoria Quantistica dei Campi.

D'ora in avanti utilizzeremo il sistema di unità naturali, ponendo  $c = 1$  e  $\hbar = 1$ , si veda Appendice A. E' una convenzione molto utile per semplificare la scrittura delle equazioni.

### 2.1 Equazione di Klein-Gordon

Il nostro obiettivo è quello di ottenere un'equazione per la funzione d'onda di una particella quantistica che sia compatibile con la relatività speciale.

**Equazione di Schrödinger** L'equazione di Schrödinger implementa a livello operatoriale sulla funzione d'onda  $\psi(t, \vec{x})$  la relazione non-relativistica tra energia ed impulso tramite la corrispondenza

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \quad ; \quad \vec{p} \rightarrow -i \vec{\nabla} . \quad (2.1)$$

Per la particella libera, la relazione

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad (2.2)$$

diviene l'equazione

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{(-i \vec{\nabla})^2}{2m} \psi . \quad (2.3)$$

Quest'equazione è palesemente non relativistica in quanto asimmetrica nelle derivate spaziali e nella derivata temporale, che appaiono in essa rispettivamente al secondo e primo ordine. Questo fatto è dovuto alla natura della relazione non relativistica (2.2) tra energia ed impulso.

Per particelle, quali gli elettroni, dotate di spin 1/2 la funzione d'onda non-relativistica ha due componenti:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

e la corrispondente densità di probabilità è

$$\rho = \psi^\dagger \psi = |\psi_+|^2 + |\psi_-|^2 . \quad (2.5)$$

L'equazione di Schrödinger libera agisce diagonalmente sullo spazio bidimensionale di spin, cioè è separatamente valida per ogni componente. Interazioni dipendenti dallo spin sono invece tipicamente rappresentate da matrici che agiscono non-banalmente su tale spazio. I gradi di libertà spazio-temporali e di spin sono dunque separati nella trattazione non-relativistica della meccanica quantistica.

**L'equazione di Klein-Gordon** A livello relativistico, la relazione energia-impulso diviene

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 . \quad (2.6)$$

In termini del quadrimpulso  $p_\mu = (E, -\vec{p})$  questa è, come già visto, la relazione di mass-shell

$$p^2 = m^2 . \quad (2.7)$$

La regola di quantizzazione (2.1) che associa ad energia ed impulso gli operatori di derivata temporale e spaziale in termini del quadrimpulso è semplicemente data da

$$p_\mu \rightarrow \hat{p}_\mu = -i\partial_\mu . \quad (2.8)$$

Questo realizza le regole di commutazione fondamentali

$$[\hat{p}_\mu, x^\nu] = -i\delta_\mu^\nu , \quad (2.9)$$

che comprendono i commutatori

$$\left[ \hat{E}, \hat{t} \right] = i , \quad \left[ \hat{p}_i, x^j \right] = -i\delta^j_i . \quad (2.10)$$

Se, utilizzando la corrispondenza (2.8), rappresentiamo la condizione di mass-shell (2.7) operatorialmente su una funzione d'onda  $\phi(x)$  – dove con  $x$  indichiamo le quattro coordinate spazio-temporali, otteniamo  $(-i\partial)^2\phi = m^2\phi$ , cioè l'*equazione di Klein-Gordon*

$$(\square + m^2)\phi = 0 , \quad (2.11)$$

ovverossia

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(t, \vec{x}) = (-\vec{\nabla}^2 + m^2)\phi(t, \vec{x}) . \quad (2.12)$$

L'equazione di Klein Gordon (KG) è relativisticamente covariante: l'operatore  $\square$  è un invariante, quindi l'equazione ha le stesse proprietà di trasformazione della funzione  $\phi(x)$ . In qualsiasi rappresentazione si trasformi  $\phi$ , dunque, se esso soddisfa KG in un dato sistema di riferimento inerziale, allora lo soddisfa in un qualsiasi altro sistema inerziale.

**Soluzioni di onda piana** L'equazione libera di Klein-Gordon ammette una base di soluzioni data dalle onde piane:

$$\phi(x) = \mathcal{N}e^{\pm ip \cdot x} = \mathcal{N}e^{\pm iEt \mp i\vec{p} \cdot \vec{x}} , \quad (2.13)$$

dove  $\mathcal{N}$  è un opportuno fattore di normalizzazione, e vale la relazione di mass-shell (2.7). Infatti queste onde piane sono autofunzioni dell'operatore impulso:

$$-i\partial_\mu e^{\pm ip \cdot x} = \hat{p}_\mu e^{\pm ip \cdot x} = \pm p_\mu e^{\pm ip \cdot x} \quad (2.14)$$

e quindi anche autofunzioni del D'Alambertiano con autovalore pari a  $-m^2$  sul mass-shell:

$$\square e^{\pm ip \cdot x} = \partial_\mu \partial^\mu e^{\pm ip \cdot x} = -p^2 e^{\pm ip \cdot x} = -m^2 e^{\pm ip \cdot x} . \quad (2.15)$$

Notiamo che le onde piane (2.13) si distinguono, a seconda del segno ad esponente, in soluzioni ad energia positiva e negativa:

$$i\partial_t e^{\pm ip \cdot x} = \pm E e^{\pm ip \cdot x} . \quad (2.16)$$

Le soluzioni ad energia negativa sono problematiche se si interpreta l'equazione di KG in termini di una funzione d'onda a singola particella.

**Il problema della densità di probabilità** L'equazione di KG ha anche un'altra caratteristica che impedisce di interpretarla come l'equazione fondamentale da imporre sulla funzione d'onda, cioè come l'analogo relativistico dell'equazione di Schrödinger. La densità di probabilità di posizione ad essa associata non è infatti definita positiva, come deve invece essere per una densità di probabilità. Procedendo in analogia con quanto fatto nel caso non-relativistico, vedi le equazioni (1.11)–(1.12), notiamo che la quadricorrente

$$j^\mu = \frac{i}{2m} (\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*) \phi) \quad (2.17)$$

è conservata quando  $\phi$  soddisfa l'equazione di KG. Infatti si ha

$$\begin{aligned}\partial_\mu j^\mu &= \frac{i}{2m} \partial_\mu (\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*) \phi) \\ &= \frac{i}{2m} ((\partial_\mu \phi^*) \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*) \partial_\mu \phi) - \frac{i}{2m} ((\square \phi^*) \phi - \phi^* \square \phi) .\end{aligned}\quad (2.18)$$

Il primo termine nell'ultima riga è identicamente nullo. Il secondo, usando l'equazione di KG per  $\phi$  e la sua coniugata, diventa

$$\frac{i}{2m} (m^2 \phi^* \phi - m^2 \phi^* \phi) = 0 .\quad (2.19)$$

Se poniamo  $j^\mu = (\rho, \vec{j})$  abbiamo dunque l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 .\quad (2.20)$$

Tuttavia non è consistente interpretare  $\rho$  e  $\vec{j}$  come densità di probabilità e densità di corrente di probabilità, perché

$$\rho = \frac{i}{2m} \left( \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \phi \right)\quad (2.21)$$

non è definita positiva. Lo si può vedere semplicemente nel caso di un'onda piana, usando Eq. 2.16

$$\rho = \frac{i}{2m} \left( \phi^* \frac{(\pm E)}{i} \phi - \frac{(\mp E)}{i} \phi^* \phi \right) = \pm \frac{E}{m} \phi^* \phi = \pm \frac{E}{m} |N|^2 .\quad (2.22)$$

Il segno dipende da quello dell'energia, che abbiamo visto poter essere positivo o negativo. Questo sostanzialmente è dovuto, come risulta dalla derivazione precedente, al fatto che l'equazione di KG è del second'ordine nelle derivate temporali (nell'equazione di Schrödinger, il problema non si presenta perché la derivata temporale è invece del prim'ordine).

Dunque l'equazione di KG, che deve essere soddisfatta dalla funzione d'onda in quanto implementa la relazione relativistica di mass-shell, deve in realtà essere implicata da un'equazione fondamentale che consenta di definire una corretta densità di probabilità.

Queste considerazioni valgono nel contesto della MQ relativistica, che fu il primo approccio storicamente considerato, e nel quale l'equazione di KG non può essere consistentemente utilizzata. Nell'ambito della teoria quantistica dei campi, invece, vedremo che i problemi di cui sopra saranno naturalmente "risolti" e l'equazione di KG potrà essere utilizzata per descrivere particelle di spin 0.

## 2.2 Equazione di Dirac

Per formulare un'ansatz sulla forma dell'equazione "fondamentale" soddisfatta dalla funzione d'onda ci possiamo basare sulle seguenti considerazioni:

- L'equazione che cerchiamo deve essere del prim'ordine nella derivata temporale, per evitare il problema di valori negativi per la densità di probabilità associata. Per poter essere covariante, deve allora essere del prim'ordine anche nelle derivate spaziali e deve essere scritta in termini dell'operatore  $\hat{p}_\mu = -i\partial_\mu$ .
- Per descrivere una particella massiva, l'equazione deve contenere esplicitamente la sua massa  $m$ .
- L'equazione dev'essere lineare ed omogenea affinché valga il principio di sovrapposizione, punto centrale della Meccanica Quantistica.
- In generale, ci aspettiamo che la funzione d'onda  $\psi(x)$  abbia molte componenti, cioè abbia un carattere spinoriale. Gli operatori che agiscono su di essa possono dunque avere carattere matriciale.

Sulla base di ciò, Dirac propose la seguente equazione:

$$(\gamma^\mu \hat{p}_\mu + m\mathbb{1}) \psi(x) = 0 , \quad (2.23)$$

dove i coefficienti  $\gamma^\mu$  possono essere matrici che agiscono sul vettore colonna delle componenti di  $\psi$ . Nel seguito spesso non esplicheremo la matrice identità e scriveremo l'equazione di Dirac come

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 . \quad (2.24)$$

**Condizioni perché Dirac implichi Klein-Gordon** Vi è un'ulteriore cruciale condizione: quest'equazione del prim'ordine deve implicare l'equazione del second'ordine di KG, che implementa la relazione relativistica tra energia e impulso. Applicando due volte l'operatore che appare nell'equazione (2.23) abbiamo

$$0 = (\gamma^\mu \hat{p}_\mu + m) (\gamma^\nu \hat{p}_\nu + m) \psi = \gamma^\mu \gamma^\nu \hat{p}_\mu \hat{p}_\nu \psi + 2m\gamma^\mu \hat{p}_\mu \psi + m^2 \psi . \quad (2.25)$$

Nel secondo termine dell'ultima espressione possiamo riutilizzare l'equazione (2.23) nella forma  $\gamma^\mu \hat{p}_\mu \psi = -m\psi$ . Otteniamo così

$$0 = \gamma^\mu \gamma^\nu \hat{p}_\mu \hat{p}_\nu \psi - m^2 \psi = -\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu \psi - m^2 \psi . \quad (2.26)$$

Siccome i coefficienti  $\gamma^\mu$  sono, o potrebbero essere, matrici, il loro ordine è rilevante e non possiamo assumere che l'espressione  $\gamma^\mu \gamma^\nu$  sia di per sé simmetrica. Tale prodotto si decomporrà in una parte simmetrica e una parte antisimmetrica:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu &= \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) + \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \\ &= \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] . \end{aligned} \quad (2.27)$$

La quantità  $\{A, B\} \equiv AB + BA$  è detta *anticommutatore* degli oggetti  $A$  e  $B$ , in quanto si annulla se i due oggetti anticommutano, cioè se  $AB = -BA$ , così come il commutatore



$[A, B] \equiv AB - BA$  si annulla se i due oggetti commutano, cioè se  $AB = BA$ .

Nell'equazione (2.26) il prodotto  $\gamma^\mu \gamma^\nu$  è contratto con il tensore  $\partial_\mu \partial_\nu \psi$  che è simmetrico, dato che le derivate parziali commutano. La parte antisimmetrica del prodotto dunque non contribuisce a quest'espressione<sup>1</sup> ed otteniamo, effettuando anche un cambio di segno,

$$\frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \partial_\mu \partial_\nu \psi + m^2 \psi = 0 . \quad (2.29)$$

Questa condizione concorda con l'equazione di KG (2.11), che può essere scritta come

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \psi + m^2 \psi = 0 , \quad (2.30)$$

se le matrici  $\gamma^\mu$  soddisfano le relazioni

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1} \quad (2.31)$$

cioè formano una cosiddetta "algebra di Clifford". Questa relazione si può anche scrivere nella forma

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu + 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1} . \quad (2.32)$$

**L'algebra di Clifford** Le relazioni di anticommutazione (2.31) corrispondono a

$$(\gamma^0)^2 = \mathbb{1} , \quad (\gamma^i)^2 = -\mathbb{1} , \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \mathbf{0} \text{ per } \mu \neq \nu . \quad (2.33)$$

Il fatto che le quantità  $\gamma^\mu$  con indici diversi anticommutino implica che questi oggetti non possono essere numeri; devono necessariamente essere matrici di dimensione maggiore di uno. Dunque la funzione d'onda  $\psi$  deve necessariamente avere più di una componente, cioè essere un elemento dello spazio vettoriale su cui agiscono le matrici  $\gamma^\mu$ . Tali elementi sono detti *spinori*.

**Proprietà di hermiticità** Se scegliamo una base in cui  $\gamma^0$  è diagonale, l'algebra (2.33) implica che i suoi autovalori sono  $\pm 1$ , per cui  $\gamma^0$  è hermitiana. Le matrici  $\gamma^i$ ,  $i = 1, 2, 3$  hanno invece autovalori immaginari  $\pm i$ , e sono dunque anti-hermitiane:

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 , \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i . \quad (2.34)$$

Queste proprietà di hermiticità si possono anche esprimere come segue:

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 . \quad (2.35)$$

Infatti questo corrisponde a

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0 , \quad (\gamma^i)^\dagger = \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 = -\gamma^i \gamma^0 \gamma^0 = -\gamma^i . \quad (2.36)$$

---

<sup>1</sup>In generale, dati un tensore simmetrico  $S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}$  e uno antisimmetrico  $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$  si ha  $A^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = 0$ . Infatti tale espressione è uguale a meno se stessa:

$$A^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = A^{\mu\nu} S_{\nu\mu} = A^{\nu\mu} S_{\mu\nu} = -A^{\mu\nu} S_{\mu\nu} , \quad (2.28)$$

dove nel secondo passaggio abbiamo rinominato gli indici sommati.

**La matrice di chiralità** A partire dalle matrici gamma si può formare la *matrice di chiralità*  $\gamma^5$ , definita come segue:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 . \quad (2.37)$$

Essa può anche venire scritta come

$$\gamma^5 = \frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma , \quad (2.38)$$

dove  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  è il simbolo di Levi-Civita quadri-dimensionale, con la convenzione  $\epsilon_{0123} = 1$ . Infatti, essendo gli indici tutti diversi, le matrici anticommutano tra di loro e il loro prodotto è totalmente antisimmetrico.

Come conseguenza dell'algebra di Clifford e delle relazioni di hermiticità delle matrici gamma la matrice di chiralità gode delle proprietà seguenti:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = \mathbf{0} \quad \forall \mu , \quad (\gamma^5)^2 = \mathbf{1} , \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 . \quad (2.39)$$

Infatti, per quanto riguarda la prima relazione abbiamo, ad esempio,

$$\gamma^1\gamma^5 + \gamma^5\gamma^1 = i(\gamma^1\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 + \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^1) . \quad (2.40)$$

Nel primo termine con un solo scambio di posizione,  $\gamma^1\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^1$  porto le due matrici  $\gamma^1$  vicine, dopodiché posso utilizzare  $(\gamma^1)^2 = -\mathbf{1}$ . Per il secondo termine devo effettuare due scambi per portare le due  $\gamma^1$  vicine; facendo questo non acquisto alcun segno meno. Dunque ottengo

$$\gamma^1\gamma^5 + \gamma^5\gamma^1 = i(-\gamma^0\gamma^2\gamma^3 + \gamma^0\gamma^2\gamma^3) = \mathbf{0} . \quad (2.41)$$

In seguito effettueremo frequentemente manipolazioni simili, che non staremo a illustrare in dettaglio ogni volta.

Per il quadrato della matrice  $\gamma^5$  abbiamo

$$(\gamma^5)^2 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -(-1)^{3+2+1}(\gamma^0)^2(\gamma^1)^2(\gamma^2)^2(\gamma^3)^2 = \mathbf{1} , \quad (2.42)$$

dove nel secondo passaggio abbiamo tenuto conto del numero di scambi necessari per portare vicine le due  $\gamma^0$ , poi le due  $\gamma^1$  e infine le due  $\gamma^2$  e nel terzo passaggio abbiamo usato le relazioni (2.33).

### 2.2.1 Rappresentazioni esplicite dell'algebra di Clifford

L'algebra di Clifford può essere realizzata solo in spazi vettoriali di dimensione pari. Infatti, notando che (per  $\nu \neq \mu$ ):

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu = -\mathbf{1}\gamma^\nu\gamma^\mu \Rightarrow \text{Det}\gamma^\mu\text{Det}\gamma^\nu = \text{Det}[-\mathbf{1}]\text{Det}\gamma^\nu\text{Det}\gamma^\mu ,$$

e sapendo che  $\text{Det}[-\mathbf{1}] = (-1)^N$ , dove  $N$  è la dimensionalità della matrice, si vede chiaramente che  $N$  deve essere pari. Quindi la minima dimensione dello spazio vettoriale

in cui si può realizzare consistentemente l'algebra di Clifford è due. Un esempio di questo caso è dato dalle matrici di Pauli che soddisfano l'analogo tre-dimensionale, con metrica euclidea, dell'algebra di Clifford vista in Eq.(2.31):

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij}\mathbb{1} , \quad (2.43)$$

con  $i, j = 1, 2, 3$ , come è facile controllare a partire dalle loro espressioni esplicite (1.37). La realizzazione rilevante delle matrici  $\gamma^\mu$  per l'equazione di Dirac in uno spazio-tempo quadri-dimensionale (cioè con  $\mu = 0, 1, 2, 3$  e dove quindi sono presenti 4 matrici  $\gamma^\mu$ ) è di dimensione quattro. Infatti esistono solo tre matrici  $2 \times 2$  mutuamente anticommutanti e non è possibile trovare una quarta matrice indipendente da quelle di Pauli. Non essendo possibile  $N = 3$ , in quanto dispari, dobbiamo considerare ciascuna  $\gamma^\mu$  essere una matrice  $4 \times 4$ .

Sfruttando le relazioni delle matrici di Pauli in Eq. 2.43 è possibile però individuare delle rappresentazioni dell'algebra di Clifford quadri-dimensionale (2.31) tramite matrici  $4 \times 4$  organizzate in blocchi  $2 \times 2$ .

**Rappresentazione di Dirac** In questa rappresentazione si sceglie

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix} , \quad (2.44)$$

con  $i = 1, 2, 3$ . L'espressione esplicita della matrice di chiralità si ottiene inserendo nella (2.37) le matrici (2.44) ed effettuandone il prodotto. Tenendo conto che  $\sigma^1\sigma^2\sigma^3 = i\mathbb{1}$  si ottiene

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} . \quad (2.45)$$

Controlliamo ora che queste matrici soddisfano tutte le relazioni di anticommutazioni dell'algebra di Clifford (2.31). Si ha

$$(\gamma^0)^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \mathbb{1} . \quad (2.46)$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \{\gamma^0, \gamma^i\} &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^i \\ \sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0} . \end{aligned} \quad (2.47)$$

Infine si ha anche

$$\begin{aligned} \{\gamma^i, \gamma^j\} &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^j \\ -\sigma^j & \mathbf{0} \end{pmatrix} + (i \leftrightarrow j) = \begin{pmatrix} -\sigma^i\sigma^j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma^i\sigma^j \end{pmatrix} + (i \leftrightarrow j) \\ &= - \begin{pmatrix} \{\sigma^i, \sigma^j\} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \{\sigma^i, \sigma^j\} \end{pmatrix} = -2\delta^{ij} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{1} \end{pmatrix} = 2\eta^{ij}\mathbb{1} , \end{aligned} \quad (2.48)$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo utilizzato la (2.43).

Le proprietà di hermiticità (2.34) sono automaticamente soddisfatte in virtù dell'algebra di Clifford, ed in effetti è evidente in questa rappresentazione che  $\gamma^0$  è hermitiana mentre le  $\gamma^i$ , con  $i = 1, 2, 3$ , sono anti-hermitiane (ricordiamo che  $(\sigma^i)^\dagger = \sigma^i$ ).

**Rappresentazione di chiralità (Weyl)** È possibile rappresentare l'algebra di Clifford anche tramite la seguente scelta di matrici:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

che implica

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

In questa base, la matrice  $\gamma^5$  è dunque diagonale e ciò rende agevole maneggiare con proiezioni chirali (molto rilevanti nell'ambito delle interazioni deboli, non trattate in questo insegnamento).

### 2.2.2 Covarianza relativistica e trasformazioni degli spinori di Dirac

Abbiamo visto che le matrici  $\gamma$  forniscono una rappresentazione matriciale dell'algebra di Clifford (2.31) sullo spazio vettoriale della funzione d'onda  $\psi$  e la funzione d'onda  $\psi$  è un vettore a quattro componenti.

Consideriamo ora le trasformazioni del gruppo di Lorentz. In generale dobbiamo ammettere la possibilità che esse, oltre ad agire sul quadrivettore di posizione  $x$ , agiscano sullo spazio vettoriale delle componenti di  $\psi$  tramite una loro rappresentazione matriciale. Dunque dobbiamo considerare che, sotto una trasformazione

$$x \rightarrow x' = \Lambda x \quad (2.51)$$

lo spinore trasformi come

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S_\Lambda \psi(x), \quad (2.52)$$

dove le matrici  $S_\Lambda$  devono fornire una rappresentazione del gruppo di Lorentz, cioè si deve avere

$$S_{\Lambda_1} S_{\Lambda_2} = S_{\Lambda_1 \Lambda_2} \quad (2.53)$$

e  $S_\Lambda$  deve essere invertibile. Vogliamo ora determinare la forma di tali matrici  $S_\Lambda$ . Iniziamo considerando l'azione di una trasformazione di Lorentz sull'equazione di Dirac:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \rightarrow (i\gamma^\mu \partial_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu - m) S_\Lambda \psi, \quad (2.54)$$

dove abbiamo tenuto conto della trasformazione (1.70) delle derivate  $\partial_\mu$  e della (2.52). L'equazione di Dirac è covariante se quando è soddisfatta in un sistema di riferimento lo è anche dopo una trasformazione di Lorentz, cioè se vale la condizione

$$(i\gamma^\mu \partial_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu - m) S_\Lambda \psi = 0 . \quad (2.55)$$

Moltiplicando a sinistra per  $S_\Lambda^{-1}$  e usando  $i\gamma^\nu \partial_\nu \psi = m\psi$ :

$$S_\Lambda^{-1} \gamma^\mu \partial_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu S_\Lambda \psi - \gamma^\nu \partial_\nu \psi = 0 , \quad (2.56)$$

da cui otteniamo

$$S_\Lambda^{-1} \gamma^\mu S_\Lambda = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu . \quad (2.57)$$

Il membro di sinistra rappresenta la usuale trasformazione di un operatore lineare – quali sono la matrici  $\gamma^\mu$  – sullo spazio spinoriale, quando si agisce su quest'ultimo con la trasformazione  $S_\Lambda$ . La richiesta è che l'effetto sia lo stesso di ruotare l'indice  $\mu$  delle matrici  $\gamma$  come un usuale indice controvariante.

**Trasformazioni proprie di Lorentz** Per trovare ora la forma esplicita di  $S_\Lambda$  consideriamo la trasformazione infinitesima:

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu \quad \text{con } |\omega^\mu_\nu| \ll 1 \quad (2.58)$$

dove  $\omega^\mu_\nu$  descrive una piccola variazione dalla trasformazione identica. Essendo una trasformazione propria di Lorentz si ha

$$\eta_\alpha^\beta \equiv \Lambda^\mu_\alpha \Lambda_\mu^\beta = (\eta^\mu_\alpha + \omega^\mu_\alpha)(\eta_\mu^\beta + \omega_\mu^\beta) \simeq \eta_\alpha^\beta + \omega_\alpha^\beta + \omega^\beta_\alpha$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo mantenuto solo i termini al prim'ordine. Affinchè l'uguaglianza sia verificata deve chiaramente valere  $\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}$ , cioè il tensore  $\omega^{\mu\nu}$  deve essere antisimmetrico e contiene dunque 6 parametri. Ciò non è sorprendente, sono i parametri che definiscono boost e rotazioni.

La trasformazione infinitesima (2.58) ci permette di scrivere:

$$S_\Lambda = \mathbb{1} + \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu} \quad ; \quad S_\Lambda^{-1} = \mathbb{1} - \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}$$

dove le matrici ( $4 \times 4$ )  $\Sigma_{\mu\nu}$  sono le incognite da determinare per ottenere la forma esplicita di  $S_\Lambda$ . Inserendo queste scritte di  $S_\Lambda$ ,  $S_\Lambda^{-1}$  nella (2.57) otteniamo:

$$\left( \mathbb{1} - \frac{1}{2} \omega^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta} \right) \gamma^\mu \left( \mathbb{1} + \frac{1}{2} \omega^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta} \right) = (\eta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu) \gamma^\nu$$

che, al primo ordine, diventa:

$$\gamma^\mu + \frac{1}{2} \omega^{\alpha\beta} (\gamma^\mu \Sigma_{\alpha\beta} - \Sigma_{\alpha\beta} \gamma^\mu) = \gamma^\mu + \omega^\mu_\nu \gamma^\nu$$

cioè:

$$\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}[\gamma^\mu, \Sigma_{\alpha\beta}] = \omega^\mu{}_\nu\gamma^\nu$$

Questa equazione è soddisfatta se:

$$\Sigma^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{4}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \quad (2.59)$$

Infatti, partendo da

$$\Sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{4}(\gamma^\alpha\gamma^\beta - \gamma^\beta\gamma^\alpha) = \frac{1}{4}[\gamma^\alpha\gamma^\beta - (2\eta^{\alpha\beta}\mathbb{1} - \gamma^\alpha\gamma^\beta)] = \frac{1}{2}(\gamma^\alpha\gamma^\beta - \eta^{\alpha\beta}\mathbb{1})$$

Vediamo ora che:

$$\begin{aligned} [\gamma^\mu, \Sigma_{\alpha\beta}] &= \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma_\alpha\gamma_\beta - \eta_{\alpha\beta}\mathbb{1}] = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma_\alpha\gamma_\beta] = \frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma_\alpha\}\gamma_\beta - \frac{1}{2}\gamma_\alpha\{\gamma^\mu, \gamma_\beta\} \\ &= \eta^\mu{}_\alpha\gamma_\beta - \eta^\mu{}_\beta\gamma_\alpha \end{aligned}$$

avendo usato  $[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\}$ . Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}[\gamma^\mu, \Sigma_{\alpha\beta}] &= \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}(\eta^\mu{}_\alpha\gamma_\beta - \eta^\mu{}_\beta\gamma_\alpha) = \frac{1}{2}(\omega^{\mu\beta}\gamma_\beta - \omega^{\alpha\mu}\gamma_\alpha) = \frac{1}{2}(\omega^{\mu\beta}\gamma_\beta + \omega^{\mu\alpha}\gamma_\alpha) \\ &= \omega^\mu{}_\nu\gamma^\nu \end{aligned}$$

che dimostra che esistono matrici  $\Sigma^{\alpha\beta}$  (introdotte in eq. (2.59)) che fanno sì che le matrici  $S_\Lambda$  soddisfino eq. (2.57), necessaria per la covarianza dell'equazione di Dirac. Abbiamo così ottenuto che, sotto l'effetto di una trasformazione propria di Lorentz, lo spinore  $\psi(x)$  cambia in:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x') = S_\Lambda\psi(x) \quad (2.60)$$

con matrice di trasformazione di Lorentz infinitesima:

$$S_\Lambda = \mathbb{1} + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu} = \mathbb{1} + \frac{1}{8}\omega_{\mu\nu}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (2.61)$$

da cui è possibile derivare la matrice di trasformazione di Lorentz finita:

$$S_\Lambda = \exp\left(\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}\right). \quad (2.62)$$

**Trasformazione di parità** Anche le trasformazioni improprie del gruppo di Lorentz ammettono una rappresentazione sugli spinori, che deve soddisfare la proprietà (2.57). Siccome le trasformazioni improprie possono essere ottenute componendo una trasformazione propria e una di parità, è sufficiente indicare la forma della trasformazione di parità sugli spinori, che chiamiamo  $S_P$ . La trasformazione di parità consiste nell'inversione spaziale  $x \longrightarrow x' = (t, -\vec{x})$  e la matrice  $\Lambda_P$  della trasformazione è data da

$$\Lambda_P \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La condizione (2.57)

$$S_P^{-1} \gamma^\mu S_P = (\Lambda_P)^\mu{}_\nu \gamma^\nu \quad (2.63)$$

diventa quindi

$$S_P^{-1} \gamma^0 S_P = \gamma^0, \quad S_P^{-1} \gamma^i S_P = -\gamma^i. \quad (2.64)$$

Tenendo conto dell'algebra di Dirac, è evidente che queste condizioni sono soddisfatte da

$$S_P = \eta_P \gamma^0. \quad (2.65)$$

Infatti, la normalizzazione  $\eta_P$  si cancella e

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^{-1} \gamma^0 \gamma^0 &= \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0, \\ (\gamma^0)^{-1} \gamma^0 \gamma^i &= \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^i \gamma^0 = -\gamma^i. \end{aligned} \quad (2.66)$$

La normalizzazione  $\eta_P$  non è determinata dalle richieste (2.64), ma essendo la matrice  $S_P$  unitaria, si ottiene che essa deve essere una fase:

$$S_P^2 = \mathbb{1} \Rightarrow |\eta_P| = 1 \Rightarrow \eta_P = e^{i\phi_P}, \quad (2.67)$$

con  $\phi_P$  reale. L'angolo  $\phi_P$  è detto parità intrinseca della particella spinoriale in questione.

**Trasformazione delle matrici  $\gamma^{\mu\nu}$**  Definiamo le matrici  $\gamma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2\Sigma^{\mu\nu}$ . Esse trasformano in modo semplice sotto il gruppo di Lorentz. Infatti usando

$$S_\Lambda^{-1} \gamma^{\mu\nu} S_\Lambda = S_\Lambda^{-1} \gamma^{[\mu} \gamma^{\nu]} S_\Lambda, \quad (2.68)$$

dove con le parentesi quadre indichiamo l'antisimmetrizzazione degli indici, e sfruttando Eq. (2.57),

$$S_\Lambda^{-1} \gamma^{\mu\nu} S_\Lambda = S_\Lambda^{-1} \gamma^{[\mu} S_\Lambda S_\Lambda^{-1} \gamma^{\nu]} S_\Lambda = \Lambda^{[\mu}{}_\rho \gamma^\rho \Lambda^{\nu]}{}_\sigma \gamma^\sigma = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \gamma^{\rho\sigma}. \quad (2.69)$$

Il risultato corrisponde alla trasformazione di un tensore di rango due, coerentemente col fatto che le matrici  $\gamma^{\mu\nu}$  sono proporzionali ai generatori delle trasformazioni proprie di Lorentz  $\Sigma^{\mu\nu}$ . La proprietà (2.69) vale anche per trasformazioni improprie quali la parità.

**Trasformazione della matrice  $\gamma^5$**  Anche la matrice di chiralità  $\gamma^5$  trasforma come appropriato ad un operatore sullo spazio spinoriale. Sotto trasformazioni di Lorentz avremo dunque

$$\gamma^5 \rightarrow S_{\Lambda}^{-1} \gamma^5 S_{\Lambda} . \quad (2.70)$$

Per trasformazioni proprie, usando Eq. (2.61), abbiamo, in modo analogo al caso delle  $\gamma^{\mu}$ ,

$$S_{\Lambda}^{-1} \gamma^5 S_{\Lambda} = \gamma^5 - \frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} [\Sigma^{\rho\sigma}, \gamma^5] . \quad (2.71)$$

Sfruttando la relazione di anticommutazione (2.39) abbiamo

$$[\gamma^{\mu\nu}, \gamma^5] = \gamma^{\mu\nu} \gamma^5 - \gamma^5 \gamma^{\mu\nu} = 0 , \quad (2.72)$$

dato che il secondo contributo diventa uguale al primo quando la matrice  $\gamma^5$  scavalca due matrici  $\gamma$ , e pertanto la matrice di chiralità è invariante per trasformazioni proprie di Lorentz:

$$S_{\Lambda}^{-1} \gamma^5 S_{\Lambda} = \gamma^5 . \quad (2.73)$$

Sotto una trasformazione di parità si ha invece

$$S_P^{-1} \gamma^5 S_P = \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 = -\gamma^5 . \quad (2.74)$$

La matrice  $\gamma^5$  si comporta quindi come uno pseudo-scalare: è invariante per trasformazioni proprie, ma cambia segno sotto parità. Altri esempi di pseudoscalari sono la misura di integrazione  $d^4x$  o il prodotto tra tensore e duale elettromagnetici  $\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ .

### 2.2.3 Lo spinore aggiunto

I generatori spinoriali dell'algebra di Lorentz godono della seguente proprietà di hermiticità:

$$(\Sigma^{\mu\nu})^{\dagger} = -\gamma^0 \Sigma^{\mu\nu} \gamma^0 . \quad (2.75)$$

Infatti, i generatori sono proporzionali a  $\gamma^{\mu\nu}$  e, usando la proprietà di hermiticità delle matrici gamma (2.34), si ha

$$\begin{aligned} (\gamma^{\mu\nu})^{\dagger} &= \frac{1}{2} (\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} - \gamma^{\nu} \gamma^{\mu})^{\dagger} = \frac{1}{2} (\gamma^{\nu\dagger} \gamma^{\mu\dagger} - \gamma^{\mu\dagger} \gamma^{\nu\dagger}) \\ &= \frac{1}{2} (\gamma^0 \gamma^{\nu} \gamma^0 \gamma^0 \gamma^{\mu} \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^{\mu} \gamma^0 \gamma^0 \gamma^{\nu} \gamma^0) = \frac{1}{2} \gamma^0 (\gamma^{\nu} \gamma^{\mu} - \gamma^{\mu} \gamma^{\nu}) \gamma^0 \\ &= -\gamma^0 \gamma^{\mu\nu} \gamma^0 . \end{aligned} \quad (2.76)$$

Dalle (2.52) e (2.61) troviamo che una trasformazione infinitesima di Lorentz agisce sullo spinore  $\psi$  come

$$\psi \rightarrow \psi + \frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} \Sigma^{\rho\sigma} \psi . \quad (2.77)$$



Lo spinore hermitiano coniugato trasforma come

$$\psi^\dagger \rightarrow \psi^\dagger + \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\psi^\dagger (\Sigma^{\rho\sigma})^\dagger = \psi^\dagger - \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\psi^\dagger \gamma^0 \Sigma^{\rho\sigma} \gamma^0 . \quad (2.78)$$

Se introduciamo lo *spinore aggiunto*

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 , \quad (2.79)$$

esso ha una trasformazione semplice:

$$\bar{\psi} \rightarrow \left( \psi^\dagger - \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\psi^\dagger \gamma^0 \Sigma^{\rho\sigma} \gamma^0 \right) \gamma^0 = \bar{\psi} - \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\bar{\psi} \Sigma^{\rho\sigma} . \quad (2.80)$$

Questa è l'espansione al prim'ordine dell'inverso della trasformazione di  $\psi$ . A livello finito, tramite la mappa esponenziale, si ha

$$\psi \rightarrow S_\Lambda \psi , \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} S_\Lambda^{-1} . \quad (2.81)$$

Chiaramente si può dimostrare quanto sopra anche partendo direttamente da una trasformazione finita di matrice  $S_\Lambda$ .

Anche sotto una trasformazione di parità si ha

$$\psi \rightarrow S_P \psi , \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} S_P^{-1} . \quad (2.82)$$

Infatti dalla (2.65) segue che

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \rightarrow (S_P \psi)^\dagger \gamma^0 = e^{-i\phi_P} \psi^\dagger (\gamma^0)^\dagger \gamma^0 = e^{-i\phi_P} \bar{\psi} \gamma^0 = \bar{\psi} S_P^{-1} . \quad (2.83)$$

### 2.2.4 Bilineari spinoriali

Le proprietà di trasformazione di  $\psi$  e del suo aggiunto  $\bar{\psi}$  consentono di definire delle quantità bilineari nelle componenti spinoriali che godono di semplici proprietà di trasformazione sotto il gruppo di Lorentz. Queste quantità compariranno spesso nel calcolo di processi d'urto.

Notiamo innanzitutto che, per una qualsiasi matrice  $A$ , sotto una trasformazione di Lorentz propria o impropria abbiamo

$$\bar{\psi} A \psi \rightarrow \bar{\psi}' A \psi' = \bar{\psi} S_\Lambda^{-1} A S_\Lambda \psi . \quad (2.84)$$

Le proprietà di trasformazione di quest'espressione sono dunque determinate immediatamente da quelle della matrice  $A$ .

Dato che lo spinore  $\psi$  ha quattro componenti  $\psi_\alpha$ , un bilineare  $\psi_\alpha^* \psi_\beta$  ha 16 componenti. Possiamo organizzare queste 16 quantità in

- $\bar{\psi} \psi$ , che è un'invariante: corrisponde al caso  $A = \mathbb{1}$  nella (2.84).
- $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ , che è un vettore in quanto le (2.57) e (2.63) mostrano che la matrice  $\gamma^\mu$  si trasforma come tale.

- $\bar{\psi}\gamma^{\mu\nu}\psi$ , che è un tensore antisimmetrico di rango due siccome la (2.69) mostra che la matrice  $\gamma^{\mu\nu}$  si trasforma come tale. Ha quindi  $(4 \times 3)/2 = 6$  componenti.
- $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ , che è uno pseudo-scalare dato che le equazioni (2.73) e (2.74) dicono che  $\gamma^5$  lo è.
- $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ , che è uno pseudo-vettore. Infatti sotto una trasformazione propria abbiamo, dalla (2.84)

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'\gamma^\mu\gamma^5\psi' &= \bar{\psi}S_\Lambda^{-1}\gamma^\mu\gamma^5S_\Lambda\psi' = \bar{\psi}S_\Lambda^{-1}\gamma^\mu S_\Lambda S_\Lambda^{-1}\gamma^5 S_\Lambda\psi' \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\psi}\gamma^\nu\gamma^5\psi ,\end{aligned}\tag{2.85}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato le equazioni (2.57) e(2.73). Sotto una trasformazione di parità abbiamo invece

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'\gamma^\mu\gamma^5\psi' &= \bar{\psi}S_P^{-1}\gamma^\mu S_P S_P^{-1}\gamma^5 S_P\psi' \\ &= -(\Lambda_P)^\mu{}_\nu \bar{\psi}\gamma^\nu\gamma^5\psi .\end{aligned}\tag{2.86}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo utilizzato le equazioni (2.63) e(2.74). Le componenti spaziali sono invarianti, mentre quella temporale cambia segno. Una quantità con queste proprietà di trasformazione è detta anche (quadri)vettore assiale.

Notiamo che il bilineare  $\bar{\psi}\gamma^{\mu\nu}\gamma^5\psi$  non è indipendente. Infatti vale la proprietà

$$\gamma^{\mu\nu}\gamma^5 = -\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_{\rho\sigma} .\tag{2.87}$$

Ad esempio, ricordando la definizione (2.37) della matrice  $\gamma^5$ ,

$$\begin{aligned}\gamma^{01}\gamma^5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma^0\gamma^0\gamma^1\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i\gamma^2\gamma^3 \\ &= -ie^{0123}\gamma_2\gamma_3 = -\frac{i}{2}\epsilon^{01\rho\sigma}\gamma_\rho\gamma_\sigma .\end{aligned}\tag{2.88}$$

### 2.2.5 Equazione di continuità per l'equazione di Dirac

Vogliamo ora mostrare come sia possibile formulare per l'equazione di Dirac una corretta equazione di continuità per la densità di corrente di probabilità, richiesta che l'equazione di Klein-Gordon non era in grado di soddisfare.

Introduciamo una densità di probabilità (definita positiva), combinando gli spinori di Dirac, attraverso  $\rho = \psi^\dagger\psi = \bar{\psi}\gamma^0\psi$ , in analogia alla formulazione di Schrödinger in meccanica quantistica non relativistica. Possiamo ora interpretare come densità di corrente di probabilità la parte spaziale  $j^i \equiv \bar{\psi}\gamma^i\psi$  e chiederci se vale l'equazione di continuità di forma:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 .$$

Dobbiamo quindi dimostrare che il bilineare

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi , \quad (2.89)$$

che abbiamo appena mostrato essere un quadrivettore covariante, rappresenta una corrente conservata quando lo spinore  $\psi$  soddisfa l'equazione di Dirac, cioè che in questo caso vale

$$\partial_\mu j^\mu = 0 . \quad (2.90)$$

Prendiamo l'hermitiano coniugato dell'equazione di Dirac  $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0$ , ottenendo l'equazione

$$-i\partial_\mu \psi^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger - m\psi^\dagger = 0 . \quad (2.91)$$

Moltiplicando sulla destra per  $\gamma^0$ , e cambiando di segno, otteniamo l'equazione soddisfatta dallo spinore aggiunto:

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^0 (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 + m\bar{\psi} = 0 \quad (2.92)$$

che diventa, tenendo conto della proprietà di hermiticità (2.34),

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 . \quad (2.93)$$

Possiamo ora valutare

$$\partial_\mu j^\mu = (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) \quad (2.94)$$

nell'ipotesi che valgano l'equazione di Dirac e l'hermitiano coniugato (2.93)

$$\partial_\mu j^\mu = im\bar{\psi}\psi - im\bar{\psi}\psi = 0 . \quad (2.95)$$

## 2.3 Soluzioni dell'equazione di Dirac

Ritorniamo ora allo studio dell'equazione di Dirac per la particella libera:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

Come abbiamo già osservato, essendo le  $\gamma^\mu$  rappresentabili come matrici  $(4 \times 4)$ , le soluzioni  $\psi(x)$  devono necessariamente avere la forma di spinori a quattro componenti. Inoltre, avendo ricavato l'equazione di Dirac usando la relazione tra energia e impulso  $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ , ci aspettiamo che, come nel caso dell'equazione di Klein-Gordon, compaiano soluzioni con energia positiva e negativa.

Le soluzioni dell'equazione di Dirac per una particella libera possono essere scritte come onde piane nella forma:

$$\psi(x) = \begin{cases} u_s(p) e^{-ip \cdot x} \\ v_s(p) e^{ip \cdot x} \end{cases} \quad s = 1, 2 \quad (2.96)$$

dove  $u_s$  e  $v_s$  sono matrici colonna ( $4 \times 1$ ) dette **spinori di Dirac**. Sarà chiara tra poco la ragione per cui ammettiamo due soluzioni di ciascun tipo (cioè  $s = 1, 2$ ). È immediato verificare che tali spinori soddisfino le equazioni:

$$(\not{p} - m)u_s(p) = 0 \quad ; \quad (\not{p} + m)v_s(p) = 0 \quad (2.97)$$

dove abbiamo introdotto la notazione “*slashed*” per la quale scriviamo la contrazione di un operatore  $a_\mu$  con le matrici  $\gamma^\mu$  come:

$$\not{a} \equiv \gamma^\mu a_\mu = a_\mu \gamma^\mu \quad (2.98)$$

Verifichiamo facilmente che le onde piane (2.96) soddisfino le (2.97):

$$\begin{aligned} 0 &= (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) u_s e^{-ip_\mu x^\mu} = [i\gamma^\mu (-ip_\mu) - m] u_s e^{-ip_\mu x^\mu} \\ &= (\gamma^\mu p_\mu - m) u_s e^{-ip \cdot x} = (\not{p} - m) u_s e^{-ip \cdot x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) v_s e^{ip_\mu x^\mu} = [i\gamma^\mu (ip_\mu) - m] v_s e^{ip_\mu x^\mu} \\ &= -(\gamma^\mu p_\mu + m) v_s e^{ip \cdot x} = -(\not{p} + m) v_s e^{ip \cdot x} \end{aligned}$$

Lavorando nella rappresentazione di Dirac, dove abbiamo scritto le  $\gamma^\mu$  come matrici a blocchi  $2 \times 2$ , è conveniente scrivere gli spinori a 4 componenti come la composizione di due spinori a 2 componenti, cioè:

$$u^s = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \chi^{u_s} \\ \phi^{u_s} \end{pmatrix} ; \quad v^s = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \chi^{v_s} \\ \phi^{v_s} \end{pmatrix} , \quad (2.99)$$

dove  $\chi$  e  $\phi$  sono spinori a due componenti e abbiamo introdotto un fattore di normalizzazione  $\sqrt{E + m}$ . Richiedendo che tali spinori soddisfino l'equazione di Dirac si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= (\not{p} - m)u_s = (E\gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - m\mathbf{1}) \begin{pmatrix} \chi^{u_s} \\ \phi^{u_s} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow E \begin{pmatrix} \chi^{u_s} \\ -\phi^{u_s} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m\mathbf{1} & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} & m\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{u_s} \\ \phi^{u_s} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} E \chi^{u_s} = m \chi^{u_s} + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \phi^{u_s} \\ E \phi^{u_s} = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi^{u_s} - m \phi^{u_s} \end{cases} & \quad (2.100) \end{aligned}$$

Dalla seconda ricaviamo

$$\phi^{u_s} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi^{u_s} ,$$

che inserita nella prima restituisce la relazione relativistica  $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ . In quest'ultimo passaggio bisogna utilizzare  $(\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^2 = \vec{p}^2 \mathbf{1}$ . Dimostriamola (sarà utile più volte in quanto segue):

$$(\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^2 = (p_x \sigma_x + p_y \sigma_y + p_z \sigma_z)^2 = \sum_i p_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j} p_i p_j (\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i)$$

e dalle proprietà delle matrici di Pauli  $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$ ,  $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 0$  segue subito:

$$(\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^2 = \sum_i p_i^2 \mathbb{1} = \vec{p}^2 \mathbb{1}$$

Abbiamo quindi ottenuto che la soluzione  $u^s$  può essere scritta in termini di uno spinore arbitrario a 2 componenti. Chiaramente possiamo avere però solamente due scelte linearmente indipendenti, da cui  $s = 1, 2$ . Consideriamo d'ora in poi due spinori ortogonali e unitari.

Relativamente alla normalizzazione, è immediato notare che uno spinore soluzione dell'equazione di Dirac continua a soddisfare l'equazione anche se moltiplicato per un fattore di fase  $e^{i\alpha}$ . Il fattore  $\sqrt{E+m}$  che compare nelle espressioni degli spinori  $u_s$  e  $v_s$  è invece legato alla scelta della normalizzazione:

$$u_s^\dagger u_{s'} = 2E\delta_{ss'} \quad ; \quad v_s^\dagger v_{s'} = 2E\delta_{ss'} \quad (2.101)$$

Verifichiamo la normalizzazione appena introdotta: <sup>2</sup>

$$\begin{aligned} u_s^\dagger u_{s'} &= (m+E) \begin{pmatrix} \chi^{s\dagger} & \chi^{s\dagger} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{s'} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^{s'} \end{pmatrix} \\ &= (m+E) \left( \chi^{s\dagger} \chi^{s'} + \chi^{s\dagger} \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{(E+m)^2} \chi^{s'} \right) \\ &= (m+E) \left( \delta_{ss'} + \frac{\vec{p}^2}{(E+m)^2} \chi^{s\dagger} \mathbb{1} \chi^{s'} \right) \\ &= \delta_{ss'} (m+E) \left( 1 + \frac{\vec{p}^2}{(E+m)^2} \right) = 2E\delta_{ss'} \end{aligned}$$

dove nel primo passaggio abbiamo utilizzato l'hermiticità delle matrici di Pauli  $\sigma^\dagger = \sigma$ . Procedendo in maniera assolutamente analoga a quanto visto per  $u_s$  anche per  $v_s$  si arriva a scrivere:

$$u_s(p) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \chi^{u_s} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^{u_s} \end{pmatrix} ; \quad v_s(p) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^{v_s} \\ \chi^{v_s} \end{pmatrix}. \quad (2.102)$$

Introduciamo ora gli **spinori aggiunti**:

$$\bar{u}_s(p) \equiv u_s^\dagger(p) \gamma^0 \quad ; \quad \bar{v}_s(p) \equiv v_s^\dagger(p) \gamma^0 \quad (2.103)$$

i quali soddisfano le equazioni:

$$\bar{u}_s(p) (\not{p} - m) = 0 \quad ; \quad \bar{v}_s(p) (\not{p} + m) = 0 \quad (2.104)$$

---

<sup>2</sup>Essendo un prodotto matriciale è importante non confondere l'ordine corretto  $u^\dagger u$  con  $uu^\dagger$  che, ovviamente non restituisce un numero ma una matrice  $4 \times 4$ .

come è semplice dimostrare considerando l'hermitiana coniugata delle (2.97) e moltiplicando a destra per  $\gamma^0$ :

$$0 = u^\dagger (\gamma^{\mu\dagger} p_\mu - m) \gamma^0 = u^\dagger (\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^0 p_\mu - \gamma^0 m) = u^\dagger \gamma^0 (\gamma^\mu p_\mu - m)$$

Le condizioni di normalizzazione (2.101) vengono così riscritte per mezzo degli spinori aggiunti attraverso una condizione Lorentz-invariante:

$$\bar{u}_s u_{s'} = 2m \delta_{ss'} \quad ; \quad \bar{v}_s v_{s'} = -2m \delta_{ss'} \quad (2.105)$$

Dimostriamo la prima delle (2.105):

$$\begin{aligned} \bar{u}_s u_{s'} &= (E+m) \begin{pmatrix} \chi^{s\dagger} & \chi^{s\dagger} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{s'} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^{s'} \end{pmatrix} \\ &= (E+m) \begin{pmatrix} \chi^{s\dagger} & -\chi^{s\dagger} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{s'} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^{s'} \end{pmatrix} \\ &= (E+m) \chi^{s\dagger} \chi^{s'} \left( 1 - \frac{\vec{p}^2}{(E+m)^2} \right) \\ &= \delta_{ss'} \left( E+m - \frac{E^2 - m^2}{E+m} \right) \\ &= 2m \delta_{ss'} \end{aligned}$$

In modo del tutto analogo si dimostra anche la seconda delle (2.105).

Notiamo infine, in maniera immediata dalle definizioni in (2.102), che gli spinori  $u$  e  $v$  sono ortogonali, cioè:

$$\bar{u}_s v_{s'} = \bar{v}_s u_{s'} = 0. \quad (2.106)$$

Con queste definizioni è anche immediato verificare che la conservazione della quadricorrente, eq. 2.90, per una particella libera equivale alla conservazione dell'energia e all'invarianza spaziale dell'impulso. Infatti  $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \bar{u} \gamma^\mu u = 2p^\mu$ , avendo usato  $\psi = u e^{-ip \cdot x}$  e l'equazione di Dirac (da cui  $\bar{u} \gamma^\mu = \bar{u} p^\mu / m$ ). La conservazione di  $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  implica quindi  $\partial_\mu p^\mu = 0$ .

## 2.4 Considerazioni fisiche sull'equazione di Dirac

Come possiamo interpretare le quattro soluzioni dell'equazione di Dirac, descritte in Eq. (2.96), in termini di particelle fisiche?

Le soluzioni di tipo  $u_s$  hanno una diretta interpretazione: è presente infatti la dipendenza spaziale  $e^{-ip \cdot x}$  di un'onda piana rappresentante una particella con impulso  $\vec{p}$  ed energia  $E$ . Lo spinore  $u_s$  definito in (2.102), scritto per una particella a riposo con  $\vec{p} = 0$ , assume la forma:

$$u_{1,2} = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi^{u_1, u_2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per una particella a riposo, i gradi di libertà sono dati dallo spin. E' dunque naturale interpretare lo spinore  $\chi^{u_s}$  a 2 componenti come la parte che descrive lo stato di spin del sistema. Possiamo, per ricondurci a quanto già noto dalla meccanica quantistica non-relativistica, scegliere  $\chi^{u_1, u_2}$  nella forma dei due autostati dell'operatore di spin della MQ, in particolare considerando l'usuale base, in cui l'operatore terza componente  $\hat{S}_z$  è diagonale. Identifichiamo quindi  $\chi^{u_s}$  con tali vettori:

$$\chi^{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{quindi} \quad u_1 = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi lo spinore  $u_\uparrow \equiv u_1$  che descrive una particella a spin 1/2 con spin "up" (cioè  $s_z = +1/2$ ) e lo spinore  $u_\downarrow \equiv u_2$  che descrive il caso con spin "down" ( $s_z = -1/2$ ). Le soluzioni  $\psi = u_{1,2} e^{-ip \cdot x}$  rappresentano quindi, in modo relativistico, particelle libere di spin 1/2 e quadrimpulso  $p^\mu$ . E' importante sottolineare come la considerazioni di Dirac, descritte ad inizio sezione, portino ad una (semplice) equazione le cui soluzioni contengono automaticamente il grado di libertà di spin, che in meccanica quantistica non relativistica andava invece inserito ad hoc.

Come interpretare ora le soluzioni di tipo  $v_s$ ? Ad esse è associata un'onda piana con quadrimpulso opposto rispetto a quelle appena viste, cioè con  $p^\mu \rightarrow -p^\mu$ . Considerando il caso a riposo si ha:

$$v_{1,2} = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{v_1, v_2} \end{pmatrix}$$

Siccome energia e impulso sono opposti scegliamo gli spinori  $\chi^{v_s}$  in maniera opposta rispetto al caso  $u_s$ , cioè

$$\chi^{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi^{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{quindi} \quad v_1 = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Queste soluzioni sembrerebbero dunque descrivere particelle libere di spin 1/2, con valori opposti di energia (che diventa quindi negativa), impulso e terza componente dello spin rispetto alle particelle descritte dalle soluzioni  $u_s$ . Notiamo inoltre che gli stati  $u_s$  sono ortogonali agli stati  $v_s$ . Si può concludere che la dimensione 4 alla base della struttura spinoriale alla Dirac è dovuta al fatto che lo spinore di Dirac descrive proprietà intrinseche di spin 1/2 e stati energetici di duplice segno.

La presenza di stati ad energia negativa sembra problematica. Implicherebbe la possibilità per uno stato con energia positiva di transire ad uno stato di energia negativa (e questo ad uno stato di energia ancora più negativa e così via, senza limite inferiore), cioè non esisterebbero stati stabili ad energia positiva. Per risolvere il problema Dirac ipotizzò che ciò che viene definito "vuoto" sia tale che tutti gli stati ad energia negativa sono occupati. Per il principio di esclusione di Pauli, uno stato ad energia positiva non

può quindi transire in uno di questi stati. L'assenza di uno stato ad energia negativa dal "mare di Dirac" (cioè dal vuoto definito da Dirac), implica uno stato che, rispetto al vuoto, ha l'energia (positiva) di una particella, carica opposta e spin opposto rispetto allo stato ad energia negativa (e da qui la scelta operata su  $\chi^{vs}$  rispetto a  $\chi^{us}$ ). Infatti creando una lacuna nel mare di Dirac, cioè sottraendo dal mare di Dirac una particella con energia  $-\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) si ha:

$$E = E_{\text{vuoto}} - (-\varepsilon) = E_{\text{vuoto}} + \varepsilon \Rightarrow E_{\text{oss}} = E - E_{\text{vuoto}} = \varepsilon ,$$

dove nel secondo passaggio abbiamo ridefinito la scala di energia, introducendo l'energia osservata  $E_{\text{oss}}$ . Procedendo in modo analogo per la carica, si ha:

$$Q = Q_{\text{vuoto}} - (-|e|) = Q_{\text{vuoto}} + |e| \Rightarrow Q_{\text{oss}} = Q - Q_{\text{vuoto}} = |e| .$$

Quindi lo stato (ad infinite particelle) costituito dal mare di Dirac con una lacuna di particella nel livello energetico  $-\varepsilon$  può essere interpretato come stato di particella (detta antiparticella) in un livello energetico  $\varepsilon$  e con carica  $-e = |e|$ . La massa dell'antiparticella dev'essere uguale a quella della particella.

La teoria di Dirac è stata introdotta nel 1928, l'interpretazione in termini del mare di Dirac del 1929, ma è poi nel 1931 che Dirac comprende che la sua teoria può essere riformulata interpretando le antiparticelle come particelle reali anzichè come assenza di una particella, e che il vuoto può quindi tornare ad essere considerato privo di particelle anzichè un mare infinito di particelle. Ciò permise di predire l'esistenza di una nuova particella che chiamò anti-elettrone (ora chiamata positrone), con uguale massa ma carica opposta rispetto agli elettroni. Le soluzioni ad energia negativa vengono quindi interpretate come **antiparticelle** aventi stessa energia, impulso e spin totale delle particelle già note ma con *carica opposta*. Il positrone fu scoperto sperimentalmente poco dopo, nel 1932 da Anderson.

L'idea di dover ricorrere ad un sistema a molti corpi (il mare di Dirac) per poter comprendere lo stato di singola particella libera ci instrada sulla via della teoria dei campi che vediamo nella sezione 3, e dove l'introduzione di particelle e antiparticelle di spin  $1/2$ , così come di particelle scalari, (a spin nullo, corrispondenti alle soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon) troverà una più naturale descrizione. L'ipotesi del mare di Dirac, oltre ad apparire poco naturale, non è applicabile a bosoni (per i quali non vale il principio di esclusione di Pauli) e dà luogo ad alcune inconsistenze.

## 2.5 Interazione elettromagnetica per le equazioni relativistiche

Concludiamo il capitolo discutendo come si modificano le equazioni relativistiche appena introdotte se, anzichè considerare il caso di particella libera, introduciamo l'interazione elettromagnetica. Per farlo ricorriamo al principio di gauge già discusso per l'equazione di Schrödinger nella sezione 1.5.1. Andiamo quindi a sostituire alla derivata ordinaria  $\partial^\mu$  la derivata covariante  $D^\mu$  la cui forma, per una particella di carica  $q$ , è stata introdotta in Eq. 1.176:

$$\partial^\mu \longrightarrow D^\mu \equiv \partial^\mu + iqA^\mu$$



Per l'equazione di Klein-Gordon  $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Phi(x, t) = 0$  (la quale fornisce l'equazione d'onda relativistica per particelle di spin 0, come vedremo meglio in seguito) si ha:

$$(D_\mu D^\mu + m^2)\Phi(x, t) = 0$$

cioè:

$$(\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial^\mu + iqA^\mu)\Phi + m^2\Phi = 0$$

da cui otteniamo l'**equazione di Klein-Gordon** in presenza di **interazioni elettromagnetiche**:

$$(\square + m^2)\Phi = -iq(\partial_\mu A^\mu + A_\mu \partial^\mu)\Phi + q^2 A_\mu A^\mu \Phi \quad (2.107)$$

Per l'equazione di Dirac  $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0$ , relativa a particelle di spin 1/2, otteniamo invece:

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi = 0$$

da cui l'**equazione di Dirac** in presenza di **interazioni elettromagnetiche**:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = q\mathcal{A}\Psi \quad (2.108)$$

dove  $\mathcal{A} = \gamma^\mu A_\mu$ . Si può verificare esplicitamente che le equazioni 2.107 e 2.108 sono invarianti per effetto delle trasformazioni congiunte di fase locale e potenziali:

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{x}, t) &\longrightarrow \Psi'(\vec{x}, t) = e^{i\alpha(\vec{x}, t)}\Psi(\vec{x}, t) \\ A^\mu &\longrightarrow A'^\mu = A^\mu - \frac{1}{q}\partial^\mu\alpha. \end{aligned}$$

Grazie a quanto appena introdotto possiamo calcolare il termine di interazione spin-orbita predetto dall'equazione di Dirac, che fu uno dei più grandi successi della teoria. Riprendiamo Eqs. 2.100, ora con le sostituzioni  $E \rightarrow E - eA^0$  e  $\vec{p} \rightarrow \vec{\pi} \equiv \vec{p} - e\vec{A}$ . Si ottiene:

$$(E - eA^0)\chi = m\chi + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{E - eA^0 + m}\chi.$$

Consideriamo il limite non-relativistico e di interazione debole, per cui  $E \simeq m \gg eA^0$ , e introduciamo la componente non-relativistica dell'energia  $E_{nr} \simeq E - m$ , da cui:

$$E_{nr}\chi = eA^0\chi + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m}\chi,$$

che possiamo interpretare come l'equazione per gli stati stazionari in M.Q. non-relativistica  $E_{nr}\chi = \hat{H}\chi$ . Nell'Hamiltoniana abbiamo dunque un operatore proporzionale a  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2$ , il quale può essere riscritto come:

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 &= \sigma^i \sigma^j \pi_i \pi_j = \vec{\pi}^2 + i\epsilon^{ijk} \sigma_k \pi_i \pi_j = \vec{\pi}^2 + i\epsilon^{ijk} \sigma_k \left( i\frac{\partial}{\partial x^i} + eA_i \right) \left( i\frac{\partial}{\partial x^j} + eA_j \right) \\ &= \vec{\pi}^2 - e\epsilon^{ijk} \sigma_k \left( \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \right) = \vec{\pi}^2 - e\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\pi}^2 - e\vec{\sigma} \cdot \vec{B}, \end{aligned}$$

avendo usato nel secondo passaggio  $\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i \epsilon^{ijk} \sigma_k$  e nel quarto l'antisimmetria del simbolo di Levi-Civita. Abbiamo quindi determinato un termine di interazione dato da:

$$\hat{H}_{s.o.} = -\frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}, \quad (2.109)$$

che chiaramente possiamo riscrivere come l'usuale  $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$  e determinare il momento magnetico dell'elettrone (ritornando per un momento ad unità ordinarie):

$$\vec{\mu} \equiv \frac{e \hbar}{2m c} \vec{\sigma} = 2 \frac{e}{2m c} \left( \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \right) = g \frac{e}{2m c} \vec{s} = g \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{s}, \quad (2.110)$$

dove  $\vec{s}$  è l'operatore di spin. Abbiamo quindi scoperto che la teoria di Dirac predice un rapporto giromagnetico  $g = 2$ , valore che invece viene inserito "a mano" nella trattazione della M.Q. non relativistica. Sperimentalmente si trova un valore  $g \simeq 2.002$ , compatibile al livello del per-mille con la predizione!<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>La differenza è legata a "correzioni radiative", la cui origine sarà più chiara nel formalismo della teoria dei campi.

## Chapter 3

# Fondamenti di Teoria Quantistica dei Campi

Abbiamo visto nel capitolo precedente come la presenza di soluzioni dell'equazione di Dirac ad energia negativa ponga dei problemi di interpretazione. Inoltre, se ammettiamo l'esistenza di particelle ed antiparticelle, diventano possibili a livello quantistico processi di creazione o distruzione di coppie particella-antiparticella. Diviene quindi necessaria una teoria in cui il numero di particelle non si conserva, cioè possono essere create o distrutte particelle. Dobbiamo capire come estendere la descrizione della sezione precedente per includere questa situazione fisica. Inoltre, nella descrizione dell'interazione elettromagnetica attraverso l'equazione di Dirac abbiamo trattato in maniera "asimmetrica" gli elettroni e la radiazione elettromagnetica. Mentre i primi sono descritti quantisticamente, abbiamo usato una teoria di campo classica per il campo elettromagnetico. Infine si può vedere che (anche se non lo mostriamo qui esplicitamente) che la teoria di Dirac per singola particella porta a violazioni di causalità. Dobbiamo quindi compiere un ulteriore passo per arrivare ad una teoria che sia completamente quantistica e consistente con la relatività ristretta.

Introduciamo in questo capitolo i principi fondamentali della Teoria Quantistica dei Campi, alla quale arriveremo attraverso l'estensione del formalismo di Lagrange-Hamilton della meccanica classica.

### 3.1 Formalismo di Lagrange-Hamilton in meccanica classica - dimensione finita

Il formalismo di Lagrange-Hamilton è basato sul **principio di minima azione**. Per una particella in moto unidimensionale con posizione  $q(t)$  e velocità  $\dot{q}(t)$ , l'azione è data da:

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t)) dt , \quad (3.1)$$

avente dimensioni  $[S] = E \cdot T$ , e dove  $L$  è la **funzione Lagrangiana**  $L = K - U$ , con  $K$  energia cinetica e  $U$  energia potenziale. Il principio di minima azione afferma che, tra tutte le traiettorie  $q(t)$  possibili tra i tempi  $t_1, t_2$ , la particella segue quella che minimizza l'azione  $S$ . In altre parole afferma che, tenendo fissati i punti  $q(t_1)$  e  $q(t_2)$ , la variazione dell'integrale di azione al variare della traiettoria è nulla. Richiediamo quindi  $\delta S = 0$  per la variazione generica  $q + \delta q$ :

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d(\delta q)}{dt} \right\} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right\} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \delta q \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right\} = 0 \end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio si è usato l'integrazione per parti. Siccome gli estremi di integrazione non variano, la variazione di  $S$  corrisponde ad una variazione dell'integrando (e nell'integrazione per parti il termine di bordo è nullo, in quanto  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ ). Affinchè  $\delta S$  si annulli per qualsiasi variazione  $\delta q$ , deve evidentemente valere:

$$\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} = 0, \quad (3.2)$$

detta **equazione del moto di Eulero-Lagrange**.

**Esempio Lagrangiana:** Nel caso di un oscillatore armonico, la Lagrangiana che descrive il sistema è:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (3.3)$$

e le equazioni del moto 3.2 portano chiaramente a  $\ddot{x} = -\omega^2 x$ .

Per un moto  $d$ -dimensionale descritto da  $q^i(t)$  con  $i = 1, 2, \dots, d$  o, più in generale, sistemi con un numero  $N$  di coordinate Lagrangiane indicate con  $q^r(t)$  con  $r = 1, 2, \dots, N$  si ha la seguente formulazione Lagrangiana con  $N$  equazioni:

$$\frac{\partial L}{\partial q^r(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^r(t)} = 0 \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (3.4)$$

L'**Hamiltoniana** può essere ottenuta dalla Lagrangiana con una trasformata di Legendre, da cui (per semplicità consideriamo solo una coordinata):

$$H(q, p) = p \dot{q} - L(q, \dot{q}), \quad (3.5)$$

con  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ . Le equazioni del moto diventano:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}, \quad (3.6)$$

dove tale coppia di equazioni al prim'ordine è equivalente alla singola equazione al second'ordine del formalismo lagrangiano.

**Esempio Hamiltoniana:** Riprendendo il caso dell'oscillatore armonico e usando il formalismo hamiltoniano quello che otteniamo è

$$H = p\dot{q} - \left( \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{m\omega^2 q^2}{2} \right) = p\frac{p}{m} - \frac{m}{2} \left( \frac{p}{m} \right)^2 + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

cioè l'hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = K + U \quad (3.7)$$

con le equazioni del moto associate:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q \end{cases} \quad (3.8)$$

dalle quali si ottiene la stessa equazione del moto derivata col formalismo lagrangiano.

### 3.2 Formalismo di Lagrange-Hamilton in meccanica quantistica - dimensione finita

Il formalismo Hamiltoniano, dove  $p$  e  $q$  sono le variabili indipendenti (mentre  $\dot{q}$  può essere ricavato invertendo  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ ), è particolarmente indicato per una riformulazione quantistica. Consideriamo la formulazione alla Heisenberg della meccanica quantistica e introduciamo gli operatori  $\hat{q}(t)$  e  $\hat{p}(t)$ , che soddisfano il commutatore fondamentale:

$$[\hat{q}(t), \hat{p}(t)] = i$$

(in unità naturali). L'analogo quantistico delle equazioni del moto di Hamilton determina l'evoluzione temporale dei due operatori:

$$\dot{\hat{q}}(t) = -i[\hat{q}, \hat{H}] \quad \dot{\hat{p}}(t) = -i[\hat{p}, \hat{H}]. \quad (3.9)$$

Più in generale l'Hamiltoniana determina l'evoluzione temporale di un operatore  $\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})$ :

$$\dot{\hat{A}}(t) = -i[\hat{A}(t), \hat{H}] \quad (3.10)$$

dove  $\hat{H}$  è l'Hamiltoniana in formato operatoriale:

$$\hat{H} = \hat{K} + \hat{U} = \hat{p}\dot{\hat{q}} - \hat{L} \quad (3.11)$$

Da quanto ricavato in eq. 3.7 per l'esempio dell'oscillatore armonico si ha:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{q}^2, \quad \hat{L} = \frac{1}{2}m\dot{\hat{q}}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{q}^2. \quad (3.12)$$

Combinando con eq. 3.9 si ottiene:

$$\dot{\hat{p}} = -m\omega^2 \hat{q}$$

e sapendo che  $\hat{p} = m\dot{\hat{q}}$  equivale a:

$$\ddot{\hat{q}} = -\omega^2 \hat{q}.$$

### 3.3 Formalismo di Lagrange-Hamilton in teoria classica dei campi

La variabile dinamica che ora consideriamo è un **campo** che assume un certo valore in ogni punto dello spazio-tempo. Possiamo ottenere una **teoria di campo** considerando il limite  $N \rightarrow \infty$  dei gradi di libertà della descrizione a dimensione finita introdotta in Sezione 3.1:

$$\{q_r(t); r = 1, 2, \dots, N\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \Phi(x, t) \quad (3.13)$$

dove  $x$  è ora una variabile continua che indicizza il valore del campo  $\Phi$  avente un'infinità continua di gradi di libertà. Per il momento prendiamo  $\Phi$  essere uno scalare, ma potrà poi anche essere un vettore, tensore, o spinore. Introduciamo ora una **densità di lagrangiana**  $\mathcal{L}$ :

$$L = \int d^3x \mathcal{L}[\Phi, \dot{\Phi}, \vec{\nabla}\Phi] \quad (3.14)$$

e notiamo che, dovendo  $S$  avere dimensioni di energia per tempo, deve essere  $[L] = E$  e  $[\mathcal{L}] = E \cdot V^{-1}$ . La densità di lagrangiana dipende da  $\Phi$ ,  $\dot{\Phi}$  proprio come la lagrangiana dipendeva da  $q$ ,  $\dot{q}$ , ma anche dalla derivata spaziale  $\vec{\nabla}\Phi$ . In termini di azione si ha:

$$S = \int dt L = \int dt d^3x \mathcal{L}[\Phi, \dot{\Phi}, \vec{\nabla}\Phi] = \int d^4x \mathcal{L}[\Phi, \partial_\mu\Phi], \quad (3.15)$$

che suggerisce come il formalismo lagrangiano si presti naturalmente all'estensione relativistica.

Il principio di minima azione  $\delta S = 0$  continua a valere, e ora è scrivibile come (per semplicità, nel caso spazialmente unidimensionale):

$$\delta S = \int dt \int \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \Phi / \partial x)} \delta \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \delta \dot{\Phi} \right] dx = 0$$

Per ricavare le equazioni del moto da questo principio operiamo come in meccanica classica, cominciando dall'integrare per parti il termine in  $\delta \dot{\Phi}$ :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \delta \dot{\Phi} &= \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \delta \Phi \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \right) \delta \Phi \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \right) \delta \Phi \end{aligned}$$

dove il primo termine è nullo in quanto  $\delta \Phi(t_1) = \delta \Phi(t_2) \equiv 0$ . A differenza del caso classico, abbiamo il termine in  $\delta(\partial \Phi / \partial x)$  e integriamo anch'esso per parti:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \Phi / \partial x)} \delta \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) &= \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \Phi / \partial x)} \delta \Phi \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \Phi / \partial x)} \right) \delta \Phi \\ &= - \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \Phi / \partial x)} \right) \delta \Phi \end{aligned}$$

Il principio di minima azione diventa dunque:

$$\delta S = \int dt \int dx \delta\Phi \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial\Phi/\partial x)} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \right) \right] = 0$$

Considerando che  $\delta\Phi$  è arbitrario, possiamo infine formulare le **equazioni di Eulero-Lagrange di campo**:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial\Phi/\partial x)} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \right) = 0, \quad (3.16)$$

che si generalizzano in maniera immediata al caso con tre dimensioni spaziali come:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla}\Phi)} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) = 0 \quad (3.17)$$

**Esempio** Consideriamo come semplice ma importante esempio la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (3.18)$$

E' immediato notare che la densità di Lagrangiana  $\mathcal{L}$  è relativisticamente covariante. Le equazioni di Eulero-Lagrange forniscono l'equazione di un'onda che si propaga con velocità  $c$ :

$$\square \Phi = \vec{\nabla}^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

che è l'equazione di Klein-Gordon con massa nulla e ha come soluzione le onde piane della forma  $e^{\pm i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$ , con relazione di dispersione  $\omega^2 = k^2$ .

Nel caso massivo, la densità di Lagrangiana è data da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 \quad (3.19)$$

a cui è possibile associare l'eq. del moto di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) = -m^2 \Phi^2 - \partial_\mu \partial^\mu \Phi = (\square + m^2) \Phi = 0$$

che corrisponde esattamente all'eq. di K.G. massiva, che sappiamo ammettere una base di soluzioni data dalle onde piane  $e^{\pm i k \cdot x}$  dove  $k_\mu = (\omega, -\vec{k})$  e  $k^2 = m^2$  (corrispondente alla relazione di dispersione  $\omega^2 = \vec{k}^2 + m^2$ ), come si verifica immediatamente

$$(\square + m^2) e^{\pm i k \cdot x} = (-k_\mu k^\mu + m^2) e^{\pm i k \cdot x}.$$

### 3.3.1 Simmetrie, correnti e cariche

In teoria dei campi, per simmetria di un sistema si intende una trasformazione dei campi che lascia invariante l'azione  $S$  e l'equazione del moto di Eulero-Lagrange 3.16.

Consideriamo delle trasformazioni continue infinitesime:

$$\Phi \rightarrow \Phi + \varepsilon \Delta \Phi \quad (3.20)$$

assumendo quindi che  $\varepsilon$  sia un parametro costante piccolo e  $\Delta \Phi$  sia una specifica trasformazione, da cui  $\delta \Phi = \varepsilon \Delta \Phi$ .

La condizione che  $S$  rimanga invariante si traduce in:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \varepsilon \partial_\mu K^\mu \quad (3.21)$$

dove  $K^\mu$  dipenderà dai campi attraverso Eq. 3.20 e considerando la specifica forma di  $\mathcal{L}$ . La condizione 3.21 implica

$$S \rightarrow S + \varepsilon \int dx^4 \partial_\mu K^\mu \quad (3.22)$$

e la variazione è chiaramente nulla, anche al bordo (grazie alla condizione  $\Delta \Phi = 0$ ). La condizione risultante dalla richiesta di validità delle equazioni del moto di Eulero-Lagrange invece si ricava espandendo la lagrangiana al prim'ordine:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{L} + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \Delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \partial_\mu (\varepsilon \Delta \Phi) \\ &= \mathcal{L} + \varepsilon \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \Delta \Phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \Delta \Phi \right) - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) \Delta \Phi \right\} \\ &= \mathcal{L} + \varepsilon \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \Delta \Phi \right) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo imposto l'eq. del moto di Eulero-Lagrange. Mettendo insieme quanto ricavato:

$$\begin{cases} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \varepsilon \partial_\mu K^\mu \\ \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \varepsilon \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \Delta \Phi \right) \end{cases} \quad (3.23)$$

Combiniamo queste due condizioni in maniera più compatta introducendo una **corrente conservata** definita da

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \Delta \Phi - K^\mu \quad (3.24)$$

per la quale deve valere:

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (3.25)$$

Quanto appena visto è il cosiddetto **teorema di Noether** che lega la simmetria continua a una corrente conservata, cioè ci dice che in teoria dei campi, l'invarianza della lagrangiana



sotto una trasformazione continua (cioè  $\mathcal{L}$  cambia al massimo per una derivata totale) implica una corrente conservata.

**Esempio** Cominciamo generalizzando a più campi l'esempio precedente, e prendiamo il caso a due campi:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi^1 \partial^\mu \Phi^1 + \partial_\mu \Phi^2 \partial^\mu \Phi^2) .$$

Possiamo riscrivere questa relazione definendo un vettore colonna con i singoli campi, ovvero

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{pmatrix} \text{ con } \mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi^T \partial^\mu \Phi .$$

E' immediato capire che tale Lagrangiana è invariante per rotazioni "interne", cioè per trasformazioni  $\Phi \rightarrow R \Phi$ , con  $R$  matrice  $2 \times 2$  tale che  $R^T R = \mathbf{1}$ . Esplicitamente possiamo scrivere la rotazione come:

$$\begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{pmatrix} . \quad (3.26)$$

Consideriamo ora il caso di un campo complesso e definiamolo in termini di due componenti reali

$$\Phi = \frac{\Phi^1 + i\Phi^2}{\sqrt{2}} \quad \Phi^* = \frac{\Phi^1 - i\Phi^2}{\sqrt{2}}$$

Definendo la densità di Lagrangiana in campo complesso come

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi \quad (3.27)$$

vediamo che è equivalente alla definizione appena introdotta per due campi reali

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu (\Phi^1 - i\Phi^2) \partial^\mu (\Phi^1 + i\Phi^2) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi^1 \partial^\mu \Phi^1 + \partial_\mu \Phi^2 \partial^\mu \Phi^2) .$$

Le corrispondenti eq. di Eulero-Lagrange che seguono dalla variazione dell'azione rispetto alle componenti in campo complesso

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^*} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^*)} \right) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) = 0$$

forniscono due equazioni coniugate. Notando che il primo termine è nullo, dal secondo si ha

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi = 0 \quad ; \quad \partial_\mu \partial^\mu \Phi^* = 0 .$$

La rotazione descritta in eq. 3.26 corrisponde a:

$$\begin{cases} \Phi \rightarrow e^{i\alpha} \Phi \\ \Phi^* \rightarrow e^{-i\alpha} \Phi^* . \end{cases} \quad (3.28)$$

Sotto questa trasformazione la Lagrangiana è invariante e si ha quindi  $K^\mu = 0$ . Considerando una trasformazione infinitesima, è possibile sviluppare l'esponenziale (con argomento  $\alpha = \varepsilon$ ):

$$\begin{cases} \Phi \rightarrow (1 + i\varepsilon)\Phi = \Phi + i\varepsilon\Phi \\ \Phi^* \rightarrow (1 + i\varepsilon)\Phi^* = \Phi^* + i\varepsilon\Phi^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta\Phi = i\Phi \\ \Delta\Phi^* = -i\Phi^* \end{cases} \quad (3.29)$$

Il teorema di Noether definisce la corrente conservata come

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \Delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^*)} \Delta\Phi^* \quad (3.30)$$

e usando la 3.27 e 3.29 si ha

$$j^\mu = -i(\Phi^*\partial^\mu\Phi - (\partial^\mu\Phi^*)\Phi) \quad (3.31)$$

Verifichiamo esplicitamente che la corrente è conservata:

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &= -i\partial_\mu(\Phi^*\partial^\mu\Phi - (\partial^\mu\Phi^*)\Phi) \\ &= -i\{\cancel{\partial_\mu\Phi^*\partial^\mu\Phi} + \Phi^*\partial_\mu\partial^\mu\Phi - (\partial_\mu\partial^\mu\Phi^*)\Phi - \cancel{\partial_\mu\Phi^*\partial^\mu\Phi}\} \\ &= -i\{\Phi^*\square\Phi - (\square\Phi^*)\Phi\} = 0 \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato le equazioni del moto. Vedremo in seguito che accoppiando un campo complesso all'elettromagnetismo otterremo che  $j^\mu$  corrisponde alla corrente elettrica.

**Simmetria per traslazioni spazio-temporale** Consideriamo ora delle traslazioni:

$$T : x^\mu \rightarrow x^\mu - a^\mu \quad (3.32)$$

$$T^{-1} : x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu \quad (3.33)$$

dove  $a^\mu$  sono 4 parametri continui. Nel caso del campo scalare si ha

$$\Phi'(x) = \Phi(T^{-1}x') = \Phi(x + a)$$

e considerando una trasformazione infinitesima  $a^\mu = \varepsilon^\mu$  otteniamo

$$\begin{cases} \Phi'(x) = \Phi(x + \varepsilon) \simeq \Phi(x) + \varepsilon^\mu\partial_\mu\Phi(x) \\ \delta\Phi(x) = \Phi'(x) - \Phi(x) \simeq \varepsilon^\mu\partial_\mu\Phi \end{cases}$$

Anche la Lagrangiana è uno scalare, per cui possiamo scrivere  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \varepsilon^\mu\partial_\nu(\delta_\mu^\nu\mathcal{L})$ , da cui

$$K_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu\mathcal{L}$$

Usando il teorema di Noether, abbiamo che, nel caso di simmetria per traslazioni, le correnti conservate sono le quattro componenti  $\forall \mu$  del “tensore energia-impulso”:

$$T_{\mu}^{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu}\Phi)} \partial_{\mu}\Phi - \delta_{\mu}^{\nu}\mathcal{L} . \quad (3.34)$$

Infatti, nel caso di simmetria per traslazioni nella dimensione  $\mu$ , vale  $\partial_{\nu}T_{\mu}^{\nu} = 0$ , dal teorema di Noether. Considerando il caso  $\mu = 0$  stiamo considerando l’invarianza per traslazioni temporali. La corrispondente carica conservata dovrà quindi essere l’energia. Possiamo quindi definire l’Hamiltoniano

$$H = \int d^3x T_0^0 . \quad (3.35)$$

**Formalismo Hamiltoniano** Oltre al formalismo lagrangiano per i campi possiamo introdurre il formalismo hamiltoniano, dove definiamo la **densità di hamiltoniana**  $\mathcal{H}$ :

$$H = \int d^3x \mathcal{H} . \quad (3.36)$$

Grazie a quanto appena visto in eq. 3.35 sappiamo che  $\mathcal{H} = T_0^0$  e usando eq. 3.34 si ottiene

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \dot{\Phi} - \mathcal{L} , \quad (3.37)$$

dove  $\dot{\Phi} = \partial_0\Phi$ .

Definiamo una **densità di campo di impulso**, anche detta **impulso canonicamente coniugato** a  $\Phi$ , come:

$$\Pi(x, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}(x, t)} \quad (3.38)$$

che ha dimensioni  $[\Pi] = [p]V^{-1}$ . Dalla eq. 3.37, otteniamo quindi l’analogo della relazione vista nel caso a dimensione finita  $H(q, p) = p\dot{q} - L$ :

$$\mathcal{H}(\Phi, \Pi) = \Pi(x, t)\dot{\Phi}(x, t) - \mathcal{L} \quad (3.39)$$

**Esempio** Considerando la densità di lagrangiana dell’esempio 3.19 otteniamo per la densità di impulso coniugato  $\Pi(x, t) = \dot{\Phi}$  e per la densità di hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[ \Pi^2 + \left( \vec{\nabla}\Phi \right)^2 + m^2\Phi^2 \right] \quad (3.40)$$

### 3.4 Il formalismo di Lagrange-Hamilton in teoria dei campi quantistica

Vogliamo ora quantizzare il formalismo dei campi classici appena sviluppato.

Come già visto nel caso a dimensione finita, le variabili coniugate del formalismo Hamiltoniano sono adatte a descrivere in modo “canonico” la procedura di quantizzazione. Abbiamo ora introdotto il campo di coordinate  $\Phi(x, t)$  ed il campo di impulso  $\Pi(x, t)$  in analogia a  $q_r(t), p_r(t)$ . Nel caso di  $N$  coordinate ed impulsi, essi vengono promossi ad operatori con le regole di commutazione:

$$[\hat{q}_r, \hat{p}_s] = i\delta_{rs} \quad ; \quad [\hat{q}_r, \hat{q}_s] = [\hat{p}_r, \hat{p}_s] = 0 .$$

Nel caso continuo, dove cioè gli indici  $r, s$  diventano variabili continue  $x, y$ , trasormiamo i campi  $\Phi$  e  $\Pi$  in operatori  $\hat{\Phi}, \hat{\Pi}$ , imponendo le stesse condizioni di commutazione, cioè la **condizione di quantizzazione canonica**:

$$[\hat{\Phi}(\vec{x}, t), \hat{\Pi}(\vec{y}, t)] = i\delta^3(x - y) \quad , \quad [\hat{\Phi}(\vec{x}, t), \hat{\Phi}(\vec{y}, t)] = [\hat{\Pi}(\vec{x}, t), \hat{\Pi}(\vec{y}, t)] = 0 \quad (3.41)$$

calcolata a tempi  $t$  uguali per  $\hat{\Phi}$  e  $\hat{\Pi}$ . Per comprendere l’interpretazione fisica dell’operatore di campo è utile tornare alla precedente lagrangiana di esempio 3.18.

### 3.4.1 Il campo scalare reale di Klein-Gordon

Consideriamo un campo scalare  $\Phi(\vec{x}, t)$  reale, ovvero con  $\Phi^* = \Phi$ , e massivo. Come già visto la densità di Lagrangiana è data da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{1}{2}m^2\Phi^2 \quad (3.42)$$

mentre l’eq. del moto di Eulero-Lagrange è  $(\square + m^2)\Phi = 0$ , che corrisponde all’eq. di K.G.. Sapendo che l’eq. di K.G. ammette una base di soluzioni data dalle onde piane  $e^{\pm ik \cdot x}$  dove  $k_\mu = (\omega, -\vec{k})$  e  $k^2 = m^2$ , possiamo scrivere il campo di Klein-Gordon in termini di onde piane. Nella forma di una trasformata di Fourier si ha:

$$\Phi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [a(k)e^{-ik \cdot x} + b(k)e^{+ik \cdot x}] .$$

Richiedendo che sia reale si ha  $b = a^*$ , e applicando l’operatore  $(\square + m^2)$  è immediato verificare che l’eq di K.G. è soddisfatta se vale la condizione di mass-shell, cioè  $k^2 = m^2$ . Includendo tali informazioni si può scrivere

$$\Phi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (2\pi)\delta(k^2 - m^2) \left\{ a(k)e^{-ik \cdot x} + a^*(k)e^{ik \cdot x} \right\}$$

da cui, facendo agire la  $\delta$  si ottiene

$$\Phi(x) = \Phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left\{ a(\vec{k})e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{x}} + a^*(\vec{k})e^{i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right\} . \quad (3.43)$$

I fattori  $(2\pi)^3 2\omega$  sono puramente legati alle convenzioni sulla normalizzazione dei campi, e si possono trovare scelte differenti in letteratura.

Lo sviluppo del campo canonicamente coniugato  $\Pi = \dot{\Phi}$  è dato da:

$$\Pi(x, t) = -\frac{i}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ a(\vec{k}) e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} - a^*(\vec{k}) e^{i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\} \quad (3.44)$$

Per utilizzo futuro calcoliamo anche

$$\vec{\nabla}\Phi = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{i\vec{k}}{2\omega} \left\{ a(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} - a^*(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\}. \quad (3.45)$$

La procedura di quantizzazione canonica dei campi consiste nel promuovere  $\Phi$  e  $\Pi$  ad operatori  $\hat{\Phi}$  e  $\hat{\Pi}$  e imporre la regola di commutazione fondamentale 3.41. Nelle eqs. 3.43 e 3.44 dobbiamo quindi promuovere i coefficienti  $a$  e  $a^*$  ad operatori  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$ :

$$\hat{\Phi}(x, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} \left[ \hat{a}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} \right] \quad (3.46)$$

$$\hat{\Pi}(x, t) = -\frac{i}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ \hat{a}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} - \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} \right] \quad (3.47)$$

e affinchè valgano le 3.41 dobbiamo imporre per  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  le seguenti proprietà di commutazione:

$$[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad ; \quad [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}(\vec{k}')] = [\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] = 0 \quad (3.48)$$

Dimostriamo che le eqs. 3.48 implicano le eqs. 3.41:

$$\begin{aligned} [\hat{\Pi}(\vec{x}, t), \hat{\Phi}(\vec{y}, t)] &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \left( -\frac{i}{4\omega'} \right) \left[ \hat{a}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} + \right. \\ &\quad \left. - \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}, \hat{a}(\vec{k}') e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{y} - \omega' t)} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}') e^{i(\omega' t - \vec{k}'\cdot\vec{y})} \right] \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \left( -\frac{i}{4\omega'} \right) \left\{ e^{-i(\omega - \omega')t + i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \vec{k}'\cdot\vec{y})} \right. \\ &\quad \left. [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] - e^{i(\omega - \omega')t - i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \vec{k}'\cdot\vec{y})} [\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{a}(\vec{k}')] \right\} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int d^3 k' \left( -\frac{i}{2} \right) \left\{ \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') e^{-i(\omega - \omega')t + i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \vec{k}'\cdot\vec{y})} \right. \\ &\quad \left. + \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') e^{i(\omega - \omega')t - i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \vec{k}'\cdot\vec{y})} \right\} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left( -\frac{i}{2} \right) \left\{ e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x} - \vec{y})} + e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x} - \vec{y})} \right\} \\ &= -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x} - \vec{y})} = -i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned}$$

Gli operatori  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  possono essere interpretati come operatori di creazione e distruzione, già studiati per il caso dell'oscillatore armonico (si veda Appendice B). Per capire tale

interpretazione dobbiamo scrivere l'Hamiltoniana in termini di tali operatori. L'espressione dell'operatore Hamiltoniano è data da

$$H = \int d^3x \frac{1}{2} \left( \Pi^2 + (\vec{\nabla}\Phi)^2 + m^2\Phi^2 \right)$$

determinando separatamente ogni termine

$$\begin{aligned} \int d^3x \hat{\Pi}^2 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left( -\frac{1}{4} \right) \left\{ \hat{a}(\vec{k})\hat{a}(-\vec{k})e^{-2i\omega t} + \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}^\dagger(-\vec{k})e^{2i\omega t} - \hat{a}(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k}) - \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) \right\} \\ \int d^3x (\vec{\nabla}\hat{\Phi})^2 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left( \frac{\vec{k}^2}{4\omega^2} \right) \left\{ \hat{a}(\vec{k})\hat{a}(-\vec{k})e^{-2i\omega t} + \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}^\dagger(-\vec{k})e^{2i\omega t} + \hat{a}(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k}) + \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) \right\} \\ \int d^3x m^2\hat{\Phi}^2 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left( \frac{m^2}{4\omega^2} \right) \left\{ \hat{a}(\vec{k})\hat{a}(-\vec{k})e^{-2i\omega t} + \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}^\dagger(-\vec{k})e^{2i\omega t} + \hat{a}(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k}) + \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) \right\} \end{aligned}$$

e sostituendo i risultati otteniamo

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{4} \left( -1 + \frac{\vec{k}^2}{\omega^2} + \frac{m^2}{\omega^2} \right) \left[ \hat{a}(\vec{k})\hat{a}(-\vec{k})e^{-2i\omega t} + \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}^\dagger(-\vec{k})e^{2i\omega t} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \left( +1 + \frac{\vec{k}^2}{\omega^2} + \frac{m^2}{\omega^2} \right) \left[ \hat{a}(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k}) + \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) \right] \right\} \end{aligned}$$

ricordando la relazione di mass-shell  $\omega^2 = \vec{k}^2 + m^2$  si ha

$$\hat{H} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{4} \left[ \hat{a}(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k}) + \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) \right] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} \left[ \hat{a}(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k}) + \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) \right] \frac{\omega}{2}.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo re-inserito il fattore di normalizzazione  $(2\pi)^3 2\omega$  per sottolineare come la restante parte dell'integrando sia perfettamente analoga al risultato di un singolo oscillatore  $\hat{H} = \frac{\omega}{2}(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger)$ , riportato in Appendice B. E' dunque lecito interpretare gli operatori  $\hat{a}^\dagger(k)$  e  $\hat{a}(k)$  come operatori di creazione e distruzione di un quanto di energia  $\hbar\omega$ . L'Hamiltoniana ha però ora un contributo da infiniti oscillatori armonici indipendenti.

Manipolando ulteriormente l'espressione di  $H$  otteniamo

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} \left( \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) + [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k})] + \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) \right) \frac{\omega}{2} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})\omega + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} (2\pi)^3 \delta^3(0)\omega^2 \end{aligned}$$

Focalizziamoci ora sul secondo termine e notiamo due cose. La prima è che non sono presenti operatori e quindi tale termine determina un contributo di energia uguale per qualsiasi stato fisico. Possiamo considerarlo come l'energia di punto zero, l'analogo continuo dell'energia dello stato fondamentale  $\hbar\omega/2$  che compare nell'Hamiltoniana per

il singolo oscillatore. Il secondo aspetto da notare è che l'integrale diverge. La ragione è legata al fatto che ora stiamo considerando non più uno, ma infiniti oscillatori armonici. La soluzione convenzionale di questo problema sta nel considerare come importanti solo le differenze di energia relative ad uno stato fondamentale opportunamente scelto. Si può quindi eliminare questo termine, che equivale ad una costante infinita, nell'operatore Hamiltoniano. Detto in altri termini, imponiamo che lo stato di **vuoto** (o fondamentale) abbia energia nulla. Tale stato è definito dalla richiesta che lo spettro sia limitato inferiormente, cioè in maniera del tutto analoga al caso discreto, da

$$|0\rangle / \hat{a}(\vec{k})|0\rangle = 0 \quad \forall k \quad (3.49)$$

Applicando l'Hamiltoniana ottenuta

$$\hat{H} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} \left( \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k})\omega \right) \quad (3.50)$$

allo stato di vuoto otteniamo chiaramente  $\hat{H}|0\rangle = 0$ .

Capiamo ora meglio perchè possiamo effettivamente considerare gli operatori  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  come operatori di creazione e distruzione. Calcoliamo i commutatori con l'Hamiltoniana

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{a}(\vec{k})] &= \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} [\hat{a}^\dagger(\vec{k}')\hat{a}(\vec{k}'), \hat{a}(\vec{k})] = \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} [\hat{a}^\dagger(\vec{k}'), \hat{a}(\vec{k})]\hat{a}(\vec{k}') \\ &= -\omega\hat{a}(\vec{k}) \\ [\hat{H}, \hat{a}^\dagger(\vec{k})] &= \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} [\hat{a}^\dagger(\vec{k}')\hat{a}(\vec{k}'), \hat{a}^\dagger(\vec{k})] = \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \hat{a}^\dagger(\vec{k}')[\hat{a}(\vec{k}'), \hat{a}^\dagger(\vec{k})] \\ &= \omega\hat{a}^\dagger(\vec{k}) \end{aligned}$$

Quindi da questo segue che se  $|E\rangle$  è un autostato di  $\hat{H}$ , ossia  $\hat{H}|E\rangle = E|E\rangle$ , allora

$$\begin{aligned} \hat{H}\hat{a}(\vec{k})|E\rangle &= ([\hat{H}, \hat{a}(\vec{k})] + \hat{a}(\vec{k})\hat{H})|E\rangle = (E - \omega)\hat{a}(\vec{k})|E\rangle \\ \hat{H}\hat{a}^\dagger(\vec{k})|E\rangle &= ([\hat{H}, \hat{a}^\dagger(\vec{k})] + \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{H})|E\rangle = (E + \omega)\hat{a}^\dagger(\vec{k})|E\rangle \end{aligned}$$

quindi i due stati  $\hat{a}(\vec{k})|E\rangle$  e  $\hat{a}^\dagger(\vec{k})|E\rangle$  sono ancora autostati di  $\hat{H}$ , ma con una distruzione o creazione di un quanto di energia  $\omega$  rispetto allo stato  $|E\rangle$ .

**Interpretazione fisica** Abbiamo finora ragionato interpretando  $\hat{\Phi}(\vec{x}, t)$  come una generalizzazione continua dell'operatore posizione  $\hat{q}_r$  e procedendo in analogia con la quantizzazione di quest'ultima ed ereditando i postulati della meccanica quantistica. Non è strettamente necessario. Inoltre non dobbiamo pensare a  $\Phi(\vec{x}, t)$  come alla funzione d'onda di singola particella. Possiamo invece direttamente postulare l'esistenza di un campo fondamentale  $\Phi$  (classicamente descritto attraverso il formalismo Lagrangiano),

quantizzato secondo le regole di quantizzazione canonica, e che descrive stati a multi-particella. Riconsideriamo lo sviluppo del campo

$$\hat{\Phi}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left\{ \hat{a}(\vec{k}) e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\}$$

I suoi quanti di eccitazione, creati o distrutti da  $\hat{a}^\dagger(k)$  e  $\hat{a}(k)$ , sono le **particelle** del campo in questione, ad esempio fotoni se consideriamo il campo elettromagnetico.

Il formalismo qui sviluppato per l'operatore  $\hat{\Phi}$  comprende sia la natura ondulatoria che quella corpuscolare di radiazione e materia. L'aspetto ondulatorio nasce dal fatto che  $\hat{\Phi}$  è dato da uno sviluppo in serie di onde piane (in quanto soluzione di un'equazione di onda). L'aspetto particellare appare evidente attraverso la natura discreta dello spettro di energia e degli operatori  $\hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{a}$ , che si riferiscono a singoli quanti di oscillazione, le particelle.

Nell'espressione  $\hat{\Phi}$  il termine che distrugge un quanto è associato all'esponenziale  $e^{-i\omega t}$ , mentre quello che lo crea è associato a  $e^{i\omega t}$ : si tratta di una scelta consistente con i fattori di assorbimento ed emissione (di un fotone) della teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo vista nella sezione 1.1.1.

Da quanto abbiamo già visto, possiamo costruire qualsiasi stato, partendo dal vuoto e agendo con l'operatore di creazione  $\hat{a}^\dagger$ .

$$\left| \vec{k}_1 \right\rangle = \hat{a}^\dagger(\vec{k}_1) |0\rangle \quad , \quad \left| \vec{k}_1, \vec{k}_2 \right\rangle = \hat{a}^\dagger(\vec{k}_1) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_2) |0\rangle \quad , \quad \dots$$

dove  $\left| \vec{k}_1 \right\rangle$  lo stato di singola particella e impulso  $\vec{k}_1$ ,  $\left| \vec{k}_1, \vec{k}_2 \right\rangle$  è uno stato composto da due particelle, una di impulso  $\vec{k}_1$ , l'altra di impulso  $\vec{k}_2$ , e così via. Possiamo anche notare che lo stato fondamentale  $|0\rangle$  è stato scelto come quello in cui non vi è presente nessuna particella.

Consideriamo ora lo stato a due particelle  $|k_1, k_2\rangle$ . Siccome gli operatori di creazione e distruzione commutano, possiamo scrivere:

$$\left| \vec{k}_1, \vec{k}_2 \right\rangle = \hat{a}^\dagger(\vec{k}_1) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_2) |0\rangle = \hat{a}^\dagger(\vec{k}_2) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_1) |0\rangle = \left| \vec{k}_2, \vec{k}_1 \right\rangle \quad (3.51)$$

ovvero, lo stato in questione è simmetrico per lo scambio di particelle  $k_1 \leftrightarrow k_2$ : queste particelle devono essere necessariamente **bosoni**.<sup>1</sup> Il formalismo finora usato andrà dunque modificato per applicarlo alla descrizione delle particelle di spin  $1/2$  studiate dalla teoria di Dirac, ovvero ai **fermioni**.

Chiediamoci infine come collegare il formalismo della teoria quantistica dei campi con le ordinarie funzioni d'onda viste in meccanica quantistica. Supponiamo anzitutto di formare lo stato contenente un quanto di impulso  $k'$  del campo  $\hat{\Phi}$ :

$$\left| \vec{k}' \right\rangle = \hat{a}^\dagger(\vec{k}') |0\rangle$$

<sup>1</sup>Inoltre, nel caso specifico in questione, siccome non compare alcuna informazione sul numero di spin, si stanno considerando particelle di spin nullo.



e consideriamo l'ampiezza:

$$\langle 0 | \hat{\Phi} | \vec{k}' \rangle = \langle 0 | \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} [\hat{a}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}] \hat{a}^\dagger(\vec{k}') | 0 \rangle$$

Usando le relazioni:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{a}^\dagger &= 0 \\ \hat{a}(\vec{k}) \hat{a}^\dagger(\vec{k}') &= \hat{a}^\dagger(\vec{k}') \hat{a}(\vec{k}) + (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \end{aligned}$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{\Phi} | \vec{k}' \rangle &= \langle 0 | \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} [\hat{a}^\dagger(\vec{k}') \hat{a}(\vec{k}) + (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')] e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \int d^3 k \delta(\vec{k} - \vec{k}') e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} | 0 \rangle \end{aligned}$$

cioè:

$$\langle 0 | \hat{\Phi}(x, t) | \vec{k}' \rangle = e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (3.52)$$

Il risultato è quindi un'onda piana, ovvero la funzione d'onda per una particella che si trovi nello stato  $|\vec{k}'\rangle$ . Le ordinarie funzioni d'onda sono dunque gli elementi di matrice dell'operatore  $\hat{\Phi}$  calcolati tra lo stato vuoto  $\langle 0 |$  e lo stato della particella  $|\vec{k}'\rangle$ . Vedremo come il suo modulo quadro fornisce la probabilità di avere lo stato con impulso  $\vec{k}'$ , nella posizione  $\vec{x}$ , al tempo  $t$ , esattamente come per il modulo quadro della funzione d'onda in MQ.

Il procedimento ora descritto per passare da  $\Phi \rightarrow \hat{\Phi}$  è anche detto **seconda quantizzazione**.

Nella seconda quantizzazione quindi le funzioni d'onda vengono sostituite da operatori di campo. Tali operatori agiscono sugli stati di uno spazio, detto **spazio di Fock**, che è la combinazione di spazi di Hilbert a  $0, 1, 2, \dots, N \rightarrow \infty$  particelle, come operatori di creazione e distruzione di particelle, che vanno a modificare il numero di occupazione di un certo livello del sistema composto da particelle identiche. La "prima" versione quantizzata della meccanica si occupava invece di singola particella, o comunque di spazi di Hilbert con numero di particelle fissato.

### 3.4.2 Il campo complesso di Klein-Gordon

Nel formalismo sviluppato nella sezione precedente abbiamo considerato un campo scalare  $\hat{\Phi}$  a valori reali. Questo fa sì che gli operatori di creazione e distruzione associati agiscano solo su un "tipo" di particella, cioè non abbiamo operatori  $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots$  diversi tra loro. Tale trattazione può essere sufficiente per descrivere, ad esempio, il pione neutro  $\Pi^0$ . Risulta invece insufficiente per descrivere particelle, presenti in natura, come  $\Pi^+$  e  $\Pi^-$ , con la stessa massa, ma carica opposta (cioè una l'antiparticella dell'altra). In questo caso, è necessario avere due set di operatori di creazione e distruzione,  $\forall k$ . Per descrivere tale situazione fisica consideriamo il caso di un campo complesso di Klein-Gordon.

Come già fatto nel caso classico di Sezione 3.3.1, possiamo scrivere il campo scalere complesso  $\hat{\Phi}$  in termini di due campi scalare reali  $\hat{\Phi}_1$  e  $\hat{\Phi}_2$ , per i quali vale la trattazione appena descritta:

$$\hat{\Phi} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\Phi}_1 - i\hat{\Phi}_2) \quad ; \quad \hat{\Phi}^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\Phi}_1 + i\hat{\Phi}_2) \quad (3.53)$$

da cui si ottiene lo sviluppo:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} [\hat{a}(k)e^{-ik \cdot x} + \hat{b}^\dagger(k)e^{ik \cdot x}] \\ \hat{\Phi}^\dagger &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} [\hat{b}(k)e^{-ik \cdot x} + \hat{a}^\dagger(k)e^{ik \cdot x}] \end{aligned} \quad (3.54)$$

dove abbiamo definito

$$\begin{aligned} \hat{a}(k) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1(k) - i\hat{a}_2(k)) \\ \hat{b}(k) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1(k) + i\hat{a}_2(k)) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Dalla Lagrangiana del caso reale per  $N$  campi di ugual massa otteniamo quella per il campo complesso (per ora focalizziamoci su  $N = 2$ )

$$\mathcal{L}_{\mathcal{KG}} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \hat{\Phi}_i \partial^\mu \hat{\Phi}_i - \frac{m^2}{2} \hat{\Phi}_i^2 \right] = \partial_\mu \hat{\Phi}^\dagger \partial^\mu \hat{\Phi} - m^2 \hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi} , \quad (3.56)$$

ed è immediato ricavare i momenti coniugati  $\hat{\Pi} = \dot{\hat{\Phi}}^\dagger$  e  $\hat{\Pi}^\dagger = \dot{\hat{\Phi}}$ . La procedura di quantizzazione canonica richiede che  $\hat{\Phi}$  e  $\hat{\Pi}$  soddisfino le relazioni di commutazione 3.41. Ciò è verificato grazie al fatto che gli operatori  $\hat{a}_1, \hat{a}_2$  soddisfano le relazioni

$$\begin{aligned} [\hat{a}_i(k), \hat{a}_j^\dagger(k')] &= (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{ij} \\ [\hat{b}_i(k), \hat{b}_j^\dagger(k')] &= (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Da Eqs. 3.57 si ricava inoltre:

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= \frac{1}{2} [\hat{a}_1 - i\hat{a}_2, \hat{a}_1^\dagger + i\hat{a}_2^\dagger] \\ &= \frac{1}{2} [\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] + \frac{1}{2} [\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger] \\ &= (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \end{aligned}$$

e analogamente per  $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger]$ , mentre

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{b}^\dagger] &= \frac{1}{2} [\hat{a}_1 - i\hat{a}_2, \hat{a}_1^\dagger - i\hat{a}_2^\dagger] \\ &= \frac{1}{2} [\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] - \frac{1}{2} [\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger] \\ &= 0 \end{aligned}$$

e analogamente per altri commutatori tra  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$ .

Combinando le due hamiltoniane associate ai campi reali, Eq. 3.50, otteniamo

$$\hat{H} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} \left[ \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) + \hat{b}^\dagger(\vec{k})\hat{b}(\vec{k}) \right] \omega \quad (3.58)$$

infatti la parentesi quadra, corrispondente alla somma del numero di particelle “di tipo a” e di particelle “di tipo b”, è pari a:

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{b} &= \frac{1}{2} [(\hat{a}_1^\dagger + i\hat{a}_2^\dagger)(\hat{a}_1 - i\hat{a}_2) + (\hat{a}_1^\dagger - i\hat{a}_2^\dagger)(\hat{a}_1 + i\hat{a}_2)] \\ &= \frac{1}{2} [\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2] \\ &= \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 \end{aligned}$$

Abbiamo  $\forall \vec{k}$  due oscillatori armonici per i quali possiamo definire degli operatori numero

$$\begin{cases} \hat{n}_a(\vec{k}) = \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) \\ \hat{n}_b(\vec{k}) = \hat{b}^\dagger(\vec{k})\hat{b}(\vec{k}) \end{cases} \quad (3.59)$$

A cui corrisponde la seguente algebra

$$\begin{cases} [\hat{n}_a(\vec{k}), \hat{a}(\vec{k}')] = -(2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \hat{a}(\vec{k}) & [\hat{n}_b(\vec{k}), \hat{b}(\vec{k}')] = -(2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \hat{b}(\vec{k}) \\ [\hat{n}_a(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \hat{a}^\dagger(\vec{k}) & [\hat{n}_b(\vec{k}), \hat{b}^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \hat{b}^\dagger(\vec{k}) \end{cases} \quad (3.60)$$

Usando la 3.58 e 3.59 possiamo trovare che

$$\begin{cases} [\hat{H}, \hat{a}(\vec{k})] = -\omega \hat{a}(\vec{k}) & [\hat{H}, \hat{b}(\vec{k})] = -\omega \hat{b}(\vec{k}) \\ [\hat{H}, \hat{a}^\dagger(\vec{k})] = \omega \hat{a}^\dagger(\vec{k}) & [\hat{H}, \hat{b}^\dagger(\vec{k})] = \omega \hat{b}^\dagger(\vec{k}) \end{cases} \quad (3.61)$$

da questo segue, in maniera identica al caso scalare, che se  $|E\rangle$  è autostato di  $\hat{H}$  con autovalore  $E$  allora

$$\begin{cases} \hat{a}|E\rangle, \hat{b}|E\rangle \text{ sono autostati di energia } E - \omega \\ \hat{a}^\dagger|E\rangle, \hat{b}^\dagger|E\rangle \text{ sono autostati di energia } E + \omega \end{cases}$$

Come abbiamo già verificato in precedenza è immediato notare che la Lagrangiana del campo compless di K.G. è invariante per rotazioni interne. Nel caso di rotazione infinitesima  $\hat{\Phi} \rightarrow e^{-i\alpha}\hat{\Phi} \simeq (1 - i\alpha)\hat{\Phi}$ , la corrente di simmetria è data da Eq. 3.31. Possiamo ora scriverla in forma operatoriale  $\hat{N}^\mu$  come

$$\hat{N}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \hat{\Phi})} \Delta \hat{\Phi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \hat{\Phi}^\dagger)} \Delta \hat{\Phi}^\dagger = -i(\partial^\mu \hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi} - \partial^\mu \hat{\Phi} \hat{\Phi}^\dagger). \quad (3.62)$$

La carica conservata è data da

$$\hat{N} \equiv \int d^3x \hat{N}^0 = i \int d^3x (\dot{\hat{\Phi}} \hat{\Phi}^\dagger - \hat{\Phi}^\dagger \dot{\hat{\Phi}}) = i \int d^3x (\hat{\Pi}^\dagger \hat{\Phi}^\dagger - \hat{\Pi} \hat{\Phi}), \quad (3.63)$$

che può essere riscritta come

$$\hat{N} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left[ \hat{a}^\dagger(k) \hat{a}(k) - \hat{b}^\dagger(k) \hat{b}(k) \right] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left[ \hat{n}_a(\vec{k}) - \hat{n}_b(\vec{k}) \right] \quad (3.64)$$

Dimostriamo quanto appena scritto usando le Eqs. 3.46 e 3.47

$$\begin{aligned} \hat{N} &= i \left( -\frac{i}{2} \right) \int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \int d^3x' \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \left\{ \left[ \hat{a}(\vec{k}') e^{-ik' \cdot x} - \hat{b}^\dagger(\vec{k}') e^{ik' \cdot x} \right] \right. \\ &\quad \left. \left[ \hat{b}(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{ik \cdot x} \right] - \left[ \hat{b}(\vec{k}') e^{-ik' \cdot x} - \hat{a}^\dagger(\vec{k}') e^{ik' \cdot x} \right] \left[ \hat{a}(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} + \hat{b}^\dagger(\vec{k}) e^{ik \cdot x} \right] \right\} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left\{ \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) + \left[ \hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \right] - \hat{b}(\vec{k}) \hat{b}^\dagger(\vec{k}) - \left[ \hat{b}(\vec{k}), \hat{b}^\dagger(\vec{k}) \right] \right\} + \\ &\quad \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left\{ \hat{b}(\vec{k}) \hat{a}(-\vec{k}) - \hat{b}(-\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) \right\} e^{-2i\omega t} + \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left\{ -\hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{b}^\dagger(-\vec{k}) + \hat{a}^\dagger(-\vec{k}) \hat{b}^\dagger(\vec{k}) \right\} e^{2i\omega t} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left\{ \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) - \hat{b}^\dagger(\vec{k}) \hat{b}(\vec{k}) \right\} \\ &\Rightarrow \hat{N} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left[ \hat{n}_a(\vec{k}) - \hat{n}_b(\vec{k}) \right] \end{aligned}$$

Nel secondo passaggio abbiamo usato la definizione della delta di Dirac  $\int d^3x e^{i(\vec{k}' \pm \vec{k}) \cdot \vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}' \pm \vec{k})$ , la quale ci ha permesso di integrare banalmente in  $d^3k'$ . Inoltre, ricordando che  $\omega = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ , la  $\delta^3(\vec{k} \pm \vec{k}')$  impone anche  $\omega' = \omega$ . Nel terzo passaggio abbiamo usato  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = [\hat{b}, \hat{b}^\dagger]$  e notato che i termini della quarta riga (riordinati sfruttando il fatto che operatori  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  commutano) sono funzioni dispari per cui il loro integrale è nullo.

Richiamando Eq. 3.58, possiamo scrivere l'Hamiltoniana come

$$\hat{H} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left[ \hat{n}_a(\vec{k}) + \hat{n}_b(\vec{k}) \right] \omega \quad (3.65)$$

Da tali espressioni risulta naturale interpretare le particelle corrispondenti agli operatori  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  come l'una l'antiparticella dell'altra. Esse contribuiscono allo stesso modo all'energia totale (in  $\hat{H}$  compare la somma degli operatori numero) ma in modo opposto alla quantità conservata  $\hat{N}$ , in cui compare la differenza tra il numero di particelle e di anti-particelle. Tale differenza è proporzionale alla **carica totale del sistema** che è conservata. Nella creazione di coppie di particella-antiparticella attraverso gli operatori  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  la carica totale rimane invariata. Possiamo anche dimostrare la validità delle relazioni:

$$[\hat{N}, \hat{H}] = 0 \quad ; \quad [\hat{N}, \hat{\Phi}] = -\hat{\Phi} \quad ; \quad [\hat{N}, \hat{\Phi}^\dagger] = \hat{\Phi}^\dagger. \quad (3.66)$$

La seconda relazione ci dice che  $\hat{\Phi}$  diminuisce di 1 la carica, cioè distrugge carica, mentre la terza ci dice che  $\hat{\Phi}^\dagger$  aumenta di 1 la carica, cioè crea carica. La prima relazione è l'invarianza di  $\hat{N}$ , in quanto per la equazione del moto di Heisenberg 3.10 vale:

$$-i[\hat{N}, \hat{H}] = \frac{d\hat{N}}{dt}$$

che ci dice inoltre che è possibile diagonalizzare simultaneamente  $\hat{H}$  e  $\hat{N}$ . Tali relazioni si dimostrano immediatamente notando che:

$$[\hat{N}, \hat{a}(\vec{k})] = -\hat{a}(\vec{k}) \quad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger(\vec{k})] = \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \quad (3.67)$$

$$[\hat{N}, \hat{b}(\vec{k})] = \hat{b}(\vec{k}) \quad [\hat{N}, \hat{b}^\dagger(\vec{k})] = -\hat{b}^\dagger(\vec{k}) \quad (3.68)$$

Supponiamo ora che  $|E, N\rangle$  sia un autostato di  $\hat{N}$  con autovalore  $n$ :

$$\hat{N} |E, N\rangle = n |E, N\rangle$$

Si possono ottenere le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \hat{N}\hat{a}(\vec{k}) |E, N\rangle &= ([\hat{N}, \hat{a}(\vec{k})] + \hat{a}(\vec{k})\hat{N}) |E, N\rangle = (n-1)\hat{a}(\vec{k}) |E, N\rangle \\ \hat{N}\hat{a}^\dagger(\vec{k}) |E, N\rangle &= ([\hat{N}, \hat{a}^\dagger(\vec{k})] + \hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{N}) |E, N\rangle = (n+1)\hat{a}^\dagger(\vec{k}) |E, N\rangle \\ \hat{N}\hat{b}(\vec{k}) |E, N\rangle &= ([\hat{N}, \hat{b}(\vec{k})] + \hat{b}(\vec{k})\hat{N}) |E, N\rangle = (n+1)\hat{b}(\vec{k}) |E, N\rangle \\ \hat{N}\hat{b}^\dagger(\vec{k}) |E, N\rangle &= ([\hat{N}, \hat{b}^\dagger(\vec{k})] + \hat{b}^\dagger(\vec{k})\hat{N}) |E, N\rangle = (n-1)\hat{b}^\dagger(\vec{k}) |E, N\rangle \end{aligned}$$

L'interpretazione particella-antiparticella è dunque la seguente: il campo  $\hat{\Phi}$  **distrugge una particella** attraverso l'operatore  $\hat{a}$  o **crea una antiparticella** attraverso  $\hat{b}^\dagger$ ;<sup>2</sup> in entrambi i casi la differenza  $n$  tra il numero di particelle ed antiparticelle diminuisce di un'unità. Analogamente il campo  $\hat{\Phi}^\dagger$  **crea una particella** attraverso  $\hat{a}^\dagger$  o **distrugge un'antiparticella** attraverso  $\hat{b}$ , aumentando  $n$  di un'unità. Infine, lo stato di vuoto in cui non sono presenti nè particelle nè antiparticelle è definito da:

$$\begin{cases} \hat{a}(k) |0\rangle = 0 \\ \hat{b}(k) |0\rangle = 0 \end{cases}, \forall k$$

Operatore	Energia	Carica	Descrizione
$\hat{a}^\dagger(\vec{k})  E, N\rangle$	$E + \omega$	$n + 1$	crea una particella
$\hat{a}(\vec{k})  E, N\rangle$	$E - \omega$	$n - 1$	distrugge una particella
$\hat{b}^\dagger(\vec{k})  E, N\rangle$	$E + \omega$	$n - 1$	crea una antiparticella
$\hat{b}(\vec{k})  E, N\rangle$	$E - \omega$	$n + 1$	distrugge una antiparticella

Table 3.1: Tabella riassuntiva degli operatori trattati per il campo di K.G. complesso.

### 3.5 Il campo di Dirac

Consideriamo ora il caso dell'equazione di Dirac 2.24. Nel formalismo lagrangiano questa è ottenibile attraverso l'Eq. 3.2 imponendo la **densità di lagrangiana di Dirac**:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi. \quad (3.69)$$

<sup>2</sup>Chiaramente quale stato venga chiamato particella e quale antiparticella è pura convenzione.

Mostriamo come la  $\mathcal{L}_D$  ci porti effettivamente all'equazione di Dirac. Nel derivarla dalla Eq. 3.2 occorre fare attenzione al fatto che il campo  $\Psi$  è uno spinore a 4 componenti, che possiamo rappresentare come un vettore colonna:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix}$$

È utile riscrivere le equazioni di Eulero-Lagrange e la lagrangiana di Dirac evidenziando le componenti di  $\Psi$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \Psi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_\mu \Psi_\alpha)} = 0 \quad ; \quad \mathcal{L}_D = i \bar{\Psi}_\beta \gamma_{\beta\alpha}^\mu \partial_\mu \Psi_\alpha - m \bar{\Psi}_\alpha \Psi_\alpha$$

avendo sottinteso le somme su  $\alpha, \beta$  per brevità. L'equazione di Eulero-Lagrange restituisce dunque:

$$-m \bar{\Psi}_\alpha - i \partial_\mu \bar{\Psi}_\beta \gamma_{\beta\alpha}^\mu = 0$$

che è la componente  $\alpha$  dell'equazione di Dirac per lo spinore aggiunto  $\bar{\Psi}$ ; prendendone l'hermitiano coniugato si ottiene l'equazione di Dirac per  $\Psi$ . Si ottiene la stessa equazione anche usando lo spinore aggiunto  $\bar{\Psi}_\alpha$  nell'equazione di Eulero-Lagrange invece di  $\Psi_\alpha$ .

La lagrangiana di Eq. 3.69 è reale e Lorentz-invariante, come deve essere. Si verifica semplicemente che  $\mathcal{L}_D^\dagger = \mathcal{L}_D$ . Verifichiamo che  $\mathcal{L}_D$  sia effettivamente un invariante sotto trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D' &= \bar{\Psi} S_\Lambda^{-1} (i \gamma^\mu \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu - m) S_\Lambda \Psi \\ &= i \bar{\Psi} (S_\Lambda^{-1} \gamma^\mu S_\Lambda \Lambda_\mu^\nu) \partial_\nu \Psi - m \bar{\Psi} S_\Lambda^{-1} S_\Lambda \Psi \\ &= i \bar{\Psi} \gamma^\nu \partial_\nu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi \\ &= \mathcal{L}_D \end{aligned}$$

Il momento coniugato di  $\Psi$  è:

$$\Pi_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \dot{\Psi}_\alpha}$$

Riscriviamo la lagrangiana in modo da evidenziare  $\dot{\Psi}$ :

$$\mathcal{L}_D = i \bar{\Psi}_\beta \gamma_{\beta\alpha}^0 \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial t} + i \bar{\Psi}_\beta \vec{\gamma}_{\beta\alpha} \cdot \vec{\nabla} \Psi_\alpha - m \bar{\Psi}_\alpha \Psi_\alpha$$

così da avere:

$$\Pi_\alpha = i \bar{\Psi}_\beta \gamma_{\beta\alpha}^0 = i (\bar{\Psi} \gamma^0)_\alpha = i (\Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0)_\alpha$$

cioè:

$$\Pi_\alpha = i \Psi_\alpha^\dagger \tag{3.70}$$

Possiamo ora trovare la **densità di hamiltoniana di Dirac**:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_D &= \Pi\dot{\Psi} - \mathcal{L}_D \\ &= \cancel{i\Psi_\alpha^\dagger\dot{\Psi}_\alpha} - \cancel{i\bar{\Psi}_\beta\gamma_{\beta\alpha}^0\frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial t}} - i\bar{\Psi}_\beta\gamma_{\beta\alpha}^i\cdot\vec{\nabla}\Psi_\alpha + m\bar{\Psi}_\alpha\Psi_\alpha \\ &= -i\bar{\Psi}\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}\Psi + m\bar{\Psi}\Psi\end{aligned}$$

ovvero:

$$\mathcal{H}_D = \bar{\Psi}(m - i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla})\Psi \quad (3.71)$$

Avevamo introdotto il bilineare (ora scritto già promuovendo i campi ad operatori)

$$N^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \quad (3.72)$$

che è un vettore controvariante. Vediamo ora che, se  $\Psi$  soddisfa l'equazione di Dirac,  $N^\mu$  rappresenta una corrente conservata, e la carica conservata è data da

$$N \equiv \int d^3\vec{x}N^0 = \int d^3\vec{x}\Psi^\dagger\Psi. \quad (3.73)$$

Consideriamo a tale scopo le proprietà di invarianza della lagrangiana  $\mathcal{L}_D$ , definita da Eq. 3.69 e che riscriviamo qui in forma operatoriale:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi \quad (3.74)$$

Questa è certamente invariante per effetto della trasformazione di fase costante:

$$\begin{cases} \Psi \longrightarrow \Psi' = e^{-i\alpha}\Psi \\ \bar{\Psi} \longrightarrow \bar{\Psi}' = e^{i\alpha}\bar{\Psi} \end{cases}$$

che, per  $\alpha = \epsilon$  infinitesime, si scrive:

$$\begin{cases} \Psi \longrightarrow \Psi' = -i\epsilon\Psi \\ \bar{\Psi} \longrightarrow \bar{\Psi}' = i\epsilon\bar{\Psi} \end{cases}$$

Il teorema di Noether ci dice che esiste una corrente conservata  $N^\mu$  associata a tale simmetria. Per cercarne l'espressione usiamo quanto già visto per l'equazione di Eulero-Lagrange (sottintendendo la sommatoria su  $\alpha$ ):

$$N^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu\Psi_\alpha)}\delta\Psi_\alpha = (i\bar{\Psi}_\beta\gamma_{\beta\alpha}^\mu)\delta\Psi_\alpha = \epsilon\bar{\Psi}_\beta\gamma_{\beta\alpha}^\mu\Psi_\alpha$$

dove abbiamo inserito  $\delta\Psi_\alpha = -i\epsilon\Psi_\alpha$ . Dal teorema di Noether otteniamo

$$\partial_\mu N^\mu = \epsilon\partial_\mu\left[\bar{\Psi}_\beta\gamma_{\beta\alpha}^\mu\Psi_\alpha\right] = 0.$$

L'equazione di continuità è quindi ora

$$\partial_\mu(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi) = 0, \quad (3.75)$$

cioè abbiamo dimostrato che la corrente conservata è  $N^\mu$  introdotta in Eq. 3.72.

Quantizziamo ora il campo di Dirac in modo del tutto analogo a quello usato per il campo complesso di Klein-Gordon. Sviluppiamo gli spinori  $\Psi, \bar{\Psi}$  in serie di funzioni d'onda che siano soluzioni dell'equazione di Dirac, con la cruciale differenza che ora abbiamo degli spinori in quanto vogliamo descrivere particelle fermioniche (a spin 1/2). Partendo dalla Eq. 2.24 possiamo associare soluzioni con impulso ed energia definiti

$$\begin{cases} u_s(\vec{k})e^{-ik \cdot x} \\ v_s(\vec{k})e^{ik \cdot x} \end{cases} \quad s = 1, 2$$

la cui relazione di dispersione è  $\omega = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$  che sono ridefinibili nella forma

$$u_s = \sqrt{\omega + m} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\omega + m} \chi_s \end{pmatrix} \quad v_s = \sqrt{\omega + m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\omega + m} \phi_s \\ \phi_s \end{pmatrix} \quad s = 1, 2 \quad (3.76)$$

dove le  $\chi_s, \phi_s$  sono definiti nella base bidimensionale

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Espandendo il campo quantistico possiamo definire queste soluzioni introducendo coefficienti operatoriali

$$\begin{aligned} \hat{\Psi} &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega} \sum_{s=1,2} [\hat{c}_s(k)u_s(k)e^{-ik \cdot x} + \hat{d}_s^\dagger(k)v_s(k)e^{ik \cdot x}] \\ \hat{\bar{\Psi}} &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega} \sum_{s=1,2} [\hat{c}_s^\dagger(k)\bar{u}_s(k)e^{ik \cdot x} + \hat{d}_s(k)\bar{v}_s(k)e^{-ik \cdot x}] \end{aligned} \quad (3.77)$$

Vorremmo ora interpretare  $\hat{c}_s^\dagger(k)$  come l'operatore di creazione di una particella di Dirac di spin  $s$  ed impulso  $k$ ; analogamente ci aspettiamo che l'operatore  $\hat{d}_s^\dagger(k)$  crei la corrispondente antiparticella. Definiamo ancora una volta il vuoto come:

$$\hat{c}_s(k)|0\rangle = 0 \quad ; \quad \hat{d}_s(k)|0\rangle = 0 \quad , \forall k, s$$

mentre uno stato di due particelle sarà dato da:

$$|k_1, s_1; k_2, s_2\rangle = \hat{c}_{s_1}^\dagger(k_1)\hat{c}_{s_2}^\dagger(k_2)|0\rangle$$

Sorge ora una differenza fondamentale rispetto al caso delle particelle di spin nullo studiate con il campo di Klein-Gordon: per i bosoni uno stato è simmetrico per scambio di due particelle identiche, ma per i fermioni di spin 1/2 della teoria di Dirac lo stato sarà antisimmetrico per tale scambio, ovvero deve essere:

$$|k_1, s_1; k_2, s_2\rangle = -|k_2, s_2; k_1, s_1\rangle$$



Per assicurarci che questa condizione di antisimmetria sia verificata dobbiamo imporre che gli operatori di creazione e distruzione delle particelle di Dirac non seguano le regole di commutazione come nel caso bosonico, bensì regole di anticommutazione:

$$\begin{aligned} \{\hat{c}_s(k), \hat{c}_{s'}^\dagger(k')\} &= \{\hat{d}_s(k), \hat{d}_{s'}^\dagger(k')\} = (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{ss'} \\ \{\hat{c}_s(k), \hat{c}_{s'}(k')\} &= \{\hat{c}_s^\dagger(k), \hat{c}_{s'}^\dagger(k')\} = \{\hat{d}_s(k), \hat{d}_{s'}(k')\} = \{\hat{d}_s^\dagger(k), \hat{d}_{s'}^\dagger(k')\} = 0 \end{aligned} \quad (3.78)$$

le quali implicano:

$$\hat{c}_{s_1}^\dagger(k_1) \hat{c}_{s_2}^\dagger(k_2) = -\hat{c}_{s_2}^\dagger(k_2) \hat{c}_{s_1}^\dagger(k_1)$$

soddisfando pertanto il principio di esclusione di Pauli. Un'altra conseguenza delle regole di anticommutazione degli operatori  $\hat{c}_s(k)$ ,  $\hat{d}_s(k)$  è che per  $\hat{\Psi}$ ,  $\hat{\Pi}$  valgono:

$$\begin{aligned} \{\hat{\Psi}_s(\vec{x}, t), \hat{\Psi}_{s'}^\dagger(\vec{y}, t)\} &= \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{ss'} \\ \{\hat{\Psi}_s(\vec{x}, t), \hat{\Pi}_{s'}(\vec{y}, t)\} &= i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{ss'} \end{aligned}$$

con tutte le altre possibili parentesi di anticommutazione nulle.

Vediamo ora se e come le relazioni di anticommutazione 3.78 influiscono sulla interpretazione particella- antiparticella degli stati creati o distrutti dagli operatori  $\hat{c}$ ,  $\hat{d}$ .

Inserendo ora l'espansione del campo  $\hat{\Psi}$  di Eq. 3.77 nell'espressione della corrente conservata Eq. 3.73, si ha:

$$\hat{N} = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega} \sum_{s=1,2} [\hat{c}_s^\dagger(k) \hat{c}_s(k) + \hat{d}_s(k) \hat{d}_s^\dagger(k)] ,$$

avendo sfruttato solamente le proprietà degli spinori, senza per il momento utilizzare le Eqs. 3.78. Dimostriamolo:

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \int d^3 x \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} = \int d^3 x \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2\omega'} \sum_{s,s'} [\hat{c}_s^\dagger(\vec{k}) u_s^\dagger(\vec{k}) e^{ik \cdot x} \\ &\quad + \hat{d}_s(\vec{k}) v_s^\dagger(\vec{k}) e^{-ik \cdot x}] [\hat{c}_{s'}(\vec{k}') u_{s'}(\vec{k}') e^{-ik' \cdot x} + \hat{d}_{s'}^\dagger(\vec{k}') v_{s'}(\vec{k}') e^{ik' \cdot x}] \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2\omega'} \sum_{s,s'} \int d^3 x \left\{ \hat{c}_s^\dagger(\vec{k}) \hat{c}_{s'}(\vec{k}') u_s^\dagger(\vec{k}) u_{s'}(\vec{k}') e^{i(\omega - \omega')t - i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}} \right. \\ &\quad + \hat{d}_s(\vec{k}) \hat{d}_{s'}^\dagger(\vec{k}') v_s^\dagger(\vec{k}) v_{s'}(\vec{k}') e^{-i(\omega - \omega')t + i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}} \\ &\quad + \hat{c}_s^\dagger(\vec{k}) \hat{d}_{s'}^\dagger(\vec{k}') u_s^\dagger(\vec{k}) v_{s'}(\vec{k}') e^{i(\omega + \omega')t - i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}} \\ &\quad \left. + \hat{d}_s(\vec{k}) \hat{c}_{s'}(\vec{k}') v_s^\dagger(\vec{k}) u_{s'}(\vec{k}') e^{-i(\omega + \omega')t + i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}} \right\} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 4\omega^2} \sum_{s,s'} \left\{ \hat{c}_s^\dagger(\vec{k}) \hat{c}_{s'}(\vec{k}) u_s^\dagger(\vec{k}) u_{s'}(\vec{k}) + \hat{d}_s(\vec{k}) \hat{d}_{s'}^\dagger(\vec{k}) v_s^\dagger(\vec{k}) v_{s'}(\vec{k}) \right. \\ &\quad \left. + \hat{c}_s^\dagger(\vec{k}) \hat{d}_{s'}^\dagger(-\vec{k}') u_s^\dagger(\vec{k}) v_{s'}(-\vec{k}') e^{2i\omega t} + \hat{d}_s(\vec{k}) \hat{c}_{s'}(-\vec{k}') v_s^\dagger(\vec{k}) u_{s'}(-\vec{k}') e^{-2i\omega t} \right\} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} \sum_s \left\{ \hat{c}_s^\dagger(k) \hat{c}_s(k) + \hat{d}_s(k) \hat{d}_s^\dagger(k) \right\} . \end{aligned}$$

Nel terzo passaggio abbiamo usato  $\int d^3x e^{i(\vec{k}\pm\vec{k}')\cdot\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}\pm\vec{k}')$  e  $\vec{k}' = \pm\vec{k} \rightarrow \omega = \omega'$ . Nel quarto passaggio abbiamo invece usato  $u_s^\dagger(\vec{k})u_{s'}(\vec{k}) = v_s^\dagger(\vec{k})v_{s'}(\vec{k}) = 2\omega\delta_{ss'}$  e  $u_s^\dagger(\vec{k})v_{s'}(-\vec{k}) = v_s^\dagger(\vec{k})u_{s'}(-\vec{k}) = 0$  (come si può verificare dalle espressioni esplicite di Eq. 3.76). In modo del tutto analogo, possiamo trovare che l'hamiltoniana 3.71 si può riscrivere nella forma:

$$\hat{H}_D = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega} \sum_{s=1,2} [\hat{c}_s^\dagger(k)\hat{c}_s(k) - \hat{d}_s(k)\hat{d}_s^\dagger(k)]\omega$$

Da queste espressioni risulta del tutto evidente come le relazioni di anticommutazione 3.78 siano consistenti con l'interpretazione di  $\hat{c}^\dagger$  e  $\hat{d}^\dagger$  come operatori di creazione di particella ed antiparticella. Se le relazioni fossero invece di commutazione avremmo che l'energia totale del sistema di particelle libere sarebbe legata alla differenza tra il numero delle particelle “di tipo  $c$ ” e quello delle particelle “di tipo  $d$ ” e potrebbe quindi essere negativa, che fisicamente non ha senso. Invece grazie alle relazioni di anticommutazione troviamo:

$$\hat{N} = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega} \sum_{s=1,2} [\hat{c}_s^\dagger(k)\hat{c}_s(k) - \hat{d}_s^\dagger(k)\hat{d}_s(k)] \quad (3.79)$$

$$\hat{H}_D = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega} \sum_{s=1,2} [\hat{c}_s^\dagger(k)\hat{c}_s(k) + \hat{d}_s^\dagger(k)\hat{d}_s(k)]\omega \quad (3.80)$$

dove abbiamo, come sempre, ignorato i termini costanti di energia infinita. Anche qui la differenza tra operatori che compare in  $\hat{N}$  è direttamente proporzionale alla carica totale del sistema, e dunque  $d\hat{N}/dt = 0$  descrive la conservazione della carica.

La necessità di avere relazioni di commutazione/anticommutazione per bosoni/fermioni mostra come la teoria dei campi imponga la relazione tra spin e statistica.

Operatore	Energia	Carica	Descrizione
$\hat{c}^\dagger(\vec{k})  E, N\rangle$	$E + \omega$	$n + 1$	crea una particella fermionica
$\hat{c}(\vec{k})  E, N\rangle$	$E - \omega$	$n - 1$	distrukge una particella fermionica
$\hat{d}^\dagger(\vec{k})  E, N\rangle$	$E + \omega$	$n - 1$	crea una antiparticella fermionica
$\hat{d}(\vec{k})  E, N\rangle$	$E - \omega$	$n + 1$	distrukge una antiparticella fermionica

Table 3.2: Tabella riassuntiva degli operatori trattati per il campo di Dirac.

## Chapter 4

# Elementi di Elettrodinamica Quantistica

Le densità di lagrangiana di Klein-Gordon e di Dirac, studiate nel capitolo precedente:

$$\hat{\mathcal{L}}_{KG} = \partial_\mu \hat{\Phi}^\dagger \partial^\mu \hat{\Phi} - m^2 \hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi} \quad (4.1)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_D = \hat{\Psi}^\dagger (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \hat{\Psi} \quad (4.2)$$

e le relative equazioni del moto:

$$(\square + m^2) \hat{\Phi} = 0 \quad (4.3)$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \hat{\Psi} = 0 \quad (4.4)$$

descrivono particelle libere. Vogliamo ora introdurre l'interazione elettromagnetica.

Abbiamo già visto come farlo in Sezione 2.5, sfruttando il principio di gauge. Nelle seguenti Sezioni determineremo quindi come le lagrangiane appena richiamate vengono modificate introducendo l'interazione di campi di particelle cariche di spin 0 e  $1/2$  con il campo elettromagnetico.

### 4.1 Lagrangiana di QED per particelle con spin $1/2$

La lagrangiana di Dirac libera (4.2) è invariante per trasformazioni di fase globali, cioè ha un gruppo di simmetria  $U(1)$ . Dalla Sezione 2.5 sappiamo anche che essa diventa invariante per trasformazioni di fase locale del gruppo  $U(1)$ , che riscriviamo qui ponendo  $q = e$  (cioè la carica del protone) e  $\alpha(\vec{x}, t) = -e\hat{\chi}(x)$ :

$$\hat{\Psi}(x) \longrightarrow \hat{\Psi}'(x) = \hat{\Psi}(x) e^{-ie\hat{\chi}(x)} \quad (4.5)$$

a condizione che si sostituisca la derivata  $\partial^\mu$  con la derivata covariante  $\hat{D}^\mu$ :

$$\partial^\mu \longrightarrow \hat{D}^\mu \equiv \partial^\mu + ie\hat{A}^\mu$$

e che il quadri-potenziale quantizzato  $\hat{A}^\mu$  (vedremo a breve la sua quantizzazione) si trasformi come:

$$\hat{A}^\mu \longrightarrow \hat{A}'^\mu = \hat{A}^\mu + \partial^\mu \hat{\chi} \quad (4.6)$$

Inserendo la derivata covariante nella lagrangiana di Dirac otteniamo la lagrangiana trasformata:

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\Psi}(i\gamma^\mu \hat{D}_\mu - m)\hat{\Psi} = \hat{\Psi}[i\gamma^\mu \partial_\mu + i\gamma^\mu (ie\hat{A}_\mu) - m]\hat{\Psi} = \hat{\mathcal{L}}_D + \hat{\mathcal{L}}_{int}$$

dove la **lagrangiana di interazione con il campo elettromagnetico** è data da:

$$\hat{\mathcal{L}}_{int} = -e\hat{\Psi}\gamma^\mu \hat{A}_\mu \hat{\Psi} = -e\hat{\Psi}\hat{A}\hat{\Psi} \quad (4.7)$$

e abbiamo ricordato la notazione “*slashed*” (2.98). Vale la pena di verificare esplicitamente che la lagrangiana:

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_D + \hat{\mathcal{L}}_{int} = i\hat{\Psi}_\alpha \gamma^\mu_{\alpha\beta} \partial_\mu \hat{\Psi}_\beta - m\hat{\Psi}_\alpha \hat{\Psi}_\alpha - e\hat{\Psi}_\alpha \gamma^\mu_{\alpha\beta} \hat{\Psi}_\beta \hat{A}_\mu$$

inserita nell’equazione di Eulero-Lagrange per  $\hat{\Psi}$  restituisca la corretta equazione del moto (2.108). Vediamo che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu \hat{\Psi}_\alpha)} &= 0 \\ \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \hat{\Psi}_\alpha} &= i\gamma^\mu_{\alpha\beta} \partial_\mu \hat{\Psi}_\beta - m\hat{\Psi}_\alpha - e\gamma^\mu_{\alpha\beta} \hat{\Psi}_\beta \hat{A}_\mu = [(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\hat{\Psi} - e\gamma^\mu \hat{A}_\mu \hat{\Psi}]_\alpha \end{aligned}$$

Otteniamo dunque:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\hat{\Psi} = e\hat{A}\hat{\Psi}$$

che è proprio l’equazione di Dirac per interazione elettromagnetica.

Tornando alla lagrangiana di interazione  $\hat{\mathcal{L}}_{int}$ , nella sua definizione (4.7) notiamo la presenza della corrente di simmetria:

$$\hat{N}^\mu = \hat{\Psi}\gamma^\mu \hat{\Psi}$$

Possiamo allora definire la quantità:

$$\hat{J}_{em}^\mu \equiv e\hat{\Psi}\gamma^\mu \hat{\Psi} = e\hat{N}^\mu \quad (4.8)$$

identificabile come l’operatore quadri-corrente elettromagnetica<sup>1</sup>; infatti si ha:

$$\hat{J}_{em}^0 \equiv e\hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}$$

<sup>1</sup>In Eq. 4.8 abbiamo utilizzato la convenzione di segno più comunemente diffusa in letteratura. Rispetto a  $j^\mu$  di Eq. 1.109, il segno è opposto, e conseguentemente anche il segno nelle equazioni di Maxwell.

cioè la carica elettrica per l'operatore densità. La seconda uguaglianza di Eq. (4.8) lega la quadricorrente elettromagnetica alla corrente di simmetria, la cui conservazione  $\partial_\mu \hat{N}^\mu = 0$  è legata all'invarianza della teoria per trasformazioni di fase globale  $U(1)$ . Ne segue pertanto che la **conservazione della carica elettrica**:

$$\partial_\mu \hat{J}_{em}^\mu = 0$$

è legata essa stessa all'**invarianza per trasformazioni di fase globali del gruppo  $U(1)$**  (che il principio di gauge promuove a simmetria locale).

Il principio di gauge fissa dunque la forma dell'interazione tra la particella di spin  $1/2$  ed il campo elettromagnetico  $\hat{A}^\mu$ :

$$\hat{\mathcal{L}}_{int} = -\hat{J}_{em}^\mu \hat{A}_\mu$$

Per completare la lagrangiana di elettrodinamica quantistica è necessario affiancare, alla  $\hat{\mathcal{L}}_D$  di particella di Dirac libera e alla  $\hat{\mathcal{L}}_{int}$  associata all'interazione tra particella e campo elettromagnetico, una  $\hat{\mathcal{L}}_{em}$  che descriva il solo campo elettromagnetico, cioè i fotoni liberi:

$$\hat{\mathcal{L}}_{QED} = \hat{\mathcal{L}}_D + \hat{\mathcal{L}}_{em} + \hat{\mathcal{L}}_{int}$$

La lagrangiana elettromagnetica da determinare deve portarci, attraverso le equazioni di Eulero-Lagrange, alle equazioni di Maxwell per  $\hat{A}^\mu$ :

$$\partial_\nu \hat{F}^{\nu\mu} = \hat{J}_{em}^\mu \Rightarrow \square \hat{A}^\mu - \partial^\mu \partial_\nu \hat{A}^\nu = \hat{J}_{em}^\mu \quad (4.9)$$

Possiamo scrivere la lagrangiana elettromagnetica come:

$$\hat{\mathcal{L}}_{em} = -\frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} \quad (4.10)$$

in quanto unica combinazione del tensore di campo elettromagnetico che dia un invariante di Lorentz. La lagrangiana di Eq. 4.10 è chiaramente invariante per effetto delle trasformazioni di gauge (4.6). Verifichiamo inoltre che la lagrangiana:

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_D + \hat{\mathcal{L}}_{int} + \hat{\mathcal{L}}_{em}$$

restituisca effettivamente Eq. (4.9) per  $\hat{A}^\mu$  attraverso le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \hat{A}_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\nu \hat{A}_\mu)} = 0$$

Per farlo notiamo che  $\hat{\mathcal{L}}_D$  non dipende da  $\hat{A}_\mu$ , che  $\hat{\mathcal{L}}_{int}$  contiene solo i campi  $\hat{A}_\mu$ , mentre  $\hat{\mathcal{L}}_{em}$  contiene solo le derivate  $\partial_\mu \hat{A}_\nu$ . Le equazioni di Eulero-Lagrange diventano così:

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_{int}}{\partial \hat{A}_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_{em}}{\partial (\partial_\nu \hat{A}_\mu)} = 0$$

Il primo termine è chiaramente:

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_{int}}{\partial \hat{A}_\mu} = -\hat{j}_{em}^\mu .$$

Per calcolare invece il secondo termine riscriviamo la lagrangiana del campo elettromagnetico come:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_{em} &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu)(\partial^\mu \hat{A}^\nu - \partial^\nu \hat{A}^\mu) \\ &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu \hat{A}_\nu \partial^\mu \hat{A}^\nu - \partial_\mu \hat{A}_\nu \partial^\nu \hat{A}^\mu - \partial_\nu \hat{A}_\mu \partial^\mu \hat{A}^\nu + \partial_\nu \hat{A}_\mu \partial^\nu \hat{A}^\mu) \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_\nu \hat{A}_\mu \partial^\nu \hat{A}^\mu - \partial_\nu \hat{A}_\mu \partial^\mu \hat{A}^\nu) \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_{em}}{\partial (\partial_\nu \hat{A}_\mu)} = -\partial^\nu \hat{A}^\mu + \partial^\mu \hat{A}^\nu$$

Otteniamo così dall'equazione di Eulero-Lagrange:

$$-\hat{j}_{em}^\mu + \partial_\nu (\partial^\nu \hat{A}^\mu) - \partial_\nu \partial^\mu \hat{A}^\nu = 0$$

ossia l'equazione di Maxwell cercata:

$$\square \hat{A}^\mu - \partial^\mu \partial_\nu \hat{A}^\nu = \hat{j}_{em}^\mu$$

Abbiamo così raggiunto il nostro scopo, e possiamo scrivere la **densità di lagrangiana di QED per particelle di spin 1/2**:

$$\hat{\mathcal{L}}_{QED} = \hat{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\hat{\Psi} - \frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu} - \hat{j}_{em}^\mu \hat{A}_\mu \quad (4.11)$$

$$= \hat{\Psi}(i\gamma^\mu \hat{D}_\mu - m)\hat{\Psi} - \frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu} \quad (4.12)$$

che rappresenta uno straordinario esempio di sintesi fisica. Combina infatti la meccanica quantistica, la teoria di campo, la relatività ristretta e l'elettromagnetismo in un'unica equazione che descrive a livello fondamentale il comportamento di materia e radiazione (a meno di interazioni gravitazionali e nucleari).

## 4.2 Lagrangiana di QED per particella con spin 0

Consideriamo ora, più brevemente, la lagrangiana di Klein-Gordon libera di Eq. (4.1). Inserendo la derivata covariante:

$$\partial^\mu \hat{\Phi} \longrightarrow \hat{D}^\mu \hat{\Phi} \equiv \partial^\mu \hat{\Phi} + ie\hat{A}^\mu \hat{\Phi} \quad , \quad \partial^\mu \hat{\Phi}^\dagger \longrightarrow (\hat{D}^\mu \hat{\Phi})^\dagger \equiv \partial^\mu \hat{\Phi}^\dagger - ie\hat{A}^\mu \hat{\Phi}^\dagger$$

otteniamo la nuova lagrangiana:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}} &= (D_\mu \hat{\Phi})^\dagger (D^\mu \hat{\Phi}) - m^2 \hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi} \\ &= (\partial_\mu - ie \hat{A}_\mu) \hat{\Phi}^\dagger (\partial^\mu + ie \hat{A}^\mu) \hat{\Phi} - m^2 \hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi} \\ &= \hat{\mathcal{L}}_{KG} + ie (\partial_\mu \hat{\Phi}^\dagger) \hat{A}^\mu \hat{\Phi} - ie \hat{A}_\mu \hat{\Phi}^\dagger \partial^\mu \hat{\Phi} + e^2 \hat{A}_\mu \hat{\Phi}^\dagger \hat{A}^\mu \hat{\Phi}\end{aligned}$$

in cui compare la densità di lagrangiana di interazione:

$$\hat{\mathcal{L}}_{int} = -ie [\hat{\Phi}^\dagger (\partial^\mu \hat{\Phi}) - (\partial^\mu \hat{\Phi}^\dagger) \hat{\Phi}] \hat{A}_\mu + e^2 \hat{A}^\mu \hat{A}_\mu \hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi} \quad (4.13)$$

Analogamente a quanto visto nell'ultima sezione, possiamo definire la quadricorrente elettromagnetica:

$$\hat{j}_{em}^\mu = -\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_{int}}{\partial \hat{A}_\mu} = ie [\hat{\Phi}^\dagger (\partial^\mu \hat{\Phi}) - (\partial^\mu \hat{\Phi}^\dagger) \hat{\Phi}] - 2e^2 \hat{A}^\mu \hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi}. \quad (4.14)$$

Si può dimostrare (esercizio) che le equazioni di Eulero-Lagrange ci permettono di riottenere Eq. 2.107 e le equazioni di Maxwell 4.9. Notiamo inoltre che questa corrente, a differenza di Eq. (4.8), contiene un termine dipendente da  $\hat{A}^\mu$ . Tale termine è di ordine  $e^2$ , cioè di ordine superiore rispetto a quanto considerato nel derivare la corrente associata all'invarianza di fase globale.

Aggiungendo la densità di lagrangiana per i fotoni liberi da Eq. (4.10), otteniamo la **densità di lagrangiana di QED per particelle di spin 0**:

$$\hat{\mathcal{L}}_{QED_{KG}} = \partial_\mu \hat{\Phi}^\dagger \partial^\mu \hat{\Phi} - m^2 \hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi} - \frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} - ie [\hat{\Phi}^\dagger (\partial^\mu \hat{\Phi}) - (\partial^\mu \hat{\Phi}^\dagger) \hat{\Phi}] \hat{A}_\mu + e^2 \hat{A}^\mu \hat{A}_\mu \hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi} \quad (4.15)$$

### 4.3 Campo elettromagnetico e sua quantizzazione

Partiamo col determinare l'espressione esplicita di  $A^\mu$ . Nel caso più semplice essa è soluzione dell'equazione di Maxwell nel vuoto:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0$$

Sfruttando l'invarianza per trasformazioni di gauge  $A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu \chi$ , possiamo scegliere il gauge di Lorenz  $\partial_\mu A^\mu = 0$  e riscrivere l'equazione di Maxwell in una forma più compatta:

$$\square A^\mu = 0.$$

Tale equazione ha come soluzione le onde piane:

$$A^\mu = N_k \epsilon^\mu e^{-ik \cdot x} \quad (4.16)$$

dove abbiamo introdotto un fattore di normalizzazione  $N_k$  e un **vettore di polarizzazione dell'onda**,  $\epsilon^\mu$ .

Analizziamo nel dettaglio tale vettore di polarizzazione  $\epsilon^\mu$ . Il gauge di Lorenz è riscrivibile nella condizione:

$$k_\mu \epsilon^\mu = k \cdot \epsilon = 0$$

che riduce le quattro componenti di  $\epsilon^\mu$  a tre componenti indipendenti. Tuttavia, come già visto nella sezione 1.3.3, questo non esaurisce completamente la libertà di gauge ed è possibile eseguire un'ulteriore trasformazione di gauge:

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \tilde{\chi}$$

senza alterare la condizione di Lorenz, a patto che la funzione  $\tilde{\chi}$  sia armonica, cioè  $\square \tilde{\chi} = 0$ . In termini del vettore di polarizzazione tale trasformazione è data da:

$$\epsilon^\mu \longrightarrow \epsilon'^\mu = \epsilon^\mu + \beta k^\mu \quad (4.17)$$

che infatti lascia inalterata la condizione di Lorenz:

$$k_\mu \epsilon'^\mu = k_\mu \epsilon^\mu + \beta k_\mu k^\mu = k_\mu \epsilon^\mu$$

essendo la massa del fotone  $k_\mu k^\mu$  nulla.

Scriviamo impulso e vettore di polarizzazione come:

$$k^\mu = (\omega, \vec{k}) \quad ; \quad \epsilon^\mu = (\epsilon^0, \vec{\epsilon}).$$

Scegliendo  $\beta = -\epsilon^0/k^0$ , la trasformazione (4.17) permette di porci nel caso in cui  $\epsilon^0 = 0$ , in modo da ridurre la condizione di Lorenz a:

$$\vec{k} \cdot \vec{\epsilon} = 0$$

Abbiamo cioè due soli vettori di polarizzazione indipendenti, entrambi **trasversi**, cioè perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda  $\vec{k}$ . Abbiamo dunque riottenuto il noto risultato per cui i campi elettromagnetici liberi sono puramente trasversi, cioè vale  $\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{k}$ . Le condizioni di gauge ci permettono di ridurre i gradi di libertà di  $A^\mu$ , o equivalentemente di  $\epsilon^\mu$ , da quattro a due.

Considerando ad esempio un'onda che viaggia lungo la direzione  $z$ , cioè con:

$$k^\mu = (k^0, 0, 0, k^0)$$

possiamo scegliere questi vettori di polarizzazione come i versori delle direzioni  $x$ ,  $y$ :

$$\begin{aligned} \vec{\epsilon}_{(1)} &= \vec{u}_x = (1, 0, 0) \\ \vec{\epsilon}_{(2)} &= \vec{u}_y = (0, 1, 0) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Questa scelta corrisponde ad una **polarizzazione lineare** dei campi elettromagnetici associati all'onda, calcolabili dalle equazioni di Maxwell:

$$\begin{aligned} A_{(1)}^\mu &= N_k (0, \vec{\epsilon}_1) e^{-i(\omega t - kz)} \\ A_{(2)}^\mu &= N_k (0, \vec{\epsilon}_2) e^{-i(\omega t - kz)}, \end{aligned} \quad (4.19)$$



con  $\omega = k = k^0$ . Ad esempio, i campi  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  associati a  $\vec{\epsilon}_1$  sono dati da:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla}A_{(1)}^0 - \frac{\partial \vec{A}_{(1)}}{\partial t} = i\omega N_k e^{-i(\omega t - kz)} \vec{u}_x \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}_{(1)} = \frac{\partial A_{(1)x}}{\partial z} \vec{u}_y = ik N_k e^{-i(\omega t - kz)} \vec{u}_y\end{aligned}$$

oscillanti dunque, rispettivamente, lungo  $\vec{u}_x$  e lungo  $\vec{u}_y$  ed aventi lo stesso modulo. I campi  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  associati a  $\vec{\epsilon}_2$  sono invece rispettivamente orientati lungo  $\vec{u}_y$  e lungo  $-\vec{u}_x$ .

Un'altra scelta molto comune è invece data dalle combinazioni lineari delle (4.18):

$$\begin{aligned}\vec{\epsilon}(\lambda = +1) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0) \\ \vec{\epsilon}(\lambda = -1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i, 0)\end{aligned}\tag{4.20}$$

corrispondenti ad una **polarizzazione circolare**. Il campo  $\vec{E}$  corrispondente ad esempio alla scelta  $\lambda = +1$  ha due componenti oscillanti lungo gli assi  $x$  e  $y$ , con uno sfasamento di  $90^\circ$  causato dal fattore  $i$  ed aventi uguale modulo. Si noti inoltre che per queste scelte di polarizzazione valgono le proprietà:

$$\vec{\epsilon}^*(\lambda) \cdot \vec{\epsilon}(\lambda') = \delta_{\lambda\lambda'} \quad ; \quad \epsilon_{\mu}^*(\lambda) \epsilon^{\mu}(\lambda') = -\delta_{\lambda\lambda'}$$

La convenzione di fase usata in (4.20) è la stessa usata in meccanica quantistica per stati di definita elicità  $\lambda \pm 1$ , dove con **elicità** si intende la proiezione dello spin lungo la direzione del moto (in questo caso lungo l'asse  $z$ ).

La quantizzazione del campo  $A^\mu$  ci permette di interpretarlo in termini fotoni di quadri-impulso  $k^\mu$  e polarizzazione  $\epsilon^\mu$ . Promuoviamo il campo ad operatore ed espandiamo  $\hat{A}_\mu$  in onde piane (e polarizzazione circolare) in analogia con quanto fatto per altri campi quantistici:

$$\hat{A}^\mu(x) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega} [\epsilon^\mu(k, \lambda) \hat{\alpha}(k, \lambda) e^{-ik \cdot x} + \epsilon^{\mu*}(k, \lambda) \hat{\alpha}^\dagger(k, \lambda) e^{ik \cdot x}] .$$

L'operatore  $\hat{\alpha}$  è interpretato come l'**operatore di distruzione** di un fotone avente quadri-impulso  $k$  ed elicità  $\lambda$ , e  $\hat{\alpha}^\dagger$  come l'**operatore di creazione** di un fotone avente eguali caratteristiche. Per questi operatori varranno:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}[\hat{\alpha}(k, \lambda), \hat{\alpha}^\dagger(k', \lambda')] &= (2\pi)^3 2\omega \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \\ [\hat{\alpha}, \hat{\alpha}] &= [\hat{\alpha}^\dagger, \hat{\alpha}^\dagger] = 0\end{aligned}\tag{4.21}$$

<sup>2</sup>La dimostrazione nel caso di  $A_\mu$  è più complessa rispetto a quanto visto per  $\Phi$  e  $\Psi$ . Questo è dovuto al fatto che le quattro componenti del vettore di Lorentz non sono indipendenti, come appena dimostrato. Nella quantizzazione canonica bisogna considerare i vincoli, nella forma delle condizioni di gauge, e ciò non è banale.

Definiamo lo stato vuoto  $|0\rangle$  come

$$\hat{\alpha}(k, \lambda) |0\rangle = 0 \quad \forall k, \lambda \quad (4.22)$$

e lo stato di 1 fotone come

$$|k, \lambda\rangle \propto \hat{\alpha}^\dagger(k, \lambda) |0\rangle \quad (4.23)$$

La funzione d'onda può essere espressa attraverso l'elemento di matrice  $\langle 0 | \hat{A}^\mu(x) |k, \lambda\rangle$  (che è legato alla probabilità che l'operatore  $\hat{A}^\mu$  crei un fotone nel punto  $x$ ). Dimostriamolo:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{A}^\mu(x) |k, \lambda\rangle &\propto \sum_{\lambda'} \int \frac{d^3 \vec{k}'}{(2\pi)^3 2\omega} [\epsilon^\mu(k', \lambda') e^{-ik' \cdot x} \langle 0 | \hat{\alpha}(k', \lambda') \hat{\alpha}^\dagger(k, \lambda) |0\rangle \\ &\quad + \epsilon^{\mu*}(k', \lambda') e^{ik' \cdot x} \langle 0 | \hat{\alpha}^\dagger(k', \lambda') \hat{\alpha}^\dagger(k, \lambda) |0\rangle] \\ &\propto \sum_{\lambda'} \int \frac{d^3 \vec{k}'}{(2\pi)^3 2\omega} [\epsilon^\mu(k', \lambda') e^{-ik' \cdot x} \langle 0 | [\hat{\alpha}(k', \lambda'), \hat{\alpha}^\dagger(k, \lambda)] - \hat{\alpha}^\dagger(k, \lambda) \hat{\alpha}(k', \lambda') |0\rangle] \\ &\propto \epsilon^\mu(k, \lambda) e^{-ik \cdot x} \end{aligned} \quad (4.24)$$

#### 4.4 Hamiltoniana di interazione

Cerchiamo ora di esprimere la densità di Hamiltoniana in termini della densità di Lagrangiana, nel caso in cui sono presenti interazioni:

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_0 + \hat{\mathcal{L}}_{int} \longrightarrow \hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_{int}$$

Dalla definizione si ottiene:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\hat{\Phi}}} \dot{\hat{\Phi}} - \hat{\mathcal{L}} = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_0}{\partial \dot{\hat{\Phi}}} \dot{\hat{\Phi}} + \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_{int}}{\partial \dot{\hat{\Phi}}} \dot{\hat{\Phi}} - \hat{\mathcal{L}}_0 - \hat{\mathcal{L}}_{int}$$

Se  $\hat{\mathcal{L}}_{int}$  non contiene derivate del campo, ed in particolare non contiene derivate temporali  $\dot{\hat{\Phi}}$ , come accade ad esempio nel caso di Eq. (4.7) per un campo di Dirac interagente con il campo elettromagnetico, questa diventa semplicemente:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_0}{\partial \dot{\hat{\Phi}}} \dot{\hat{\Phi}} - \hat{\mathcal{L}}_0 - \hat{\mathcal{L}}_{int} = \hat{\mathcal{H}}_0 - \hat{\mathcal{L}}_{int}$$

da cui otteniamo:

$$\hat{\mathcal{H}}_{int} = -\hat{\mathcal{L}}_{int} \quad (4.25)$$

Nel caso in cui invece la lagrangiana di interazione contenga derivate del campo, allora otterremmo un termine aggiuntivo:

$$\hat{\mathcal{H}}_{int} = -\hat{\mathcal{L}}_{int} + \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_{int}}{\partial \dot{\hat{\Phi}}} \dot{\hat{\Phi}} .$$

In realtà si può vedere (ma non lo dimostriamo qui) che tale termine si cancella nel calcolo di grandezze fisiche. Al contrario di  $\hat{\mathcal{L}}$ , che abbiamo visto essere Lorentz-invariante, questo termine non è Lorentz-invariante e come conseguenza determinerebbe un'ampiezza di transizione  $A_{fi}^{(1)}$  non invariante. E' chiaro quindi che non può sopravvivere se la teoria è relativistica. Considereremo dunque come Hamiltoniana d'interazione l'espressione  $\hat{\mathcal{H}}_{int} = -\hat{\mathcal{L}}_{int}$ .

Grazie a ciò, il momento coniugato rimane invariato:

$$\hat{\Pi}(t, \vec{x}) = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_0}{\partial \dot{\hat{\Phi}}(t, \vec{x})}, \quad (4.26)$$

e di conseguenza anche le relazioni di commutazione, viste nel capitolo precedente.

## 4.5 Rappresentazione di interazione

I campi di Klein-Gordon e di Dirac per particelle libere hanno una dipendenza temporale generata dalla hamiltoniana per particella libera  $H_0$ . Essendo operatori descritti in rappresentazione di Heisenberg vale:

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} = -i[\hat{\Phi}, \hat{H}_0] \quad (4.27)$$

Dimostriamolo per esempio nel caso di K.G. (analogamente si vede per il campo di Dirac). Dall'hamiltoniana (3.58) si ha:

$$[\hat{\Phi}, \hat{H}_0] = \int \frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{(2\pi)^6 4\omega\omega'} \omega' [\hat{a}(k)e^{-ik\cdot x} + \hat{b}^\dagger(k)e^{ik\cdot x}, \hat{a}^\dagger(k')\hat{a}(k') + \hat{b}^\dagger(k')\hat{b}(k')]$$

Riscriviamo a parte il commutatore:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= [\hat{a}(k)e^{-ik\cdot x} + \hat{b}^\dagger(k)e^{ik\cdot x}, \hat{a}^\dagger(k')\hat{a}(k') + \hat{b}^\dagger(k')\hat{b}(k')] \\ &= [\hat{a}(k), \hat{a}^\dagger(k')\hat{a}(k')]e^{-ik\cdot x} + [\hat{b}^\dagger(k), \hat{b}^\dagger(k')\hat{b}(k')]e^{ik\cdot x} \\ &= [\hat{a}(k), \hat{a}^\dagger(k')]\hat{a}(k')e^{-ik\cdot x} + \hat{b}^\dagger(k')[\hat{b}^\dagger(k), \hat{b}(k')]e^{ik\cdot x} \\ &= (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') [\hat{a}(k')e^{-ik\cdot x} - \hat{b}^\dagger(k')e^{ik\cdot x}] \end{aligned}$$

Usando  $\delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$  per eliminare l'integrazione in  $d^3\vec{k}'$  si ottiene dunque:

$$[\hat{\Phi}, \hat{H}_0] = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega} \omega [\hat{a}(k)e^{-ik\cdot x} - \hat{b}^\dagger(k)e^{ik\cdot x}] = i \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t}$$

Abbiamo così verificato che la  $\hat{\Phi}$  di una particella libera evolve temporalmente come previsto da (4.27). In termini di trasformazioni finite:

$$\hat{\Phi}(t, \vec{x}) = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{\Phi}(0, \vec{x}) e^{-i\hat{H}_0 t} \quad (4.28)$$

Ora vogliamo però studiare una situazione fisica dove è presente interazione (in particolare l'interazione elettromagnetica, ma per ora affrontiamo la questione genericamente) e quindi si ha

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} .$$

La dipendenza temporale degli operatori in rappresentazione di Heisenberg dovrà essere quindi generata dalla hamiltoniana completa  $\hat{H}$  e in tale rappresentazione non è più possibile esprimere lo sviluppo dei campi  $\hat{\Phi}$  e  $\hat{\Psi}$  attraverso Eqs. 3.46 e 3.77. Per preservare tali espressioni possiamo però introdurre una nuova rappresentazione, una sorta di via di mezzo tra quella di Heisenberg e quella di Schrödinger, detta **rappresentazione di interazione**.

Per farlo partiamo riprendendo la rappresentazione di Schrödinger e l'equazione

$$\hat{H} |\Phi(t)\rangle = i \frac{\partial}{\partial t} |\Phi(t)\rangle$$

dove la dipendenza temporale è contenuta tutta nello stato  $|\Phi(t)\rangle$ , mentre gli operatori di campo che compaiono in  $\hat{H}$  sono valutati al tempo  $t = 0$  (dove la rappresentazione di Heisenberg coincide con quella di Schrödinger):

$$\hat{H}_{int} = \int d^3x \hat{\mathcal{H}}_{int}(t = 0, \vec{x}) .$$

Dalla teoria delle perturbazioni in meccanica quantistica non relativistica richiamata nella sezione 1.1.1 e in Eq. 1.29, sappiamo che l'ampiezza di probabilità di transizione da uno stato iniziale non perturbato  $|\Phi_i\rangle = |i\rangle e^{-iE_i t}$  (che possiamo pensare a  $t \rightarrow -\infty$ , quando l'interazione era nulla) ad uno stato finale  $|\Phi_f\rangle = |f\rangle e^{-iE_f t}$  (che possiamo pensare a  $t \rightarrow +\infty$ , quando l'interazione è conclusa) può essere scritta, al primo ordine perturbativo, come:

$$A_{fi}^{(1)} = -i \int dt e^{iE_f t} \langle f | \hat{H}_{int} | i \rangle e^{-iE_i t} . \quad (4.29)$$

Gli stati  $|i\rangle$  e  $|f\rangle$  sono stati stazionari rispetto all'Hamiltoniana imperturbata  $\hat{H}_0$ , dunque vale  $\hat{H}_0 |i\rangle = E_i |i\rangle$  e  $\hat{H}_0 |f\rangle = E_f |f\rangle$ , ossia  $e^{-iE_i t} |i\rangle = e^{-i\hat{H}_0 t} |i\rangle$  e  $\langle f | e^{-iE_i t} = \langle f | e^{i\hat{H}_0 t}$ . L'Eq. 4.29 diventa:

$$A_{fi}^{(1)} = -i \int d^4x \langle f | \hat{\mathcal{H}}_{int}^I(t, \vec{x}) | i \rangle$$

avendo definito:

$$\hat{\mathcal{H}}_{int}^I(t, \vec{x}) = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{\mathcal{H}}_{int}(0, \vec{x}) e^{-i\hat{H}_0 t} \quad (4.30)$$

L'evoluzione temporale dell'operatore  $\hat{\mathcal{H}}_{int}^I$  ha dunque la stessa forma dell'evoluzione in rappresentazione di Heisenberg, con la differenza però che la dipendenza non è generata dalla Hamiltoniana completa  $\hat{H}$  bensì dalla sola hamiltoniana libera  $\hat{H}_0$ . Questa rappresentazione è detta rappresentazione di interazione (abbiamo introdotto l'apice  $I$ , che nelle prossime

equazioni tralascieremo, per enfatizzarlo), per la quale abbiamo quindi l'evoluzione temporale dei campi è data da:

$$\hat{O}^I = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{O}(0, \vec{x}) e^{-i\hat{H}_0 t} \quad , \quad \frac{d\hat{O}^I}{dt} = -i [\hat{O}^I, \hat{H}_0] . \quad (4.31)$$

I campi in rappresentazione di interazione sono collegati ai campi in rappresentazione di Heisenberg da una trasformazione unitaria:

$$\hat{O}^I(t) = e^{i\hat{H}_0 t} e^{-i\hat{H} t} \hat{O}^H(t) e^{i\hat{H} t} e^{-i\hat{H}_0 t} = \hat{U} \hat{O}^H(t) \hat{U}^{-1} , \quad (4.32)$$

dove abbiamo definito la matrice unitaria  $\hat{U} = e^{i\hat{H}_0 t} e^{-i\hat{H} t}$  (è immediato verificare l'unitarietà in quanto  $\hat{H}$  e  $\hat{H}_0$  sono hermitiane).

Grazie ad Eq. 4.26 sappiamo che, in rappresentazione di Heisenberg, valgono, anche per il caso con interazione, le relazioni di commutazione (o anti-commutazione) canoniche descritte nel caso libero. Utilizzando la trasformazione appena introdotta ai commutatori (analogo per anti-commutatori):

$$\hat{U} \left[ \hat{\Pi}_H(\vec{x}, t), \hat{\Phi}_H(\vec{y}, t) \right] \hat{U}^{-1} = -i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \Rightarrow \left[ \hat{\Pi}_I(\vec{x}, t), \hat{\Phi}_I(\vec{y}, t) \right] = -i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.33)$$

vediamo che le relazioni canoniche valgono anche in rappresentazione di interazione.

Abbiamo quindi trovato che nella rappresentazione di interazione, i campi soddisfano le stesse equazioni del moto e le stesse relazioni di commutazione del caso libero, e quindi possono essere espressi attraverso lo sviluppo di Eqs. 3.46 e 3.77.

## Chapter 5

# Interazioni per particelle di spin 0

Abbiamo visto nella precedente Sezione che l'ampiezza di transizione è data da

$$A_{fi}^{(1)} = -i \int d^4x \langle f | \hat{\mathcal{H}}_{int}^I | i \rangle \quad (5.1)$$

dove  $|i\rangle, |f\rangle$  sono autostati dell'Hamiltoniana libera e l'apice  $I$  indica che l'Hamiltoniana di interazione è calcolata nella rappresentazione di interazione, ovvero che gli operatori di campo in  $\hat{\mathcal{H}}_{int}^I$  sono dati dallo sviluppo in serie del campo libero del tipo 2.13. Sapendo che  $\hat{\mathcal{H}}_{int} = -\hat{\mathcal{L}}_{int}$  e usando Eq. 4.13:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{int} &= ie[\hat{\Phi}^\dagger(\partial^\mu \hat{\Phi}) - (\partial^\mu \hat{\Phi}^\dagger)\hat{\Phi}]\hat{A}_\mu - e^2 \hat{A}^\mu \hat{A}_\mu \hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi} \\ &\simeq ie[\hat{\Phi}^\dagger(\partial^\mu \hat{\Phi}) - (\partial^\mu \hat{\Phi}^\dagger)\hat{\Phi}]\hat{A}_\mu = \hat{J}_{em}^\mu \hat{A}_\mu \end{aligned} \quad (5.2)$$

Abbiamo utilizzato la definizione della quadricorrente elettromagnetica  $\hat{J}_{em}^\mu$  di Eq. 4.14. Nel secondo passaggio abbiamo trascurato il termine quadratico in  $\hat{A}_\mu$ . Dalla relazione:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137}$$

possiamo capire che sia lecito trascurare, al primo ordine perturbativo, il termine in  $e^2$  del potenziale. È utile notare che, in unità naturali,  $[eA] = [M]$ : questo termine deve infatti avere le stesse dimensioni di  $\partial_\mu$  in quanto si ha  $D^\mu = \partial^\mu + ieA^\mu$ . Tutti i termini in Eq. 5.2 hanno dimensione  $[M]^2$ , proprio come il termine libero  $\square + m^2$  di Eq. 4.1.

Sottolineiamo inoltre che, anche se a volte non lo esplicitiamo, tutti gli operatori sono calcolati nel medesimo punto d'interazione spaziotemporale, in quanto assumiamo che le particelle in questione siano puntiformi e non ci sia violazione di causalità (cioè interazioni a "distanza").

Ricordiamo che i campi  $\hat{\Phi}$  e  $\hat{A}_\mu$  che compaiono in Eq. 5.2 sono della forma:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(x) &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E} [\hat{a}(p)e^{-ip \cdot x} + \hat{b}^\dagger(p)e^{ip \cdot x}] \\ \hat{A}^\mu(x) &= \sum_\lambda \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega} [\epsilon^\mu(k, \lambda)\hat{\alpha}(k, \lambda)e^{-ik \cdot x} + \epsilon^{\mu*}(k, \lambda)\hat{\alpha}^\dagger(k, \lambda)e^{ik \cdot x}] \end{aligned}$$

Consideriamo ora un processo di assorbimento di un fotone  $\gamma$  da parte di una particella scalare  $\pi^+$  (pione):

$$\gamma + \pi^+ \longrightarrow \pi^+$$

Calcoliamo l'ampiezza di transizione definita da 5.1, ovvero l'elemento di matrice di  $\hat{\mathcal{H}}_{int}$  tra stato iniziale e stato finale, rispettivamente dati da:

$$\begin{aligned} |i\rangle &= |p_i; k, \lambda\rangle = \hat{a}^\dagger(p_i)\hat{\alpha}^\dagger(k, \lambda) |0\rangle \\ |f\rangle &= |p_f\rangle = \hat{a}^\dagger(p_f) |0\rangle \end{aligned} \quad (5.3)$$

dove il vuoto è definito come l'assenza di pioni e fotoni, ovvero  $|0\rangle = |0\rangle_\gamma |0\rangle_\pi$ . È anche importante notare che l'ordine di applicazione degli operatori  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{a}$  è del tutto ininfluenza in quanto agiscono su stati diversi. L'ampiezza di transizione tra i due stati è dunque data da:

$$\begin{aligned} A_{fi}^{(1)} &= -i \langle 0 | \hat{a}(p_f) \left\{ \int d^4x \hat{J}_{em}^\mu(x) \hat{A}_\mu(x) \right\} \hat{a}^\dagger(p_i) \hat{\alpha}^\dagger(k, \lambda) |0\rangle \\ &= -i \int d^4x \langle 0 | \hat{A}_\mu \hat{\alpha}^\dagger(k, \lambda) |0\rangle \langle 0 | \hat{a}(p_f) \hat{J}_{em}^\mu \hat{a}^\dagger(p_i) |0\rangle \\ &= -i \int d^4x \langle 0 | \hat{A}_\mu |k, \lambda\rangle \langle p_f | \hat{J}_{em}^\mu |p_i\rangle \end{aligned} \quad (5.4)$$

Siccome gli operatori  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^\dagger$  commutano con  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\alpha}^\dagger$ , l'ampiezza è separabile nel prodotto di due fattori distinti, uno legato al fotone:

$$\langle 0 | \hat{A}_\mu \hat{\alpha}^\dagger(k, \lambda) |0\rangle = \langle 0 | \hat{A}_\mu |k, \lambda\rangle$$

e l'altro legato al pione:

$$\langle 0 | \hat{a}(p_f) \hat{J}_{em}^\mu \hat{a}^\dagger(p_i) |0\rangle = \langle p_f | \hat{J}_{em}^\mu |p_i\rangle$$

La parte legata al fotone è l'elemento di matrice del campo  $\hat{A}^\mu$  calcolato tra lo stato di singola particella ed il vuoto; si tratta dello stesso calcolo fatto nella sezione 3.4 che ci portava all'espressione 3.52, e in questo caso dà come risultato la funzione d'onda del fotone:

$$\langle 0 | \hat{A}_\mu |k, \lambda\rangle = N_k \epsilon_\mu e^{-ik \cdot x} \quad (5.5)$$

con  $N_k$  fattore di normalizzazione.

Il calcolo della parte  $\langle p_f | \hat{J}_{em}^\mu |p_i\rangle$  contenente i campi scalari è invece più complicato in quanto contiene prodotti di quattro operatori, due dei quali contenuti nella quadricorrente e due negli stati iniziale e finale, cioè termini del tipo:

$$\langle 0 | \hat{a}(p_f) \hat{a}^\dagger(p_1) \hat{a}(p_2) \hat{a}^\dagger(p_i) |0\rangle$$

Il modo più diretto per calcolare espressioni di questo tipo consiste nell'usare le proprietà di commutazione degli operatori  $\hat{a}$  al fine di portare un  $\hat{a}^\dagger$  tutto a sinistra o un  $\hat{a}$  tutto a destra, in modo da far agire un operatore di distruzione su  $|0\rangle$  e utilizzare le condizioni

di vuoto per ridurre il numero di termini. Ad esempio il termine appena menzionato può essere riscritto come:

$$\begin{aligned}\langle 0 | \hat{a}(p_f) \hat{a}^\dagger(p_1) \hat{a}(p_2) \hat{a}^\dagger(p_i) | 0 \rangle &= \langle 0 | [\hat{a}^\dagger(p_1) \hat{a}(p_f) + (2\pi)^3 2E_f \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_f)] \\ &\quad \times [\hat{a}^\dagger(p_i) \hat{a}(p_2) + (2\pi)^3 2E_i \delta^3(\vec{p}_2 - \vec{p}_i)] | 0 \rangle \\ &= (2\pi)^6 4E_i E_f \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_f) \delta^3(\vec{p}_2 - \vec{p}_i)\end{aligned}$$

L'applicazione di questo metodo può facilmente diventare lunga e laboriosa; introduciamo allora una tecnica generale nota come **Teorema di Wick**, di cui studiamo solo il caso particolare applicabile ad un'espressione quale il nostro termine di esempio, cioè del tipo:

$$\langle 0 | \hat{A} \hat{B} \hat{C} \hat{D} | 0 \rangle$$

dove indichiamo con le lettere maiuscole gli operatori  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}^\dagger$ ,  $\hat{b}^\dagger$  o una loro generica combinazione lineare come il campo  $\hat{\Phi}$ . Supponiamo, a titolo di esempio, che sia  $\hat{A} = \hat{a} + \hat{a}^\dagger$ ; sfruttando le condizioni di vuoto e dei commutatori questo significa:

$$\begin{aligned}\langle 0 | \hat{A} \hat{B} \hat{C} \hat{D} | 0 \rangle &= \langle 0 | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \hat{B} \hat{C} \hat{D} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \hat{a} \hat{B} \hat{C} \hat{D} | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{a}^\dagger \hat{B} \hat{C} \hat{D} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | [\hat{a}, \hat{B} \hat{C} \hat{D}] | 0 \rangle - \langle 0 | \hat{B} \hat{C} \hat{D} \hat{a} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | [\hat{a}, \hat{B} \hat{C} \hat{D}] | 0 \rangle\end{aligned}$$

usando inoltre l'identità:

$$[\hat{a}, \hat{B} \hat{C} \hat{D}] = [\hat{a}, \hat{B}] \hat{C} \hat{D} + \hat{B} [\hat{a}, \hat{C}] \hat{D} + \hat{B} \hat{C} [\hat{a}, \hat{D}]$$

otteniamo:

$$\langle 0 | \hat{A} \hat{B} \hat{C} \hat{D} | 0 \rangle = \langle 0 | [\hat{a}, \hat{B}] \hat{C} \hat{D} | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{B} [\hat{a}, \hat{C}] \hat{D} | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{B} \hat{C} [\hat{a}, \hat{D}] | 0 \rangle$$

Tutti i commutatori che compaiono in questa equazione sono semplici numeri, in particolare sono nulli oppure espressioni del tipo  $(2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$ ; possono pertanto essere portati fuori dal braket degli stati per scrivere:

$$\langle 0 | \hat{A} \hat{B} \hat{C} \hat{D} | 0 \rangle = [\hat{a}, \hat{B}] \langle 0 | \hat{C} \hat{D} | 0 \rangle + [\hat{a}, \hat{C}] \langle 0 | \hat{B} \hat{D} | 0 \rangle + [\hat{a}, \hat{D}] \langle 0 | \hat{B} \hat{C} | 0 \rangle$$

Notando inoltre che:

$$[\hat{a}, \hat{B}] = \langle 0 | [\hat{a}, \hat{B}] | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a} \hat{B} | 0 \rangle - \langle 0 | \hat{B} \hat{a} | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a} \hat{B} | 0 \rangle = \langle 0 | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \hat{B} | 0 \rangle$$

otteniamo infine:

$$\langle 0 | \hat{A} \hat{B} \hat{C} \hat{D} | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{A} \hat{B} | 0 \rangle \langle 0 | \hat{C} \hat{D} | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{A} \hat{C} | 0 \rangle \langle 0 | \hat{B} \hat{D} | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{A} \hat{D} | 0 \rangle \langle 0 | \hat{B} \hat{C} | 0 \rangle \quad (5.6)$$

Il valore di aspettazione nel vuoto di un prodotto di quattro operatori si può dunque scrivere come la somma dei prodotti di tutte le possibili "contrazioni" di coppie.



In particolare si può notare anche che *ogni prodotto contenente un numero dispari di operatori ha un valore di aspettazione nullo*.

Il teorema di Wick ci permette di ridurre significativamente il numero di termini contenuti nel fattore legato ai pioni  $\langle p_f | \hat{J}_{em}^\mu | p_i \rangle$  di Eq. 5.4. Vediamolo esplicitamente:

$$\begin{aligned} \langle p_f | \hat{J}_{em}^\mu | p_i \rangle &= ie N_f N_i \langle 0 | \hat{a}(p_f) [\hat{\Phi}^\dagger(\partial^\mu \hat{\Phi}) - (\partial^\mu \hat{\Phi}^\dagger) \hat{\Phi}] \hat{a}^\dagger(p_i) | 0 \rangle \\ &= ie N_f N_i \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^6 4\omega\omega'} \langle 0 | \hat{a}(p_f) \left\{ [\hat{a}^\dagger(k) e^{ik \cdot x} + \hat{b}(k) e^{-ik \cdot x}] (-ik'^\mu) [\hat{a}(k') e^{-ik' \cdot x} + \right. \\ &\quad \left. - \hat{b}^\dagger(k') e^{ik' \cdot x}] - (ik^\mu) [\hat{a}^\dagger(k) e^{ik \cdot x} - \hat{b}(k) e^{-ik \cdot x}] [\hat{a}(k') e^{-ik' \cdot x} + \hat{b}^\dagger(k') e^{ik' \cdot x}] \right\} \hat{a}^\dagger(p_i) | 0 \rangle \end{aligned}$$

In virtù del teorema di Wick, sono diversi da zero solo i termini contenenti un numero pari di operatori di creazione e distruzione (dello stesso tipo) e si ha dunque:

$$\begin{aligned} \langle p_f | \hat{J}_{em}^\mu | p_i \rangle &= ie N_f N_i \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^6 4\omega\omega'} \langle 0 | \hat{a}(p_f) \left\{ -ik'^\mu [\hat{a}^\dagger(k) \hat{a}(k') e^{i(k-k') \cdot x} \right. \\ &\quad \left. - \hat{b}(k) \hat{b}^\dagger(k') e^{-i(k-k') \cdot x}] + -ik^\mu [\hat{a}^\dagger(k) \hat{a}(k') e^{i(k-k') \cdot x} - \hat{b}(k) \hat{b}^\dagger(k') e^{-i(k-k') \cdot x}] \right\} \hat{a}^\dagger(p_i) | 0 \rangle \end{aligned}$$

Usando Eq. (5.6) si ha, trascurando i termini nulli per brevità:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{a}(p_f) \hat{a}^\dagger(k) \hat{a}(k') \hat{a}^\dagger(p_i) | 0 \rangle &= \langle 0 | \hat{a}(p_f) \hat{a}^\dagger(k) | 0 \rangle \langle 0 | \hat{a}(k') \hat{a}^\dagger(p_i) | 0 \rangle \\ &= (2\pi)^6 4\omega\omega' \delta^3(\vec{p}_f - \vec{k}) \delta^3(\vec{k}' - \vec{p}_i) \\ \langle 0 | \hat{a}(p_f) \hat{b}(k) \hat{b}^\dagger(k') \hat{a}^\dagger(p_i) | 0 \rangle &= \langle 0 | \hat{a}(p_f) \hat{a}^\dagger(p_i) | 0 \rangle \langle 0 | \hat{b}(k) \hat{b}^\dagger(k') | 0 \rangle \\ &= (2\pi)^6 4E_f \omega \delta^3(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \langle p_f | \hat{J}_{em}^\mu | p_i \rangle &= e N_f N_i \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^6 4\omega\omega'} (k^\mu + k'^\mu) \left[ (2\pi)^6 4\omega\omega' \delta^3(\vec{p}_f - \vec{k}) \delta^3(\vec{k}' - \vec{p}_i) e^{i(k-k') \cdot x} \right. \\ &\quad \left. - (2\pi)^6 4E_f \omega \delta^3(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') e^{-i(k-k') \cdot x} \right] \end{aligned}$$

Il secondo termine non può però dare un contributo all'ampiezza di transizione del processo  $\gamma + \pi^+ \rightarrow \pi^+$ ; infatti deve valere  $p_f = p_i + k$  e non possiamo avere  $\vec{p}_f = \vec{p}_i$  come invece richiesto dalla  $\delta^3$ . Pertanto otteniamo:

$$J_{fi}^\mu = \langle p_f | \hat{J}_{em}^\mu | p_i \rangle = e N_f N_i (p_i + p_f)^\mu e^{-i(p_i - p_f) \cdot x} \quad (5.7)$$

Siamo così giunti a scrivere l'ampiezza di transizione per l'assorbimento di un fotone da parte di un pione in teoria dei campi:

$$A_{fi}^{(1)} = -ie(p_i + p_f) \cdot \epsilon N_i N_k N_f (2\pi)^4 \delta^4(p_i + k - p_f) \quad (5.8)$$

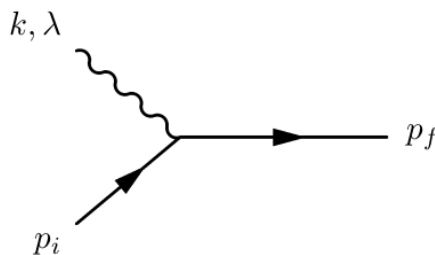


Figure 5.1: Vertice  $\gamma\pi \rightarrow \pi$

Il metodo che ci ha condotto alla scrittura esplicita dell'ampiezza di transizione procede in maniera simile anche per altri processi. Per evitare di ripetere ogni volta tutti i passaggi, è possibile utilizzare un metodo più immediato, rappresentato dallo studio dei diagrammi di Feynman. Possiamo infatti interpretare questa ampiezza di transizione nella forma diagrammatica della figura 5.1, e associare ai vari elementi costituenti il diagramma i diversi fattori che compaiono nell'espressione dell'ampiezza 5.8, in modo da poter costruire tale espressione dal diagramma seguendo poche semplici regole:

- i Inserire un fattore di normalizzazione  $N$  per ogni linea (esterna) del diagramma;
- ii Associare ad ogni vertice di assorbimento (o emissione) di un fotone il fattore  $-ie(p_i + p_f)^\mu$ ;
- iii Associare ad ogni fotone entrante il vettore di polarizzazione  $\epsilon_\mu$ , e ad ogni fotone uscente il vettore  $\epsilon_\mu^*$ ;
- iv Moltiplicare il prodotto di tutti questi fattori per  $(2\pi)^4$  e per la funzione  $\delta^4$  esprimente la conservazione di energia ed impulso del sistema.

A queste **regole di Feynman** ne aggiungeremo altre nelle prossime Sezioni.

## 5.1 Interazione elettromagnetica tra due particelle cariche di spin 0

Dopo aver studiato l'interazione di una particella di Klein-Gordon con un fotone, consideriamo ora il processo di scattering tra due particelle di Klein-Gordon distinguibili tra di loro, aventi cariche  $e_a, e_b$  e masse  $m_a, m_b$  (Figura 5.2). In particolare vediamo il caso in cui l'interazione responsabile di tale processo è elettromagnetica. Possiamo affrontare il problema estendendo quanto visto nella Sezione precedente. Per fare ciò descriviamo il processo come l'interazione di una delle due particelle (ad esempio  $a$ ) con il campo elettromagnetico generato dall'altra (ad esempio  $b$ ). Riprendiamo quindi l'espressione dell'ampiezza di transizione di Eq. 5.4, scrivendola ora attraverso una corrente di transizione

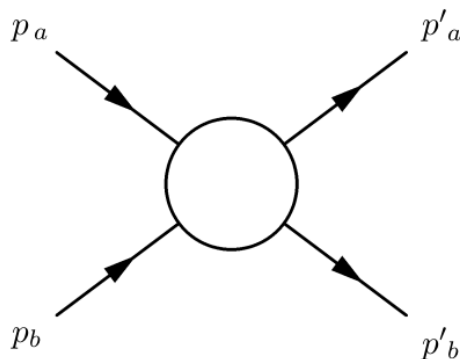


Figure 5.2: Scattering tra due particelle di spin 0. Il cerchio centrale indica un generico meccanismo di interazione.

tra stato iniziale e stato finale per  $a$  e un campo elettromagnetico generato dal moto della particella  $b$ . Il risultato sarà simmetrico rispetto allo scambio tra le due particelle. L'ampiezza di transizione è quindi, al prim'ordine perturbativo, data da:

$$A_{fi}^{(1)} = -i \int d^4x J_{a'a}^\mu(x) A_\mu(x), \quad (5.9)$$

dove  $J_{a'a}^\mu \equiv \langle p'_a | \hat{J}_{em}^\mu | p_a \rangle$ , mentre ora determiniamo l'espressione per  $A_\mu(x)$  che rimpiazzerà Eq. 5.5.

Si noti che  $A_\mu(x)$  è il campo generato dal moto della particella  $b$  ed è dunque una soluzione delle equazioni di Maxwell in presenza di una corrente esterna  $J_{b'b}^\mu$ , che è la corrente di transizione associata al moto  $b \rightarrow b'$ :

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = J_{b'b}^\mu \quad (5.10)$$

dove, in virtù di Eq. (5.7), si ha:

$$J_{b'b}^\mu = e_b N_b N'_b (p_b + p'_b)^\mu e^{-i(p_b - p'_b) \cdot x}$$

Per risolvere Eq. (5.10) è conveniente usare la condizione di gauge di Lorenz (1.106). Verifichiamo che questa condizione possa essere legittimamente imposta anche nel caso in cui il campo  $A^\mu$  non è più un campo libero. Applicando l'operatore  $\partial_\mu$  ad entrambi i membri di Eq. (5.10), otteniamo:

$$\partial_\mu \square A^\mu - \partial_\mu \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = \partial_\mu J_{b'b}^\mu$$

da cui segue che se il gauge di Lorenz è valido (cioè vale  $\partial_\mu A^\mu = 0$ ) allora la corrente  $J_{b'b}^\mu$  è conservata,  $\partial_\mu J_{b'b}^\mu = 0$ . In effetti questa condizione deve essere verificata, cioè la corrente

nelle equazioni di Maxwell deve essere conservata, in caso contrario si rompe l'invarianza di gauge, che è la simmetria alla base della teoria. Verifichiamolo esplicitamente:

$$\begin{aligned}\partial_\mu J_{b'}^\mu &= eN_b N'_b (p_b + p'_b)^\mu (-i)(p_b - p'_b)_\mu e^{-i(p_b - p'_b) \cdot x} \\ &= -ieN_b N'_b (p_b^2 - p'^2_b) e^{-i(p_b - p'_b) \cdot x} \\ &= 0\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la condizione di mass-shell:

$$p_b^2 = p'^2_b = m_b^2.$$

È pertanto legittimo usare il gauge di Lorenz e porre  $\partial_\mu A^\mu = 0$ , così da ridurre l'equazione di Maxwell (5.10) alla forma:

$$\square A^\mu = e_b N_b N'_b (p_b + p'_b)^\mu e^{iq \cdot x}$$

avendo introdotto l'impulso trasferito  $q^\mu = (p'_b - p_b)^\mu$ . La dipendenza spaziale nel termine di destra è solo nell'esponenziale e sapendo  $\square e^{iq \cdot x} = -q^2 e^{iq \cdot x}$ , otteniamo la soluzione dell'equazione di Maxwell nel gauge di Lorenz:

$$A^\mu = -\frac{1}{q^2} e_b N_b N'_b (p_b + p'_b)^\mu e^{iq \cdot x} \quad (5.11)$$

Inserendola nella Eq. (5.9) troviamo:

$$\begin{aligned}A_{fi}^{(1)} &= -i \int d^4x J_{a'}^\mu(x) A_\mu(x) \\ &= -ie_a e_b N_a N_b N'_a N'_b (p_a + p'_a)^\mu (p_b + p'_b)_\mu \left(-\frac{1}{q^2}\right) \int d^4x e^{i(p'_a + p'_b - p_a - p_b) \cdot x} \\ &= (-ie_a)(-ie_b) N_a N_b N'_a N'_b (p_a + p'_a)^\mu (-i \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2}) (p_b + p'_b)^\nu (2\pi)^4 \delta^4(p'_a + p'_b - p_a - p_b)\end{aligned}$$

Possiamo rendere questa scrittura maggiormente elegante definendo l'invariante di Lorenz adimensionale:

$$\mathcal{M} = (-ie_a)(p_a + p'_a)^\mu (-i \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2}) (-ie_b)(p_b + p'_b)^\nu \quad (5.12)$$

detto **ampiezza di scattering**. Con questa definizione riscriviamo l'ampiezza di transizione come

$$A_{fi}^{(1)} = N_a N_b N'_a N'_b \mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^4(p'_a + p'_b - p_a - p_b) \quad (5.13)$$

È da notare come questa espressione sia simmetrica per lo scambio  $a \leftrightarrow b$ , e contenga la funzione  $\delta^4$  di conservazione energia-impulso (il quadrimpulso totale iniziale è  $p_a + p_b$ , mentre quello finale è  $p'_a + p'_b$ ). La conservazione del quadrimpulso implica:

$$q = p'_b - p_b = p_a - p'_a.$$

Inoltre Eq. (5.13) si presta ad una semplice ma importante interpretazione diagrammatica; sappiamo infatti che i fattori  $-ie_a(p_a + p'_a)^\mu$  e  $-ie_b(p_b + p'_b)^\nu$  sono associati a vertici di



Figure 5.3: Scambio di fotone virtuale tra due particelle di Klein-Gordon.

emissione o assorbimento di fotoni. Poichè non vi è alcun fotone libero nel processo considerato, questi fattori devono essere legati a fotoni emessi da una particella ed assorbiti dall'altra. Questo meccanismo può avvenire nei modi illustrati in Figura 5.3, cioè come emissione di un fotone dalla particella  $a$  che viene assorbito da  $b$  o, viceversa, come emissione di un fotone dalla particella  $b$  che viene assorbito da  $a$ . Entrambi possono essere rappresentati concatenando due vertici del tipo già introdotto in Figura 5.1, in modo da formare un processo fisico.

Nell'espressione dell'ampiezza di transizione (5.13) non compare però la somma di due termini legati a due diagrammi diversi, bensì un singolo termine  $-i\eta_{\mu\nu}/q^2$  associato al fotone: tale termine è detto **propagatore del fotone**. Possiamo dunque associare la presenza di questo termine alla “*somma*” dei due diagrammi 5.3 ed aggiungere una nuova regola di Feynman a quelle enunciate alla fine della precedente Sezione:

- v Associare ad ogni linea interna di un fotone con quadri-impulso  $q^\mu$  il fattore  $-i\eta_{\mu\nu}/q^2$  di propagatore del fotone.

L'insieme delle regole che permettono di calcolare l'ampiezza di transizione al primo ordine perturbativo per il processo di scattering  $ab \rightarrow a'b'$  è dunque riassunto nella figura 5.4. È importante notare che energia ed impulso vengono conservati ad ogni vertice. Assumendo per esempio (scelta arbitraria ma ininfluente) il verso come nel primo diagramma di Fig. 5.3, nel vertice superiore vale  $q^\mu = p_a^\mu - p_a'^\mu$ , mentre in quello inferiore  $q^\mu = p_b'^\mu - p_b^\mu$ . Notiamo inoltre che:

$$\begin{aligned} q^2 &= q^\mu q_\mu = p_a^2 + p_a'^2 - 2p_a \cdot p_a' = 2m^2 - 2E_a E_a' + 2\vec{p}_a \cdot \vec{p}_a' \\ &= -2 \left[ E_a E_a' - (m_a m_a + |\vec{p}_a| |\vec{p}_a'| \cos \theta) \right] \leq 0. \end{aligned}$$

Il fotone interno ha dunque, per  $\theta \neq 0$ , massa al quadrato negativa. Questo fotone, chiaramente non fisico, in quanto non sul mass-shell, è detto **fotone virtuale** ed ha una rilevanza enorme nel descrivere i processi in teoria dei campi e costruire i diagrammi di Feynman.

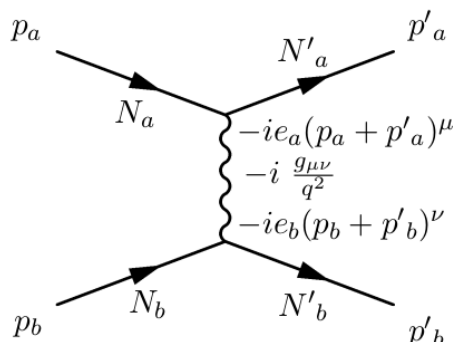


Figure 5.4: Schema regole di Feynman per l'interazione elettromagnetica tra due particelle di Klein-Gordon (alle quali, per ottenere l'espressione dell'ampiezza di transizione, va solamente aggiunta la  $\delta^4$  di conservazione del quadrimpulso).

## 5.2 Propagatore di una particella di spin 0

Oltre ad interazioni mediate da un fotone virtuale, in natura esistono anche processi in cui il mediatore è una particella a spin 0 (o spin 1/2, che vedremo più avanti). Consideriamo per esempio il processo  $\gamma\pi^+ \rightarrow \gamma\pi^+$  descritto dal diagramma di Fig. 5.5, sempre ottenuto combinando singoli diagrammi di Fig. 5.1. Vediamo dal diagramma che nella descrizione di tale processo si ha una linea interna di particella avente spin nullo. Vogliamo determinare il fattore da associare a tale linea e per farlo ripercorriamo rapidamente ed in modo qualitativo il procedimento che abbiamo seguito per ottenere Eq. (5.11) (per una derivazione rigorosa si rimanda a libro di testo di teoria dei campi).

In questo processo, consideriamo il fotone interagire con il campo creato dal pione. Tale campo sarà soluzione dell'equazione di Klein-Gordon contenente un termine di interazione, che al prim'ordine è (ricordando Eq 2.107):

$$(\square + m^2)\Phi = ie(\partial_\mu A^\mu + A_\mu \partial^\mu)\Phi = J, \quad (5.14)$$

dove abbiamo chiamato  $J$  il termine di interazione, che rappresenta una "corrente". Dall'espansione dei campi  $\Phi$  (con impulso  $p$ ) e  $A^\mu$  (con impulso  $k$ ), otteniamo

$$(\square + m^2)\Phi \propto e^{-iq \cdot x} \Rightarrow \Phi = \frac{-1}{q^2 - m^2} J, \quad (5.15)$$

con  $q = p + k$ . Facendo passaggi analoghi a quelli visti nel caso del propagatore del fotone, si può dunque derivare (qui la enunciamo direttamente) una nuova regola da aggiungere alle precedenti:

- vi Associare ad ogni linea interna di particella avente spin nullo e quadri-impulso  $q$  il fattore  $i/(q^2 - m^2)$  detto "propagatore di particella di spin 0".

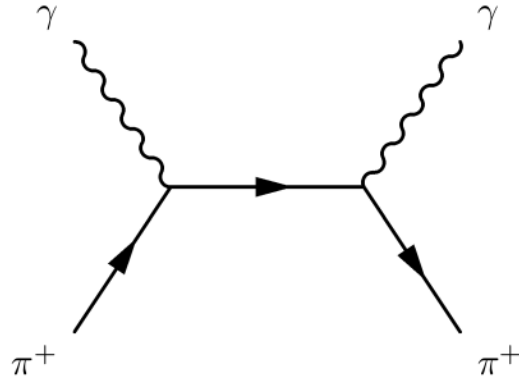


Figure 5.5: Processo  $\gamma\pi^+ \rightarrow \gamma\pi^+$ , come esempio di diagramma in cui il mediatore è un campo a spin 0.

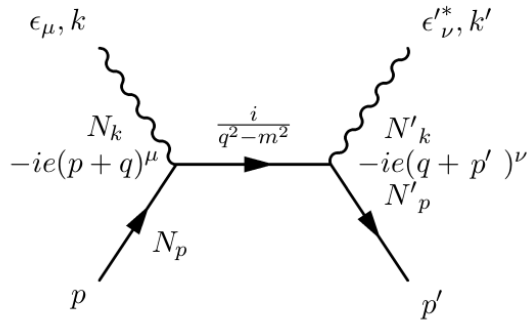


Figure 5.6: Regole di Feynman associate ad un processo di interazione tra un fotone ed una particella di spin 0.

L'insieme delle regole i-vi costituisce le **regole di Feynman** per il calcolo delle ampiezze di scattering nei processi elettromagnetici coinvolgenti fotoni e particelle di spin 0; compileremo un riassunto completo di queste regole nella sezione 5.7. Schematizziamo l'applicazione delle regole in Fig. 5.6. Ad esse, deve essere chiaramente aggiunta la conservazione del quadrimpulso:  $q = p + k = p' + k'$ . L'insieme di queste regole ci permette di ricavare facilmente l'ampiezza di transizione per interazione tra un fotone ed una particella di Klein-Gordon:

$$A_{fi}^{(1)} = N_k N'_k N_p N'_p (-ie)(p+q)^\mu \epsilon_\mu(\lambda) \frac{i}{q^2 - m^2} (-ie)(q+p')^\nu \epsilon'^*_\nu(\lambda') (2\pi)^4 \delta^4(p+k-p'-k') \quad (5.16)$$

Consideriamo ora la conservazione del quadrimpulso ad esempio nel vertice sinistro,

$q = k + p$ , combinata a  $k^2 = 0$  e  $p^2 = m^2$ . Otteniamo:

$$q^2 = k^2 + m^2 + 2k \cdot p = m^2 + 2k \cdot p = m^2 + 2E_k E_p - 2E_k \sqrt{E_p^2 - m^2} \cos \theta > m^2 \quad (5.17)$$

La particella interna ha pertanto sempre massa maggiore di  $m^2$  e non può dunque essere sul mass-shell; non è una particella fisica e viene detta **particella virtuale**.

### 5.3 Sezione d'urto di un processo a due corpi

Vediamo ora come utilizzare le ampiezze di scattering calcolate in Eqs. (5.13) e (5.12) per ricavare le sezioni d'urto di vari processi fisici (in elettrodinamica scalare). Un esperimento di scattering consiste nel far collidere un "fascio" di particelle 1 contro un "bersaglio" di particelle 2. Sperimentalmente la "misura" delle interazioni tra particelle avviene misurando la cosiddetta **sezione d'urto**. Essa può essere definita come:

$$\sigma = \frac{(\text{number of particles scattered})}{(\text{time beam}) \times (\text{flux beam})}. \quad (5.18)$$

Notare che le tre quantità che entrano in Eq. 5.18 dipendono dalle specifiche caratteristiche dell'esperimento, mentre la sezione d'urto è una proprietà delle particelle coinvolte nello scattering, indipendente dall'esperimento.

Possiamo ricavare il numeratore attraverso  $N_{scat} = P_{scat} N_{inc}$ , dove  $P_{scat}$  è la probabilità di scattering di una particella e  $N_{inc}$  è il numero di particelle incidenti. Il flusso del fascio di particelle incidenti con velocità  $\vec{v}$  su di un bersaglio fisso è il numero di particelle per unità di area che sono in grado di raggiungere il bersaglio nell'unità di tempo; tale flusso è quindi dato dalla densità in numero moltiplicata per  $|\vec{v}|$  incidente, cioè da  $F = |\vec{v}| n_{inc} = |\vec{v}| N_{inc}/V$ , dove  $V$  è il volume totale. Ricordando che la probabilità è data dal quadrato dell'ampiezza  $P_{scat} = |A_{fi}|^2$ , otteniamo:

$$\sigma = \frac{|A_{fi}|^2 V}{|\vec{v}| T}. \quad (5.19)$$

Nel resto del capitolo studiamo il generico processo a due corpi  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ , dove le quattro particelle coinvolte sono particelle di spin 0 e/o fotoni, aventi quadri-impulsi:

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

e che asintoticamente possiamo trattare come particelle libere descritte dalle soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon libera o, nel caso dei fotoni, dell'equazione di Maxwell nel vuoto.

Concetriamoci ora su 4 stati esterni di Klein-Gordon, la cui funzione d'onda è quindi data dalle onde piane:

$$\Phi_i = N_i e^{-ip_i \cdot x}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$



dove  $N_i$  è un fattore di normalizzazione che ora vogliamo fissare per poter valutare  $A_{fi}$  e quindi il numeratore di Eq. 5.19. Nel caso del campo di KG, la corrente conservata è la corrente numero  $N^\mu$ , già vista in Eq. 3.62, la cui componente temporale  $N_i^0$ , che chiamiamo  $\rho_i$  per evitare confusione coi coefficienti di normalizzazione  $N_i$ , è data da:

$$\rho_i = i \left( \Phi_i^* \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} - \Phi_i \frac{\partial \Phi_i^*}{\partial t} \right) = i |N_i|^2 (-iE_i - iE_i) = 2 |N_i|^2 E_i .$$

La carica conservata (che come avevamo visto è proporzionale alla carica elettrica) è dunque  $\int d^3x \rho_i = 2 |N_i|^2 E_i V$ . Notiamo che  $\rho_i$  (così come  $E_i$ ) è la componente  $\mu = 0$  di un quadri-vettore, quindi trasforma in maniera inversa rispetto a  $V$  e il loro prodotto è un invariante relativistico. Scegliamo di normalizzare in modo tale che la quantità conservata sia uguale a 1 (così da mantenere una diretta interpretazione di  $\rho$  come densità volumetrica di probabilità):

$$1 = \int d^3x \rho_i = 2 |N_i|^2 E_i V \Rightarrow N_i = \frac{1}{\sqrt{2 E_i V}} \quad (5.20)$$

che implica  $\rho_i = 1/V$ , cioè normalizziamo richiedendo che si abbia 1 particella nel volume totale a disposizione. Notiamo anche dimensionalmente è tutto corretto e la probabilità  $\int d^3x \rho_i$  è un numero puro.

Avevamo visto in Sezione 2.1 che questa definizione di densità di probabilità risultava problematica quando si cercava di interpretare l'equazione di KG come analogo relativistico dell'equazione di Schrödinger per la funzione d'onda, in quanto la presenza di particelle ad energia negativa comportava una densità di probabilità non definita positiva. In teoria dei campi il problema non compare più, in quanto sappiamo che  $\rho$  è una densità di carica associata a particelle ed antiparticelle, le quali hanno carica opposta, ma entrambe associate ad un contributo di energia positivo.

Riprendiamo ora l'espressione (5.13) dell'ampiezza di transizione:

$$A_{fi} = N_1 N_2 N_3 N_4 \mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)$$

e calcoliamone il modulo quadro:

$$\begin{aligned} |A_{fi}|^2 &= |N_1 N_2 N_3 N_4|^2 |\mathcal{M}|^2 \int d^4x e^{i(p_3+p_4-p_1-p_2)\cdot x} \int d^4y e^{i(p_3+p_4-p_1-p_2)\cdot y} \\ &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{16 V^4 E_1 E_2 E_3 E_4} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \int d^4y e^{i0\cdot y} \\ &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{16 V^4 E_1 E_2 E_3 E_4} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) V T \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la  $\delta^4$  per annullare l'esponente del secondo integrale.

Notiamo che la velocità  $|\vec{v}|$  è la velocità delle particelle 1 del fascio nel sistema a riposo del bersaglio di particelle 2. In un altro S.R. si ha  $|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$ .

La sezione d'urto in cui gli stati finali hanno esattamente impulso  $\vec{p}_3$  e  $\vec{p}_4$  è quindi data da:

$$\sigma = \frac{|A_{fi}|^2 V}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| T} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{16 V^2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| E_1 E_2 E_3 E_4} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \quad (5.21)$$

In realtà ci interessa calcolare la sezione d'urto differenziale in cui gli stati finali hanno impulsi negli intervalli  $(\vec{p}_3, \vec{p}_3 + d\vec{p}_3)$  e  $(\vec{p}_4, \vec{p}_4 + d\vec{p}_4)$ . Stiamo considerando le particelle essere descritte da onde piane  $e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$  in un volume finito  $V$ . L'impulso è quindi quantizzato  $p_x = 2\pi n_x/L_x$  e il numero di stati tra  $\vec{p}$  e  $\vec{p} + d\vec{p}$  in tre dimensioni spaziali è:

$$dn = V \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}.$$

Lo spazio delle fasi  $d\Pi$  disponibile per le due particelle in stato finale è quindi:

$$d\Pi = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 p_3 \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 p_4 \quad (5.22)$$

La **sezione d'urto differenziale** del processo  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  è dunque ottenibile moltiplicando Eq. 5.21 per il termine di spazio-fasi:

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_1 2E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2). \quad (5.23)$$

E' immediato notare che la sezione d'urto ha le corrette dimensioni di area,  $[d\sigma] = [M]^{-2}$ , e che i fattori di normalizzazione legati al volume si sono cancellati. Sappiamo già che  $\mathcal{M}$  è l'ampiezza di scattering ed è un invariante di Lorentz adimensionale. Il "fattore di flusso"  $2E_1 2E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$  non è invariante, e in generale non lo è  $d\sigma$ , che trasforma come un'area ortogonale alla direzione del fascio, cioè per esempio come  $dy dz$  se la direzione è  $x$ . E' però invariante per boost nella direzione  $x$  (che sono le trasformazioni più comuni fisicamente). Nel caso di collisioni collineari, il fattore di flusso può essere scritto in forma Lorentz-invariante:

$$E_1 E_2 |\vec{v}| = [(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2} \quad (5.24)$$

Infatti, considerando il S.R. con bersaglio fermo dove  $p_1^\mu = (E_1, \vec{p}_1)$  e  $p_2^\mu = (m_2, \vec{0})$ , si vede subito che:

$$(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2 = E_1^2 m_2^2 - m_1^2 m_2^2 = |\vec{p}_1|^2 m_2^2 = E_1^2 E_2^2 |\vec{v}|^2,$$

dove nell'ultimo passaggio si sono usate le relazioni relativistiche  $|\vec{p}| = \gamma m |\vec{v}|$ ,  $E = \gamma m c^2$ , cioè  $|\vec{p}| = E |\vec{v}|/c^2$ , espresse in unità naturali. Infine, possiamo definire la quantità:

$$d(\text{LIPS}) = (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \quad (5.25)$$

detta **spazio delle fasi Lorentz-invariante**.

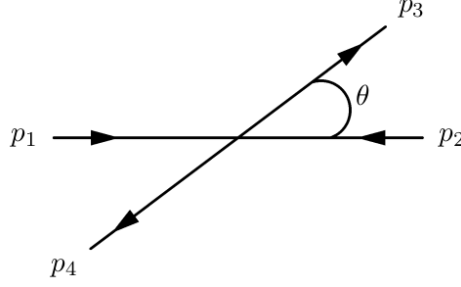


Figure 5.7: Processo  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ , nel sistema di riferimento del baricentro.

Attraverso queste definizioni, possiamo riscrivere la sezione d'urto differenziale di Eq. (5.23) nella forma esplicitamente invariante:

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} d(\text{LIPS}) \quad (5.26)$$

Occupiamoci ora di valutare la sezione d'urto  $d\sigma$  per il generico processo  $a + b \rightarrow a + b$  di Fig. 5.2, dove le particelle non cambiano tra stato iniziale e stato finale (urto elastico). In particolare partiamo dalla forma invariante di Eq. 5.26 per calcolarla nel sistema di riferimento del baricentro, definito dalla relazione:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 = 0 \quad (5.27)$$

L'urto tra le due particelle in questo sistema di riferimento viene descritto dall'angolo di scattering  $\theta$ , come vedremo tra poco, ed i quadri-impulsi delle particelle coinvolte sono:

$$p_1^\mu = (E_1, \vec{p}) \quad ; \quad p_2^\mu = (E_2, -\vec{p}) \quad ; \quad p_3^\mu = (E_3, \vec{p}') \quad ; \quad p_4^\mu = (E_4, -\vec{p}')$$

Dalla conservazione dell'energia si trova  $|\vec{p}| = |\vec{p}'|$ . Definiamo la variabile  $s$ , che rappresenta l'energia del centro di massa:

$$\sqrt{s} = E_1 + E_2 = E_3 + E_4 = \sqrt{\vec{p}^2 + m_1^2} + \sqrt{\vec{p}^2 + m_2^2} = \sqrt{\vec{p}'^2 + m_1^2} + \sqrt{\vec{p}'^2 + m_2^2},$$

dove dall'ultima uguaglianza si vede che si ottiene  $|\vec{p}| = |\vec{p}'|$ .

La grandezza  $s$  è la prima delle **variabili di Mandelstam**:

$$\begin{cases} s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\ t = (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2 \\ u = (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2 \end{cases} \quad (5.28)$$

tre importanti quantità, Lorentz invarianti, che permettono di scrivere agevolmente le sezioni d'urto dei processi a due corpi in modo invariante; per un'introduzione a queste variabili e alle loro proprietà rimandiamo all'appendice C.

Prima di scrivere  $d\sigma$  nel sistema di riferimento del centro di massa è bene semplificare l'espressione dell'elemento di spazio delle fasi Lorentz-invariante (5.25):

$$d(\text{LIPS}) = \frac{1}{(4\pi)^2} \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \frac{d^3p_3}{E_3} \frac{d^3p_4}{E_4}$$

Come prima cosa, possiamo usare la parte spaziale della  $\delta^4$  per eliminare la parte in  $d^3p_4$ :<sup>1</sup>

$$\int \frac{d^3p_4}{E_4} \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) = \frac{1}{E_4} \delta(E_3 + E_4 - E_1 - E_2)$$

con  $\vec{p}_4 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3$  e  $E_4 = \sqrt{\vec{p}_4^2 + m_2^2}$ . Possiamo ora considerare coordinate sferiche:

$$d^3p_3 = |\vec{p}_3|^2 \sin\theta d\theta d\phi d|\vec{p}_3| \equiv |\vec{p}_3|^2 d\Omega d|\vec{p}_3|,$$

e notare che:

$$E_3^2 = |\vec{p}_3|^2 + m_1^2 \rightarrow E_3 dE_3 = |\vec{p}_3| d|\vec{p}_3| \rightarrow d^3p_3 = |\vec{p}_3| d\Omega E_3 dE_3$$

il che ci porta a scrivere l'espressione, valida in qualunque sistema di riferimento:

$$\frac{d(\text{LIPS})}{dE_3 d\Omega} = \frac{1}{(4\pi)^2} \delta(E_3 + E_4 - E_1 - E_2) \frac{|\vec{p}_3|}{E_4}. \quad (5.29)$$

Poniamoci ora nel sistema del centro di massa, in cui vale:

$$E_3^2 = |\vec{p}|^2 + m_1^2 \quad ; \quad E_4^2 = |\vec{p}|^2 + m_2^2$$

essendo  $|\vec{p}|^2 = |\vec{p}'|^2$ , da cui  $E_3 dE_3 = E_4 dE_4 = |\vec{p}| d|\vec{p}|$ . Introduciamo la variabile  $W = E_3 + E_4$  per la quale vale :

$$dW = dE_3 + dE_4 = \left( \frac{1}{E_3} + \frac{1}{E_4} \right) |\vec{p}| d|\vec{p}| = \frac{W}{E_3 E_4} |\vec{p}| d|\vec{p}| = \frac{W}{E_4} dE_3$$

Essendo  $E_1 + E_2 = \sqrt{s}$ , abbiamo ora:

$$\frac{d(\text{LIPS})}{dW d\Omega} = \frac{1}{(4\pi)^2} \delta(W - \sqrt{s}) \frac{|\vec{p}|}{W}$$

che, sfruttando la  $\delta$  per avere:

$$\int \frac{dW}{W} \delta(W - \sqrt{s}) |\vec{p}| = \frac{|\vec{p}|}{\sqrt{s}}$$

diventa infine:

$$\left. \frac{d(\text{LIPS})}{d\Omega} \right|_{CM} = \frac{|\vec{p}|}{16\pi^2 \sqrt{s}}. \quad (5.30)$$

---

<sup>1</sup>Siccome per ottenere la sezione d'urto è necessario sommare su tutti i possibili stati finali occupabili dalle due particelle, dovrà essere presente un integrale su tutti i possibili impulsi degli stati finali.

Per calcolare, nel centro di massa, la sezione d'urto di Eq. (5.26), resta da valutare, in questo sistema di riferimento, il fattore di flusso:

$$f = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}$$

Usando  $p_1 \cdot p_2 = E_1 E_2 + |\vec{p}|^2$  otteniamo:

$$\begin{aligned} f^2 &= (E_1 E_2 + |\vec{p}|^2)^2 - m_1^2 m_2^2 \\ &= E_1^2 E_2^2 + |\vec{p}|^4 + 2|\vec{p}|^2 E_1 E_2 - (E_1^2 - |\vec{p}|^2)(E_2^2 - |\vec{p}|^2) \\ &= 2|\vec{p}|^2 E_1 E_2 + E_1^2 |\vec{p}|^2 + |\vec{p}|^2 E_2^2 \\ &= |\vec{p}|^2 (E_1 + E_2)^2 \\ &= |\vec{p}|^2 s \end{aligned}$$

Il fattore di flusso nel centro di massa è dunque:

$$f_{CM} = |\vec{p}| \sqrt{s} \quad (5.31)$$

Siamo dunque arrivati a poter riscrivere la sezione d'urto di Eq. (5.26) nel sistema di riferimento del centro di massa nella forma estremamente sintetica ed elegante:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 s} \quad (5.32)$$

Questa espressione può essere riscritta in forma totalmente invariante sostituendo alla  $\Omega$  la variabile di Mandelstam  $t$ , per la quale vale:

$$t = (p_1 - p_3)^2 = 2m_1^2 - 2p_1 \cdot p_3 = 2m_1^2 - 2E^2 + 2|\vec{p}|^2 \cos \theta = -2|\vec{p}|^2 (1 - \cos \theta)$$

Considerando  $|\vec{p}|$  fissato (ora siamo interessati a derivare la variazione angolare della sezione d'urto, a momento iniziale fissato) si ha:

$$dt = 2|\vec{p}|^2 d(\cos \theta)$$

Nel caso di particelle di spin 0 la sezione d'urto è invariante per rotazioni intorno alla direzioni dei fasci, siamo cioè in simmetria cilindrica, e possiamo quindi derivare:

$$d\Omega = d\phi d(\cos \theta) = 2\pi d(\cos \theta) = \frac{\pi}{|\vec{p}|^2} dt$$

Scrivendo quindi:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\vec{p}|^2}{\pi} \frac{d\sigma}{dt}$$

abbiamo la forma invariante della sezione d'urto:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi} \frac{|\mathcal{M}|^2}{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}$$

che può essere ulteriormente manipolata riscrivendo il denominatore come:

$$\begin{aligned}
 4(p_1 \cdot p_2)^2 - 4m_1^2 m_2^2 &= (s - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2 \\
 &= (s - m_1^2 - m_2^2 - 2m_1^2 m_2^2)(s - m_1^2 - m_2^2 + 2m_1 m_2) \\
 &= [s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2]
 \end{aligned}$$

per cui otteniamo l'espressione:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16\pi} \frac{|\mathcal{M}|^2}{[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2]} \quad (5.33)$$

È importante però notare che l'espressione invariante usata per il flusso, Eq. (5.24), è valida solo per collisioni collineari, quindi Eq. 5.33 è invariante solo sotto queste condizioni, cioè è invariante per boost di Lorentz lungo la direzione dei fasci (che d'altra parte sono le trasformazioni più plausibili da un punto di vista fisico). I termini di flusso e dLIPS appena derivati valgono per qualsiasi urto elastico  $2 \rightarrow 2$  di particelle non polarizzate (cioè per cui vale la simmetria cilindrica di cui sopra). La parte di dinamica dell'urto che dipende dalla natura delle particelle è contenuta in  $|\mathcal{M}|^2$ .

In esperimenti di fisica delle alte energie, le masse possono essere molto più piccole delle energie in gioco e quindi vale  $m_{1,2}^2 \ll s$ . In questo caso possiamo approssimare Eq. (5.33) a:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi s^2} \quad (5.34)$$

## 5.4 Scattering elastico tra particelle scalari

Consideriamo ora il caso di scattering elastico tra particelle di Klein-Gordon. Valutiamo esplicitamente l'ampiezza di scattering  $\mathcal{M}$ , applicando le regole di Feynman ai vertici del diagramma di Fig. 5.4:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} &= (-ie_a)(p_1 + p_3)^\mu \left( -i \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2} \right) (-ie_b)(p_2 + p_4)^\nu \\
 &= i \frac{e_a e_b}{q^2} (p_1 + p_3) \cdot (p_2 + p_4) \\
 &= i \frac{e_a e_b}{q^2} (p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_4 + p_3 \cdot p_2 + p_3 \cdot p_4) .
 \end{aligned}$$

Usando le proprietà delle variabili di Mandelstam (C.7) e (C.2) si ha:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} &= i \frac{e_a e_b}{q^2} (2p_1 \cdot p_2 + 2p_1 \cdot p_4) \\
 &= i \frac{e_a e_b}{q^2} (s - m_1^2 - m_2^2 + m_1^2 + m_2^2 - u) \\
 &= i \frac{e_a e_b}{q^2} (s - u)
 \end{aligned}$$

Essendo inoltre:

$$q^2 = (p_1 - p_3)^2 = t$$

otteniamo infine:

$$|\mathcal{M}|^2 = e_a^2 e_b^2 \frac{(s - u)^2}{t^2} \quad (5.35)$$

### 5.4.1 Sezione d'urto per lo scattering di Rutherford

Come esempio pratico (e paradigmatico) di quanto visto finora, calcoliamo la sezione d'urto per lo scattering di una particella di massa  $m$  e carica  $e_a = eZ_a$  con una particella di massa molto maggiore  $M$  e carica  $e_b = eZ_b$ . Calcoliamo la sezione d'urto nel sistema di riferimento del laboratorio, dove la particella pesante è considerata a riposo e usiamo l'approssimazione  $M \gg |\vec{k}| \gg m$ . In questo sistema abbiamo:

$$\begin{aligned} p_a &= (E_a, \vec{k}) \simeq (|\vec{k}|, \vec{k}) \\ p'_a &= (E'_a, \vec{k}') \simeq (|\vec{k}'|, \vec{k}') \\ p_b &= (M, \vec{0}) \end{aligned}$$

avendo usato  $E_a^2 = \vec{k}^2 + m^2 \simeq \vec{k}^2$ . L'energia finale della particella massiccia è circa uguale alla massa,  $E_f^M = E_a + M - E'_a \simeq M$  e dalla conservazione dell'energia  $E_a + M = E'_a + M$  otteniamo  $E_a \simeq E'_a$  cioè  $|\vec{k}| \simeq |\vec{k}'|$ . Il quadri-impulso finale della massa  $M$  è:

$$p'_b = p_a + p_b - p'_a = (E_a + M - E'_a, \vec{k} - \vec{k}') \simeq (M, \vec{0})$$

cioè il corpo più massiccio non rincula in seguito all'urto.

Con queste approssimazioni possiamo valutare la sezione d'urto di Eq. (5.33). Usando  $m_2 \gg m_1$  il fattore a denominatore si semplifica come:

$$[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2] \simeq (s - M^2)^2$$

Valutiamo le espressioni delle variabili di Mandelstam:

$$t = (p_a - p'_a)^2 \simeq -2p_a \cdot p'_a = -2|\vec{k}|^2 - 2|\vec{k}|^2 \cos \theta = -2|\vec{k}|^2(1 + \cos \theta) = -4|\vec{k}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

da cui:

$$dt \simeq 2|\vec{k}|^2 d(\cos \theta)$$

Per le altre due variabili si ha:

$$\begin{aligned} s &= (p_a + p_b)^2 \simeq (E_a + M)^2 - |\vec{k}|^2 = M^2 + 2|\vec{k}|M \\ u &= (p_a - p'_b)^2 \simeq (E_a - M)^2 - |\vec{k}|^2 = M^2 - 2|\vec{k}|M \end{aligned}$$

per cui:

$$s - u \simeq 4|\vec{k}|M$$

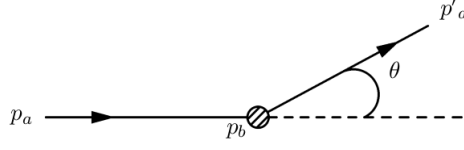


Figure 5.8: Schema scattering Rutherford, nel sistema di riferimento del laboratorio.

Ricordando Eq. 5.35, abbiamo ora tutti gli elementi necessari alla scrittura della sezione d'urto:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16\pi} \frac{|\mathcal{M}|^2}{(s - M^2)^2}$$

nella forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{2|\vec{k}|^2 d(\cos \theta)} &= \frac{1}{16\pi} \frac{e^4 Z_a^2 Z_b^2}{(s - M^2)^2} \frac{(s - u)^2}{t^2} \simeq \frac{1}{16\pi} \frac{16\pi^2 \alpha^2 Z_a^2 Z_b^2}{4|\vec{k}|^2 M^2} \frac{16|\vec{k}|^2 M^2}{16|\vec{k}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\pi \alpha^2 Z_a^2 Z_b^2}{4|\vec{k}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

avendo utilizzato la definizione di costante di struttura fine  $\alpha = e^2/(4\pi)$ .

Abbiamo quindi ottenuto la sezione d'urto di Rutherford:

$$\frac{d\sigma}{2\pi d(\cos \theta)} = \frac{\alpha^2 Z_a^2 Z_b^2}{4|\vec{k}|^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (5.36)$$

In questo primo esempio si è visto come sia semplice calcolare le sezioni d'urto all'ordine perturbativo più basso per un processo fisico, soprattutto grazie al calcolo di  $|\mathcal{M}|^2$  con le regole di Feynman. Un punto fondamentale sta nel combinare, in tutti i modi possibili, i diversi vertici di interazione contenuti nella hamiltoniana di interazione  $\hat{\mathcal{H}}_{int}$ , ovvero identificare correttamente tutti i diagrammi di Feynman che possono contribuire al processo. Nel semplice caso di un urto come quello di Rutherford appena studiato il diagramma in Fig. 5.4 è l'unico possibile. Dedichiamo invece le prossime sezioni ad analizzare processi di interazione a cui contribuiscono diversi diagrammi di Feynman.

## 5.5 Sezione d'urto per i processi $\pi + \pi \rightarrow \pi + \pi$

Consideriamo lo scattering tra pioni:

$$\pi^+(p_1) + \pi^+(p_2) \longrightarrow \pi^+(p_3) + \pi^+(p_4)$$

Le due particelle dello stato iniziale (così come le due dello stato finale) sono indistinguibili. L'ampiezza di scattering deve essere simmetrica per lo scambio tra le due particelle, o



detto in altri termini, occorre descriverle con appropriati stati simmetrizzati (che tengano conto della statistica, in questo caso “banale” in quanto bosonica). La conseguenza di ciò è che il diagramma di Feynman del processo è ora la somma dei due diagrammi rappresentati in figura 5.9.

Ognuno di questi diagrammi avrà una sua ampiezza di scattering, calcolabile applicando le regole di Feynman ai vertici:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_a &= (-ie)(p_1 + p_3)^\mu \left( -i \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2} \right) (-ie)(p_2 + p_4)^\nu = ie^2 \frac{(p_1 + p_3) \cdot (p_2 + p_4)}{(p_1 - p_3)^2} \\ &= ie^2 \frac{s - u}{t}\end{aligned}\quad (5.37)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_b &= (-ie)(p_1 + p_4)^\mu \left( -i \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2} \right) (-ie)(p_2 + p_3)^\nu = ie^2 \frac{(p_1 + p_4) \cdot (p_2 + p_3)}{(p_1 - p_4)^2} \\ &= ie^2 \frac{s - t}{u}\end{aligned}\quad (5.38)$$

Risulta evidente che i due diagrammi hanno  $q$  diversi:

$$q_a = p_1 - p_3 = p_4 - p_2 = \sqrt{t}$$

$$q_b = p_1 - p_4 = p_3 - p_2 = \sqrt{u}$$

e sono rispettivamente detti “canale  $t$ ” e “canale  $u$ ” del processo. È inoltre immediato vedere come si possa ricavare l’ampiezza di scattering di un canale da quella dell’altro canale semplicemente eseguendo lo scambio  $p_3 \leftrightarrow p_4$ , o analogamente  $t \leftrightarrow u$ .

L’ampiezza di scattering dell’intero processo fisico sarà la somma delle ampiezze dei canali possibili, cioè:

$$\mathcal{M}_{\pi^+\pi^+} = \mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b = ie^2 \left( \frac{s - u}{t} + \frac{s - t}{u} \right)\quad (5.39)$$

Ponendoci nel baricentro dell’interazione e nel limite ad alte energie si ha:

$$s \simeq 2p_1 \cdot p_2 \quad ; \quad t \simeq -2p_1 \cdot p_3 \quad ; \quad u \simeq -2p_1 \cdot p_4$$

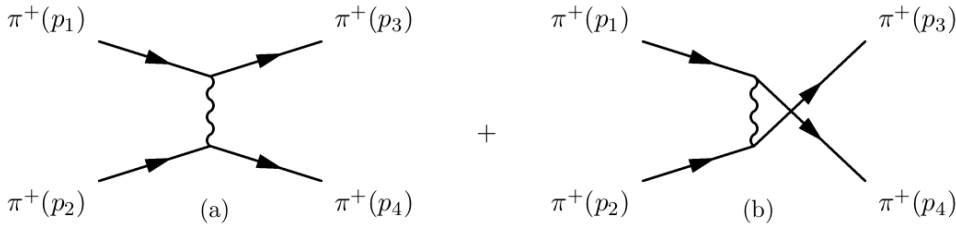


Figure 5.9: I due diagrammi di Feynman che contribuiscono all’interazione tra due  $\pi^+$  indistinguibili: (a) è detto *canale  $t$* , (b) è detto *canale  $u$* .

da cui, detto  $\theta$  l'angolo di scattering:

$$s = 4E^2 \quad ; \quad t = -2E^2(1 - \cos \theta) \quad ; \quad u = -2E^2(1 + \cos \theta)$$

Possiamo dunque riscrivere l'ampiezza di scattering nel centro di massa come:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\pi^+\pi^+} &= ie^2 \left[ \frac{s + \frac{s}{2}(1 + \cos \theta)}{-\frac{s}{2}(1 - \cos \theta)} + \frac{s + \frac{s}{2}(1 - \cos \theta)}{-\frac{s}{2}(1 + \cos \theta)} \right] \\ &= -ie^2 \left[ \frac{(3 + \cos \theta)(1 + \cos \theta) + (3 - \cos \theta)(1 - \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} \right] \end{aligned}$$

cioè:

$$\mathcal{M}_{\pi^+\pi^+} = -ie^2 \frac{2(3 + \cos^2 \theta)}{\sin^2 \theta} \quad (5.40)$$

Pertanto la sezione d'urto nel centro di massa è:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\pi^+\pi^+} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 s} = \frac{4e^4(3 + \cos^2 \theta)^2}{64\pi^2 \sin^4 \theta 4E^2} = \frac{\alpha^2(3 + \cos^2 \theta)^2}{4E^2 \sin^4 \theta} \quad (5.41)$$

Consideriamo ora il processo:

$$\pi^+(p_1) + \pi^-(p_2) \longrightarrow \pi^+(p_3) + \pi^-(p_4)$$

La novità rispetto alla trattazione precedente sta nella presenza di un'antiparticella, le cui corrispondenti regole di Feynman potrebbero essere dedotte, in analogia a quanto già fatto per le particelle, a partire dai termini  $\hat{b}$  e  $\hat{b}^\dagger$  contenuti nell'hamiltoniana di interazione  $\hat{\mathcal{H}}_{int}$ . Possiamo però evitare di seguire questo (lungo) percorso, ricordando che le antiparticelle derivano dall'interpretazione di soluzioni con energia negativa e opposti valori d'impulso (e terza componente di spin, se fossero particelle di Dirac) rispetto alle particelle.

Modifichiamo quindi le regole di Feynman del caso delle particelle introducendo un segno meno davanti ai quadrimpulsi per le antiparticelle. I due diagrammi che contribuiscono al processo sono rappresentati in Fig. 5.10 (notare che graficamente differenziamo antiparticelle dalle particelle attraverso il verso della linea, opposto a quello dell'impulso). Le relative ampiezze possono quindi essere scritte come:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a &= (-ie)(p_1 + p_3)^\mu \left( -i \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2} \right) (ie)(p_2 + p_4)^\nu = -ie^2 \frac{(p_1 + p_3) \cdot (p_2 + p_4)}{(p_1 - p_3)^2} \\ &= ie^2 \frac{u - s}{t} \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\mathcal{M}_b = (-ie)(p_1 - p_2)^\mu \left( -i \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2} \right) (-ie)(p_3 - p_4)^\nu = ie^2 \frac{(p_1 - p_2) \cdot (p_3 - p_4)}{(p_1 + p_2)^2} \quad (5.43)$$

$$= ie^2 \frac{u - t}{s} \quad (5.44)$$

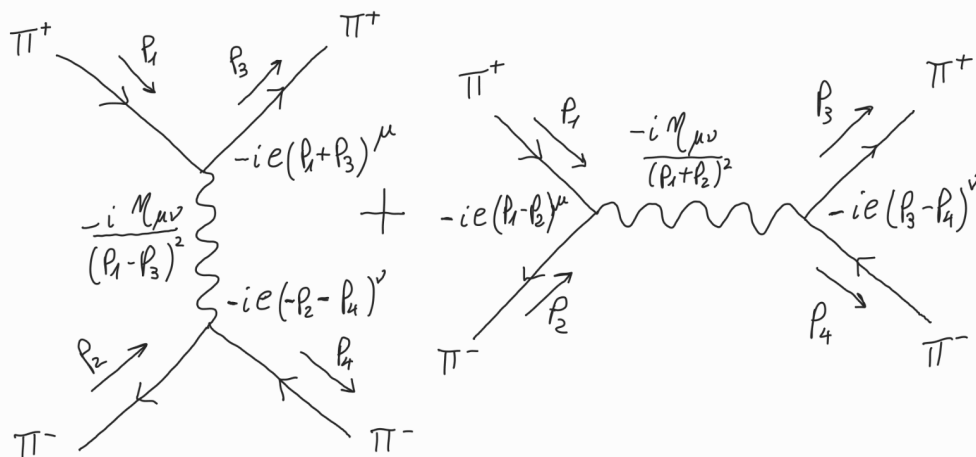


Figure 5.10: I due diagrammi di Feynman che contribuiscono all'interazione tra  $\pi^+$  e la sua antiparticella  $\pi^-$ : (a) è detto *canale t*, (b) è detto *canale s*.

E' immediato notare che rispetto ai calcoli di Eqs. 5.37 e 5.38 si ha la corrispondenza (valida in generale):

$$\mathcal{M}_{\pi^+\pi^-}(p_1, p_2; p_3, p_4) = \mathcal{M}_{\pi^+\pi^+}(p_1, -p_4; p_3, -p_2)$$

da cui risulta più chiara anche la scelta del verso sulla linea di antiparticella nei diagrammi di Feynman. Lo scambio  $p_2 \leftrightarrow -p_4$  è equivalente  $u \leftrightarrow s$ . L'ampiezza di scattering di Eq. (5.39) si è trasformata quindi in:

$$\mathcal{M}_{\pi^+\pi^-} = ie^2 \left( \frac{u-s}{t} + \frac{u-t}{s} \right) \quad (5.45)$$

L'ampiezza di scattering è data dalla somma dei due diagrammi di Fig. 5.10. Il primo diagramma corrisponde del tutto al diagramma (a) di Fig. 5.9, mentre il diagramma di "simmetrizzazione" (canale u) è qui sostituito dal diagramma di annichilazione, in cui la coppia particella-antiparticella si annichila in un fotone virtuale avente impulso  $p_1 + p_2$ . Il propagatore di questo fotone contiene a denominatore:

$$q = p_1 + p_2 = \sqrt{s}$$

il che porta a chiamare questo diagramma "*canale s*".

## 5.6 Scattering Compton sui pioni ed invarianza di gauge

Consideriamo in questa sezione il processo di scattering di fotoni sui pioni:

$$\gamma(k, \epsilon) + \pi^+(p) \rightarrow \gamma(k', \epsilon') + \pi^+(p')$$

Un primo contributo a questo processo è dato dal diagramma in Fig. 5.5, che riportiamo per completezza in Fig. 5.11; per questo processo “*diretto*” l’ampiezza di scattering ottenibile dalle regole di Feynman è:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\gamma\pi}^{(d)} &= (-ie)(p+q)^\mu \epsilon_\mu \frac{i}{q^2 - m^2} (-ie)(q+p')^\nu \epsilon'^*_\nu \\ &= -ie^2 \epsilon \cdot (p+q) \frac{1}{(p+k)^2 - m^2} \epsilon'^* \cdot (q+p')\end{aligned}$$

essendo  $q = p + k = p' + k' = \sqrt{s}$ . Imponendo la condizione di Lorenz  $\epsilon \cdot k = \epsilon' \cdot k' = 0$ , possiamo trovare:

$$\begin{aligned}\epsilon \cdot (p+q) &= \epsilon \cdot (p+p+k) = 2\epsilon \cdot p \\ \epsilon'^* \cdot (q+p') &= \epsilon'^* \cdot (p'+p'+k) = 2\epsilon'^* \cdot p'\end{aligned}$$

e dunque:

$$\mathcal{M}_{\gamma\pi}^{(d)} = -i4e^2 (\epsilon \cdot p) (\epsilon'^* \cdot p') \frac{1}{s - m^2} \quad (5.46)$$

Oltre al diagramma diretto dobbiamo anche considerare il diagramma “*di scambio*” mostrato in Fig. 5.11, per il quale si ottiene:

$$\mathcal{M}_{\gamma\pi}^{(e)} = (-ie)(p+q)^\mu \cdot \epsilon'^*_\mu \frac{i}{q^2 - m^2} (-ie)(q+p')^\nu \cdot \epsilon_\nu$$

con  $q = p - k' = p' - k = \sqrt{u}$ ; per cui:

$$\mathcal{M}_{\gamma\pi}^{(e)} = -i4e^2 (\epsilon'^* \cdot p) (\epsilon \cdot p') \frac{1}{u - m^2} \quad (5.47)$$

Se a questo punto pensassimo di aver considerato tutti i contributi di ordine  $e^2 = 4\pi\alpha$  all’ampiezza dello scattering Compton sui pioni commetteremmo un errore. Infatti, nel ricavare Eq. (5.2) avevamo trascurato un termine  $-e^2 \hat{A}_\mu \hat{A}^\mu \hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi}$  che contribuisce al processo di scattering. In particolare tale termine corrisponde ad un nuovo vertice con quattro campi, cioè due fotoni e due pioni, che interagiscono in un punto come mostrato

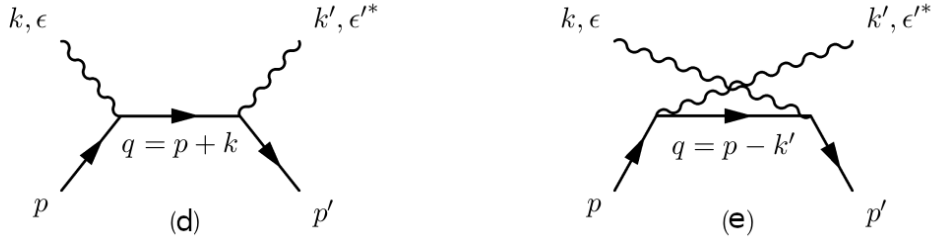


Figure 5.11: Diagrammi di Feynman “diretto” e “di scambio” per lo scattering Compton sui pioni.

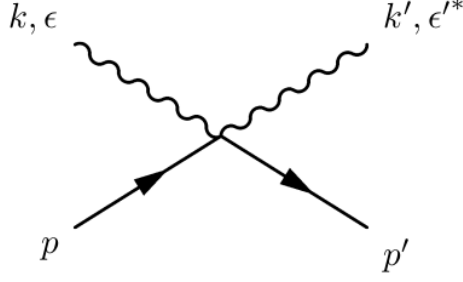


Figure 5.12: Contributo “di contatto” allo scattering Compton sui pioni.

in Fig. 5.12. Questo termine quadratico in  $e$  viene detto “*di contatto*”, in quanto non presenta stati virtuali interni. L’ampiezza di scattering del diagramma ad esso associato può essere calcolata reinserendo il termine finora trascurato nell’hamiltoniana di interazione contenuta in Eq. (5.1). Seguiamo però un’altra strada che sfrutta il principio di invarianza di gauge dell’intera ampiezza e ne evidenzia l’importanza.

Per generico processo tra un fotone, avente quadri-impulso  $k^\mu$  e polarizzazione  $\epsilon^\mu$ , ed una particella di qualsiasi tipo, tra quelli permessi dalle leggi di conservazione, l’ampiezza è lineare in  $\epsilon^\mu$  e quindi scrivibile come:

$$\mathcal{M} = \epsilon^\mu T_\mu$$

dove in  $T_\mu$  sono contenute tutte le informazioni sullo specifico diagramma di Feynman associato al processo. La scelta del gauge di Lorenz implica  $\epsilon \cdot k = 0$ ; inoltre, la residua invarianza di gauge permette, per fotoni reali, di effettuare la trasformazione di Eq. (4.17):

$$\epsilon^\mu \longrightarrow \epsilon'^\mu = \epsilon^\mu + \beta k^\mu$$

lasciando inalterata ogni grandezza fisica. Per l’ampiezza  $\mathcal{M}$  questa ulteriore libertà si traduce in:

$$\mathcal{M} = \epsilon^\mu T_\mu = (\epsilon^\mu + \beta k^\mu) T_\mu$$

da cui segue, per via dell’invarianza di gauge, l’importante condizione, detta “*identità di Ward*”:

$$k^\mu T_\mu = 0 \tag{5.48}$$

Cioè, se l’invarianza di gauge è verificata, il risultato della sostituzione nella ampiezza di scattering del vettore di polarizzazione  $\epsilon^\mu$  con il corrispettivo quadri-impulso  $k^\mu$  deve essere una grandezza nulla.

Effettuiamo ora questa operazione nella somma tra le ampiezze di scattering diretta (5.46) e di scambio (5.47) dello scattering Compton. Il risultato deve necessariamente elidersi con l’ampiezza di contatto legata al diagramma in Fig. 5.12, ovvero deve essere:

$$\left[ \mathcal{M}_{\gamma\pi}^{(d)} + \mathcal{M}_{\gamma\pi}^{(e)} \right]_{\epsilon^\mu \rightarrow k^\mu} = -\mathcal{M}_{\gamma\pi}^{(c)}|_{\epsilon^\mu \rightarrow k^\mu}$$

Verifichiamo che Eq. 5.48 non è soddisfatta se consideriamo solo le ampiezze diretta e di scambio. Partendo da:

$$\mathcal{M}_{\gamma\pi}^{(d)} + \mathcal{M}_{\gamma\pi}^{(e)} = -i4e^2 \epsilon'_\mu \epsilon'_\nu \left( \frac{p'^\mu p^\nu}{s - m^2} + \frac{p^\mu p'^\nu}{u - m^2} \right) \equiv \epsilon'^*_\mu \epsilon'_\nu T^{\mu\nu}$$

e sostituendo  $\epsilon'_\nu$  con  $k_\nu$  otteniamo:

$$\epsilon'^*_\mu k_\nu T^{\mu\nu} = -i4e^2 \epsilon'^*_\mu \left( \frac{p \cdot k}{s - m^2} p'^\mu + \frac{p' \cdot k}{u - m^2} p'^\mu \right)$$

che, sfruttando le proprietà delle variabili di Mandelstam (C.2):

$$\begin{aligned} 2p \cdot k &= s - m^2 \\ 2p' \cdot k &= -u + m^2 \end{aligned}$$

diventa:

$$\epsilon'^*_\mu k_\nu T^{\mu\nu} = -i2e^2 \epsilon'^*_\mu (p' - p)^\mu = -i2e^2 \epsilon'^* \cdot k$$

chiaramente diverso da zero. Lo stesso risultato può essere trovato sostituendo  $\epsilon'$  con  $k'$  o effettuando entrambe le sostituzioni contemporaneamente.

L'invarianza di gauge deve essere verificata ordine per ordine nella serie perturbativa. Aggiungendo termini di ordine superiore a  $e^2$  (cioè oltre al prim'ordine perturbativo che stiamo considerando), l'invarianza di gauge non sarebbe comunque ripristinata.

Occorre quindi aggiungere una terza ampiezza di scattering, necessaria a descrivere completamente lo scattering Compton  $\gamma + \pi \rightarrow \gamma + \pi$ :

$$\mathcal{M}_{\gamma\pi}^{(c)} = 2ie^2 \epsilon'^* \cdot \epsilon \quad (5.49)$$

scrittura che ritroveremmo, sebbene in modo meno immediato, dal calcolo diretto sviluppabile reinserendo il termine quadratico in  $e$  all'interno dell'hamiltoniana di interazione.

La forma completa, all'ordine  $e^2$  e gauge invariante, dell'ampiezza di scattering Compton su di un pione è quindi data dalla somma:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\gamma\pi} &= \mathcal{M}_{\gamma\pi}^{(d)} + \mathcal{M}_{\gamma\pi}^{(e)} + \mathcal{M}_{\gamma\pi}^{(c)} \\ &= -ie^2 \left[ 4 \frac{(\epsilon \cdot p)(\epsilon'^* \cdot p')}{s - m^2} + 4 \frac{(\epsilon \cdot p')(\epsilon'^* \cdot p)}{u - m^2} - 2\epsilon \cdot \epsilon'^* \right] \end{aligned}$$

immediatamente riscrivibile come:

$$\mathcal{M}_{\gamma\pi} = -ie^2 \epsilon'^*_\mu \epsilon'_\nu \left[ 4 \frac{p'^\mu p^\nu}{s - m^2} + 4 \frac{p^\mu p'^\nu}{u - m^2} - 2\eta^{\mu\nu} \right] \quad (5.50)$$

che, inserita in Eq. (5.33), permette il calcolo della sezione d'urto.

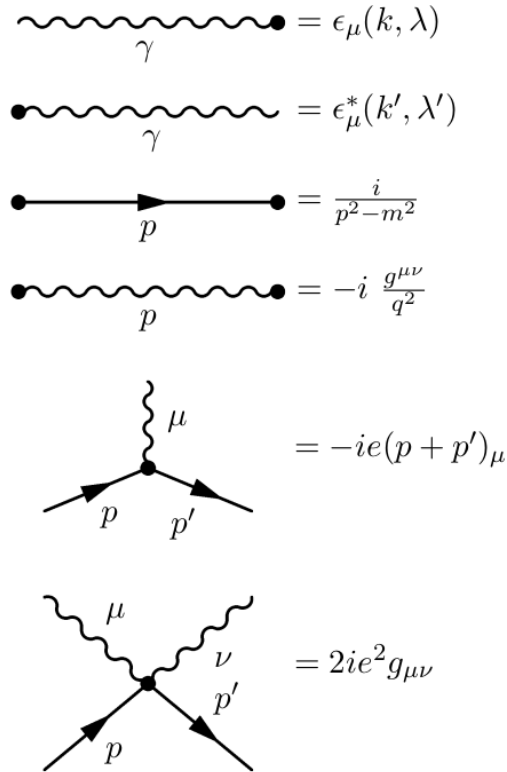


Figure 5.13: Riassunto regole di Feynman per scalar QED.

## 5.7 Regole di Feynman: particelle di spin 0

Presentiamo in questa sezione un rapido riassunto delle regole di Feynman per l'elettrodinamica quantistica di particelle di spin 0 all'ordine perturbativo più basso, ovvero  $O(e^2) = O(\alpha)$ . Lo studio degli ordini perturbativi di grado superiore e i diagrammi ad essi associati esulano dall'ambito di questo corso.

Per ogni **linea esterna di fotone** entrante nel diagramma bisogna includere un vettore di polarizzazione  $\epsilon_\mu(k, \lambda)$ , mentre per ogni fotone uscente includiamo il vettore  $\epsilon_\mu^*(k', \lambda')$ .

Per ogni **linea interna di particella di spin 0 e massa m** includiamo il propagatore  $i/(p^2 - m^2)$ , mentre per ogni **linea interna di fotone** includiamo il propagatore  $-i \eta^{\mu\nu}/q^2$ , scritto così nel gauge di Lorenz-Feynman.

Per ogni **vertice di emissione o assorbimento** di un fotone da parte di una particella di carica  $+e$  includiamo un fattore  $-ie(p + p')_\mu$ ; se invece il vertice è un **vertice di contatto** tra un fotone ed una particella di carica  $\pm e$  il fattore da includere

è  $2ie^2\eta_{\mu\nu}$ .

L'applicazione di queste regole permettono di calcolare l'ampiezza di scattering  $\mathcal{M}$  per un qualsiasi processo tra particelle di spin 0 e fotoni del tipo  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ . La corrispondente sezione d'urto è data da Eq. 5.23:

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_1 2E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3 2E_4} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2), \quad (5.51)$$

la quale può essere integrata con eventuali opportune semplificazioni, come descritto in Sezione 5.3.



## Chapter 6

# Interazioni per particelle di spin $\frac{1}{2}$

Anche nello studio delle interazioni per le particelle di Dirac partiamo dall'ampiezza di transizione di Eq. (5.1):

$$A_{fi}^{(1)} = -i \int d^4x \langle f | \hat{\mathcal{H}}_{int}^I | i \rangle \quad (6.1)$$

dove ora, in virtù di Eq. (4.7) e considerando una particella di carica  $q$ , si ha:

$$\hat{\mathcal{H}}_{int} = q \hat{\bar{\Psi}} \gamma^\mu \hat{\Psi} \hat{A}_\mu = \hat{J}_{em}^\mu \hat{A}_\mu \quad (6.2)$$

Gli stati iniziali e finali definiti da:

$$|i\rangle = \hat{c}_s^\dagger(p) \hat{\alpha}^\dagger(k, \lambda) |0\rangle \quad (6.3)$$

$$|f\rangle = \hat{c}_{s'}^\dagger(p') |0\rangle \quad (6.4)$$

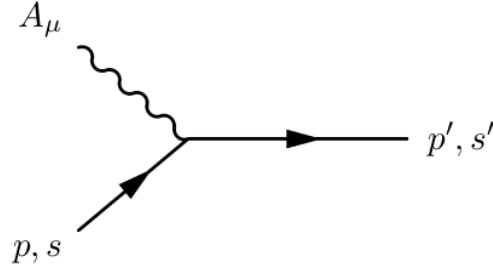
Seguendo quanto già fatto per le particelle di spin 0 in Sezione 5, consideriamo ad esempio un processo quale quello mostrato in Fig. 6.1. Notiamo ora (e avremmo già potuto farlo nella precedente Sezione) che tale processo è fisico solo se le masse di stato iniziale e finale fermionico (o scalare nel caso precedente) sono diverse. Infatti dalla conservazione del quadri-impulso  $k^\mu + p^\mu = p'^\mu$  con  $k_\mu k^\mu = 0$  e  $p_\mu p^\mu = p'_\mu p'^\mu = m_e^2$ , dovremmo avere:

$$(k^\mu + p^\mu)(k_\mu + p_\mu) = p'_\mu p'^\mu = m_e^2 \Rightarrow 2k^\mu p_\mu = 2|\vec{k}|E - 2\vec{k} \cdot \vec{p} = 0$$

il che è impossibile, essendo  $|\vec{p}| = \sqrt{E^2 - m_e^2}$ , cioè almeno una delle tre linee corrisponde ad una particella virtuale. Il processo fisico diventa invece possibile al secondo ordine perturbativo, e in generale il vertice di Fig. 6.1 può essere utilizzato per formare processi fisici del second'ordine, come abbiamo già visto per il caso scalare. Il processo può invece essere fisico se lo stato finale è una sorta di eccitazione con massa diversa da quello iniziale.

Fatta questa premessa, calcoliamo l'ampiezza (6.1) associata al vertice, la quale si separa nel prodotto di due fattori distinti:

$$A_{fi}^{(1)} = -i \int d^4x \langle p', s' | \hat{J}_{em}^\mu | p, s \rangle \langle 0 | \hat{A}_\mu | k, \lambda \rangle = -i \int d^4x J_{fi}^\mu(x) A_\mu(x) .$$


 Figure 6.1: Vertice  $\gamma + e^- \rightarrow e^-$ 

Ricordiamo la funzione d'onda del fotone:

$$A_\mu = N_k \epsilon_\mu(\lambda) e^{-ik \cdot x}$$

Per la corrente fermionica abbiamo:

$$J_{fi}^\mu = q \langle p', s' | \hat{\Psi} | 0 \rangle \gamma^\mu \langle 0 | \hat{\Psi} | p, s \rangle = q \bar{\Psi}(p', s') \gamma^\mu \Psi(p, s). \quad (6.5)$$

Gli spinori  $\Psi$  delle particelle (per esempio, elettroni con carica  $-e$ ) ed antiparticelle (per esempio, positroni con carica  $+e$ ) sono dati dalle equazioni (2.96):

$$\begin{aligned} \Psi_{e^-}(p, s) &= N_e u(p, s) e^{-ip \cdot x} \\ \Psi_{e^+}(p, s) &= N_e v(p, s) e^{ip \cdot x} \end{aligned} \quad (6.6)$$

dove abbiamo introdotto un fattore di normalizzazione  $N_e$ , che determineremo in maniera analoga a Eq. (5.20). Nel caso di un elettrone, la corrente di transizione elettromagnetica (6.5) diventa dunque:

$$J_{fi}^\mu(e^-) = -N_e N'_e e \bar{u}(p', s') \gamma^\mu u(p, s) e^{-i(p-p') \cdot x}. \quad (6.7)$$

Come già fatto nella sezione 2.4, sottolineiamo che l'ordine corretto del prodotto tra spinori è  $\bar{u} \gamma u$  (che infatti restituisce un numero), e non  $u \gamma \bar{u}$  (che restituirebbe come risultato una matrice).

## 6.1 Scattering elastico $e^- + \pi \rightarrow e^- + \pi$

Consideriamo ora il processo di scattering elastico  $e^- + \pi \rightarrow e^- + \pi$  illustrato in Fig. (6.2) e ripetiamo lo stesso procedimento seguito nella Sezione 5.1.

L'ampiezza di transizione per l'elettrone in un campo elettromagnetico  $A^\mu$  è data da:

$$\mathcal{A}^{(1)} = -i \int d^4x J_{fi}^\mu(e^-) A_\mu$$

dove la corrente di transizione è data da Eq. 6.7 e dove  $A_\mu$  ora è il potenziale prodotto dal moto della particella  $\pi^+$ , che ricordando Eq. (5.11) risulta essere:

$$A_\mu = -\frac{1}{q^2} J_\mu(\pi^+) = -\frac{e}{q^2} N N' (p + p')_\mu e^{-i(p-p') \cdot x}$$

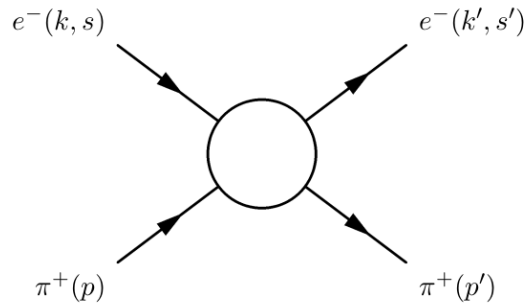


Figure 6.2: Scattering elastico tra elettrone e pione

con  $q = p' - p = k - k'$ . Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{e^-\pi^+}^{(1)} &= -i \int d^4x J^\mu(e^-) \left(\frac{1}{q^2}\right) J_\mu(\pi^+) \\ &= -i N_e N'_e N N' \int d^4x \bar{u}(k', s') \gamma^\mu u(k, s) e^{-i(k-k') \cdot x} \frac{e^2}{q^2} (p + p')_\mu e^{-i(p-p') \cdot x} \end{aligned}$$

L'integrale in  $d^4x$  produce l'usuale  $\delta^4$  di conservazione dell'energia e impulso, da cui:

$$\mathcal{A}_{e^-\pi^+}^{(1)} = N_e N'_e N N' (2\pi)^4 \delta^4(k' + p' - k - p) \bar{u}(k', s') (ie\gamma^\mu) u(k, s) \left(-i \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2}\right) (-ie)(p + p')^\nu \quad (6.8)$$

Come fatto in precedenza, isoliamo i termini contenenti i fattori di normalizzazione e  $(2\pi)^4 \delta^4$  e definiamo l'ampiezza di scattering:

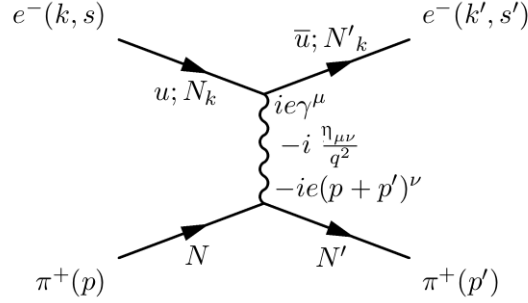
$$\mathcal{M}_{ss'} = \bar{u}(k', s') (ie\gamma^\mu) u(k, s) \left(-i \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2}\right) (-ie)(p + p')^\nu \quad (6.9)$$

a cui associamo il diagramma di Feynman di Fig. 6.3.  $\mathcal{M}_{ss'}$  è un invariante di Lorentz; infatti abbiamo visto nella Sezione 2.2.4 che  $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$  è un quadri-vettore di Lorentz, e quindi lo è anche  $\bar{u}\gamma^\mu u$ , il quale è contratto con  $(p + p')_\mu$  in Eq. (6.9).

In aggiunta alle regole di Feynman i-vi, enunciate nel capitolo precedente, dobbiamo quindi considerare due nuove regole, specifiche per particelle di spin 1/2:

- vii Introdurre per ogni fermione di Dirac entrante lo spinore  $u(k, s)$  e per ogni fermione uscente lo spinore  $\bar{u}(k', s')$ ;
- viii Associare al vertice fermione-fotone-fermione il fattore  $-iq\gamma^\mu$ , dove  $q$  è la carica elettrica del fermione.

Anche qui notiamo l'ordine del prodotto  $\bar{u}\gamma u$ , dove a sinistra abbiamo lo spinore relativo allo stato finale e a destra lo spinore dello stato iniziale.


 Figure 6.3: Regole di Feynman per lo scattering  $e^- + \pi \rightarrow e^- + \pi$ 

I passaggi che dall'ampiezza di scattering permettono di calcolare la sezione d'urto a 2 corpi sono analoghi a quelli seguiti nella Sezione 5.3 per particelle di spin 0 e si ottiene:

$$d\sigma_{ss'} = \frac{|\mathcal{M}_{ss'}|^2}{4E\omega|\vec{v}|} (2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - p - k) \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2\omega'} \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3 2E'} , \quad (6.10)$$

dove  $s$  è lo stato di spin del fermione nello stato iniziale e  $s'$  è lo stato di spin finale e abbiamo definito:

$$\begin{aligned} k^\mu &= (\omega, \vec{k}) \quad , \quad k'^\mu = (\omega', \vec{k}') \\ p^\mu &= (E, \vec{p}) \quad , \quad p'^\mu = (E', \vec{p}') \end{aligned}$$

Per collisioni collineari si ha:

$$E\omega|\vec{v}| = \sqrt{(p \cdot k)^2 - m_1^2 m_2^2}$$

Eq. (6.10) esprime la sezione d'urto per un elettrone iniziale e finale in un determinato stato di spin; la dipendenza da  $s, s'$  è infatti contenuta in  $\mathcal{M}_{ss'}$  e nella forma di Eq. (2.102) dei corrispondenti spinori  $u(k, s)$  e  $\bar{u}(k', s')$ . Gli esperimenti sono però solitamente condotti con fasci di elettroni non polarizzati: questo significa che gli elettroni iniziali sono una miscela incoerente di stati di spin *up* e *down* ( $s_z = \pm 1/2$ ) ognuno avente probabilità 1/2. In maniera del tutto analoga la polarizzazione degli elettroni finali non è osservata, in quanto si misura solitamente solo la loro energia e direzione. La **sezione d'urto non polarizzata** è dunque data dalla media su tutti i possibili stati di spin iniziale e dalla somma sugli stati di spin finale. Nel caso di un fermione coinvolto nel processo:

$$d\sigma^{unpol} = \frac{1}{2} (d\sigma_{\uparrow\uparrow} + d\sigma_{\uparrow\downarrow} + d\sigma_{\downarrow\uparrow} + d\sigma_{\downarrow\downarrow}) = \frac{1}{2} \sum_{s, s'} d\sigma_{ss'} \quad (6.11)$$

In generale, per un processo  $A(p_1, s_1) + B(p_2, s_2) \rightarrow A(p_3, s_3) + B(p_4, s_4)$  si ha:

$$d\sigma^{unpol} = \left[ \frac{1}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}_{s_1 s_2 s_3 s_4}|^2 \right] \frac{1}{4E_3 E_4 |\vec{v}|} d(\text{LIPS}) .$$

Sviluppiamo ora un metodo generale, detto **tecnica della traccia per il calcolo delle sezioni d'urto**, per calcolare più agevolmente la somma sugli stati di spin  $s, s'$  dell'ampiezza di scattering  $|\mathcal{M}|^2$  (cioè manipoliamo l'ampiezza in modo che il calcolo della somma sugli spin diventi un calcolo di traccia di matrici). Abbiamo anzitutto:

$$\mathcal{M}_{ss'} = -i \frac{e^2}{q^2} \bar{u}(k', s') \gamma^\mu u(k, s) (p + p')_\mu$$

per cui:

$$|\mathcal{M}_{ss'}|^2 = \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 [\bar{u}(k', s') \gamma^\mu u(k, s) (p + p')_\mu] [\bar{u}(k', s') \gamma^\nu u(k, s) (p + p')_\nu]^*$$

I termini tra parentesi quadre sono numeri complessi (abbiamo già più volte menzionato che, a dato  $\mu$ ,  $\bar{u} \gamma^\mu u$  è un numero complesso), quindi calcolare il complesso coniugato è equivalente a calcolare l'hermitiano coniugato:

$$\begin{aligned} [\bar{u}(k', s') \gamma^\nu u(k, s) (p + p')_\nu]^\dagger &= [u^\dagger(k, s) \gamma^{\nu\dagger} \bar{u}^\dagger(k', s')] (p + p')_\nu \\ &= [u^\dagger(k, s) \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0 \gamma^0 u(k', s')] (p + p')_\nu \\ &= [\bar{u}(k, s) \gamma^\nu u(k', s')] (p + p')_\nu \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ricavato la regola  $[\bar{u}(k', s') \gamma^\nu u(k, s)]^\dagger = \bar{u}(k, s) \gamma^\nu u(k', s')$ .

Si ha pertanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{s, s'} |\mathcal{M}_{s, s'}|^2 &= \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 \frac{1}{2} \sum_{s, s'} \bar{u}(k', s') \gamma^\mu u(k, s) \bar{u}(k, s) \gamma^\nu u(k', s') (p + p')_\mu (p + p')_\nu \\ &\equiv \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 L^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \end{aligned}$$

dove abbiamo definito un **tensore leptónico**  $L^{\mu\nu}$  contenente tutta l'algebra di Dirac:

$$L^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \sum_{s, s'} \bar{u}(k', s') \gamma^\mu u(k, s) \bar{u}(k, s) \gamma^\nu u(k', s') \quad (6.12)$$

ed un **tensore adronico**  $T_{\mu\nu}$  derivante dal vertice pionico del diagramma di figura 6.3:

$$T_{\mu\nu} \equiv (p + p')_\mu (p + p')_\nu \quad (6.13)$$

Concentriamo ora la nostra analisi sul tensore leptónico e usiamo le seguenti proprietà degli spinori di Dirac (dimostrazione lasciata per esercizio, usando le definizioni di Eq. 2.102):

$$\begin{aligned} \sum_s u(k, s) \bar{u}(k, s) &= \not{k} + m \mathbb{1} \\ \sum_s v(k, s) \bar{v}(k, s) &= \not{k} - m \mathbb{1} \end{aligned} \quad (6.14)$$

per semplificare la scrittura in Eq. (6.12). In quest'ultima però gli spinori compaiono separati dalle matrici  $\gamma$  e, per capire meglio come agire, riscriviamo il tensore leptónico esplicitando gli indici matriciali, sottintendendo come sempre la somma sugli indici ripetuti:

$$L^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \bar{u}_\alpha(k', s') (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} u_\beta(k, s) \bar{u}_\gamma(k, s) (\gamma^\nu)_{\gamma\delta} u_\delta(k', s').$$

In questo modo ora i fattori del prodotto sono numeri e possiamo cambiare l'ordine dei fattori per raggruppare le parti che dipendono da  $s$  da quelle che dipendono da  $s'$  ed ottenere:

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\not{k}' + m)_{\delta\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\not{k} + m)_{\beta\gamma} (\gamma^\nu)_{\gamma\delta} = \frac{1}{2} \text{Tr}[(\not{k}' + m)\gamma^\mu(\not{k} + m)\gamma^\nu]$$

In generale, una scrittura in funzione della traccia del prodotto tra matrici come quella appena derivata è particolarmente comoda se usiamo le proprietà generali della traccia delle matrici  $\gamma$  o di loro prodotti, dimostrate in Appendice D:

$$\begin{cases} \text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu} \\ \text{Tr}(\not{a}_1\not{a}_2\cdots\not{a}_n) = 0 & \text{per } n \text{ dispari} \\ \text{Tr}(\not{a}\not{b}) = 4a \cdot b \\ \text{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c) - (a \cdot c)(b \cdot d)] \end{cases} \quad (6.15)$$

Usando tali proprietà possiamo infatti riscrivere:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(\not{k}' + m)\gamma^\mu(\not{k} + m)\gamma^\nu] &= \text{Tr}[\not{k}'\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu] + m^2\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] \\ &= 4[k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu - (k \cdot k')\eta^{\mu\nu} + m^2\eta^{\mu\nu}] \\ &= 4[k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu - (k \cdot k' - m^2)\eta^{\mu\nu}] \end{aligned} \quad (6.16)$$

che, essendo:

$$q^2 = (k - k')^2 = 2m^2 - 2k \cdot k'$$

ci permette di scrivere il tensore leptónico come:

$$L^{\mu\nu} = 2 \left[ k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu + \frac{1}{2} q^2 \eta^{\mu\nu} \right]$$

E dunque otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{s,s'} |\mathcal{M}_{s,s'}|^2 &= \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 L^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \\ &= \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 2 \left[ k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu + \frac{1}{2} q^2 \eta^{\mu\nu} \right] (p + p')_\mu (p + p')_\nu \\ &= \left( \frac{4\pi\alpha}{q^2} \right)^2 8 \left[ 2(p \cdot k)(p \cdot k') + \frac{1}{2} q^2 m_\pi^2 \right] \end{aligned}$$

essendo  $m_\pi$  la massa del pione e avendo usato  $L^{\mu\nu}q_\mu = 0$  nell'ultimo passaggio (e notando che  $(p + p')_\mu = (p' - p + 2p)_\mu = q_\mu + 2p_\mu$ . Infatti:

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu}q_\mu &= 2q \cdot k k'^\nu + 2q \cdot k' k'^\nu + q^2 q^\nu \\ &= 2(k - k') \cdot k k'^\nu + 2(k - k') \cdot k' k'^\nu + 2(m^2 - k \cdot k')(k - k')^\nu \\ &= 2[(m^2 - k \cdot k')k'^\nu + (k \cdot k' - m^2)k^\nu + (m^2 - k \cdot k')(k - k')^\nu] \\ &= 0 \end{aligned}$$

La sezione d'urto non polarizzata nel sistema di riferimento del centro di massa è data da Eq. (5.32):

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{s,s'} |\mathcal{M}_{s,s'}|^2}{64\pi^2 s} = \left( \frac{4\pi\alpha}{q^2} \right)^2 \frac{2(p \cdot k)(p \cdot k') + \frac{1}{2}q^2 m_\pi^2}{8\pi^2 (p + k)^2} \quad (6.17)$$

Valutiamo ora questa scrittura nel limite ad alta energia  $|\vec{p}| \simeq |\vec{p}'| \simeq E$  e ponendo, come già visto:

$$k = (E, \vec{p}) \quad k' = (E, \vec{p}') \quad p = (E, -\vec{p}) \quad p' = (E, -\vec{p}')$$

Si ha:

$$\begin{aligned} 2p \cdot k &\simeq (p + k)^2 = s \simeq 4E^2 \\ 2p \cdot k' &\simeq -(p - k')^2 = -u \simeq 2E^2(1 + \cos \theta) \\ q^2 &= (k - k')^2 = t \simeq -2E^2(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

che possiamo usare per riscrivere la sezione d'urto di Eq. (6.17) in forma invariante come:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} = \frac{16\pi^2 \alpha^2}{4E^4(1 - \cos \theta)^2} \frac{4E^4(1 + \cos \theta)}{32\pi^2 E^2} = \frac{\alpha^2}{2E^2} \frac{1 + \cos \theta}{(1 - \cos \theta)^2} \quad (6.18)$$

$$= -\alpha^2 \frac{u}{t^2} \quad (6.19)$$

Attraverso  $d\Omega = 2\pi d(\cos \theta)$ , Eq. 6.18 può anche essere riscritta in funzione dell'angolo di scattering  $\theta$  e dell'energia del centro di massa  $E$  come:

$$\frac{d\sigma}{d(\cos \theta)} = \frac{\pi\alpha^2}{E^2} \frac{1 + \cos \theta}{(1 - \cos \theta)^2} \quad (6.20)$$

## 6.2 Scattering $e^+ \pi^+$

Consideriamo ora il caso dello scattering elastico  $e^+ + \pi^+ \rightarrow e^+ + \pi^+$ , dove rispetto al caso studiato in sezione 6.1 l'elettrone è sostituito dal positrone, ossia la sua antiparticella. Il nuovo vertice  $e^+ \gamma e^+$  potrebbe essere calcolato in modo analogo a quanto fatto per il vertice di figura 6.1, con la sola differenza che gli operatori coinvolti sono ora  $\hat{d}_s^\dagger(p)$  e  $\hat{d}_s^\dagger(p')$ . Risulta però più immediato ricordare l'interpretazione delle antiparticelle come

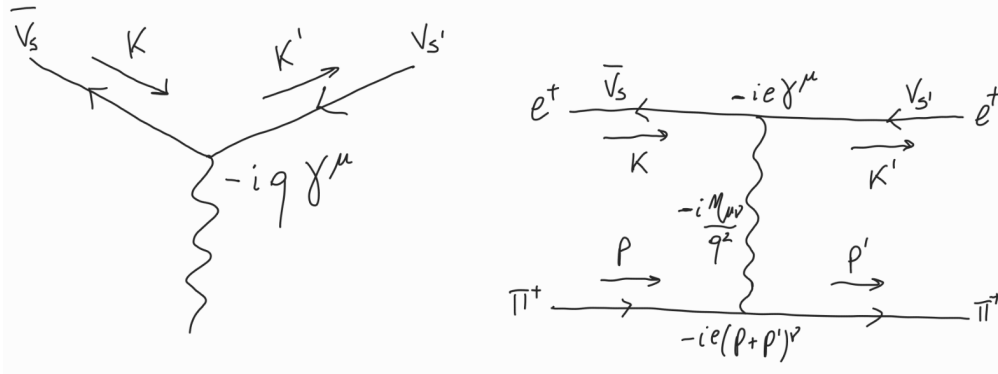


Figure 6.4: Vertice di interazione tra fotone e positroni (sinistra) e diagramma di Feynman per lo scattering pione-positrone (destra).

soluzioni ad energia negativa con opposti valori di impulso e spin. Così facendo troviamo che il vertice della corrente di transizione elettromagnetica di Eq. 6.7, per il caso di un positrone di quadri-impulso  $k$  e spin  $s$  che va in uno stato finale con quadri-impulso  $k'$  e spin  $s'$ , diventa:

$$\bar{v}(k, s)(-ie\gamma^\mu)v(k', s')$$

Cioè, un positrone entrante viene trattato come un elettrone uscente, avente lo stesso impulso  $k$  e stesso spin  $s$  ma carica opposta; ad esso è associato lo spinore  $\bar{v}(k, s)$ . Analogamente al positrone uscente con impulso  $k'$  e spin  $s'$  associamo un elettrone entrante di spinore  $v(k', s')$ . Questo viene riportato anche nella rappresentazione diagrammatica del pannello di sinistra di Fig. 6.4.

Trovata la regola per il vertice del positrone, la sezione d'urto per il processo  $e^+\pi^+ \rightarrow e^+\pi^+$  (rappresentato nel pannello di destra di Fig. 6.4) si calcola in modo analogo a quella per il processo  $e^-\pi^+ \rightarrow e^-\pi^+$ , sfruttando le proprietà di Eq. (6.14) e la tecnica della traccia per il calcolo di  $L^{\mu\nu}$ . Così facendo si ottiene lo stesso risultato determinato per il processo coinvolgente l'elettrone:

$$\frac{d\sigma}{d(\cos\theta)} = \frac{\pi\alpha^2}{E^2} \frac{1 + \cos\theta}{(1 - \cos\theta)^2}.$$

Infatti pur avendo carica opposta nell'accoppiamento, essa compare all'interno del modulo quadro dell'ampiezza di scattering  $\mathcal{M}$  e quindi il segno si cancella.

### 6.3 Propagatore dell'elettrone

Come già visto nella sezione 5.2 per il caso scalare, è possibile unire i vertici elementari delle interazioni elettromagnetiche in modo da avere un elettrone che compaia come particella interna nel diagramma di Feynman. Nel caso dello scattering Compton tra fotone ed elettrone  $\gamma(k) + e^-(p) \rightarrow \gamma(k') + e^-(p')$ , i contributi all'ordine  $\alpha$ , cioè all'ordine più basso, sono rappresentati dai diagrammi di Feynman di Fig. 6.5. È da notare



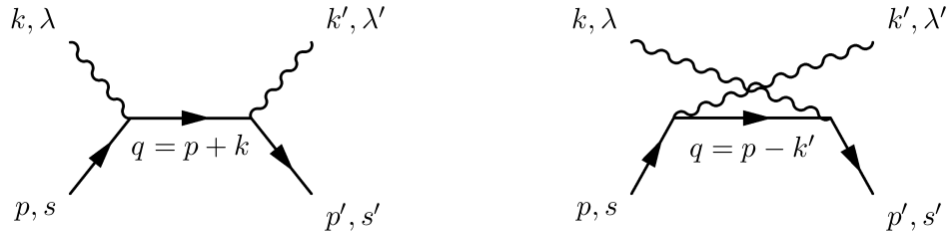


Figure 6.5: Diagrammi di Feynman per lo scattering Compton sugli elettroni.

che non compare in questo caso un termine di contatto in quanto esso non compare nell'hamiltoniana di interazione per le particelle di Dirac di Eq. (6.2).

Conosciamo le regole di Feynman per tutti gli elementi di questi diagrammi, tranne il fattore da associare alla linea interna, ovvero il **propagatore dell'elettrone**. Questa linea interna è associata al campo  $\Psi$ , soluzione dell'equazione di Dirac interagente con il campo del fotone  $A^\mu$ , Eq. (2.108):

$$(i\cancel{\partial} - m)\Psi = -e\cancel{A}\Psi$$

Come nella sezione 5.2, poniamo:

$$J = -e\cancel{A}\Psi \sim e^{-iq \cdot x}$$

con  $q = k + p$ , in modo da scrivere la soluzione formale di Eq. (2.108):

$$\Psi = \frac{1}{\cancel{q} - m} J \quad (6.21)$$

Infatti è facile vedere che:

$$(i\cancel{\partial} - m)\Psi = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \frac{1}{\cancel{q} - m} J = (\cancel{q} - m) \frac{1}{\cancel{q} - m} J = -e\cancel{A}\Psi$$

essendo ovviamente  $\partial_\mu J = -iq_\mu J$ . In analogia con quanto fatto per il propagatore del pione, aggiungiamo quindi alle già note regole i-viii la nuova regola:

- ix Associare un fattore  $i/(\cancel{q} - m)$  ad ogni linea interna di particella di spin  $1/2$  con quadri-impulso  $q$ .

Per mantenere uniformità nella scrittura dei propagatori e non avere un'espressione che include una divisione per la matrice  $\cancel{q}$ , notiamo che:

$$\cancel{q}\cancel{q} = q_\mu \gamma^\mu q_\nu \gamma^\nu = q_\mu q_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = q_\mu q_\nu (-\gamma^\nu \gamma^\mu + 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}) = -\cancel{q}\cancel{q} + 2q^2$$

cioè:

$$\cancel{q}\cancel{q} = q^2 \mathbb{1}$$

da cui possiamo scrivere:

$$(\not{q} - m)(\not{q} + m) = q^2 - m^2$$

ed ottenere pertanto il propagatore fermionico nella forma:

$$\frac{i}{\not{q} - m} = i \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2}$$

## 6.4 Regole di Feynman: particelle di spin $\frac{1}{2}$

In aggiunta alle regole riassunte nella sezione 5.7, condensiamo nella lista 6.6 le regole di Feynman per l'elettrodinamica di particelle con spin  $\frac{1}{2}$ .

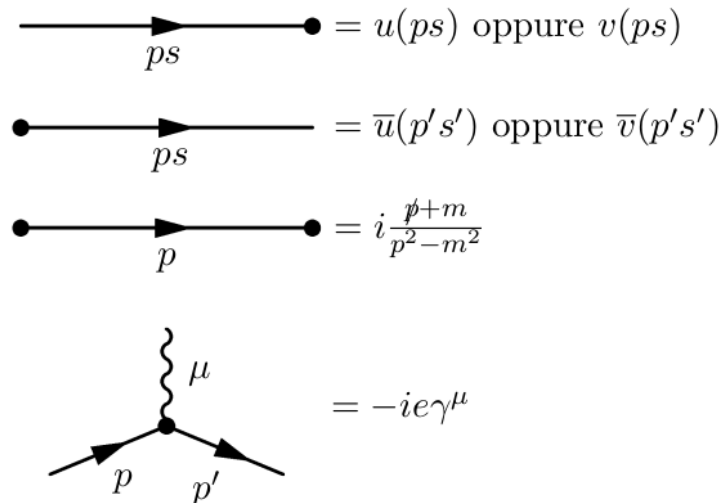


Figure 6.6: Riassunto regole di Feynman per fermioni in elettrodinamica.

Per ogni **linea entrante** bisogna includere lo spinore  $u(p, s)$  per i fermioni oppure  $v(p, s)$  per antifermioni. Viceversa, ad ogni **linea uscente** associamo lo spinore  $\bar{u}(p', s')$  oppure  $\bar{v}(p', s')$  a seconda della natura della particella. E' da ricordare che nel caso di antifermione è necessario (come prima operazione) cambiare il verso della linea (che si considererebbe nel caso di un fermione) con il verso opposto. Ad ogni **linea interna** di particella di spin  $\frac{1}{2}$  e quadri-impulso  $p$  associamo il propagatore  $i(\not{p} + m)/(p^2 - m^2)$ . Infine, per un **vertice fermione-fotone-fermione** coinvolgente una particella di spin  $\frac{1}{2}$  e carica  $+e$  includiamo il fattore di accoppiamento  $-ie\gamma^\mu$ .

Siamo quindi ora in grado di calcolare la sezione d'urto di qualsiasi processo elettromagnetico che coinvolge particelle di spin 0, spin  $\frac{1}{2}$  e fotoni, al prim'ordine perturbativo!

## 6.5 Scattering Compton sugli elettroni

Consideriamo più nel dettaglio il processo  $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$ , i cui corrispondenti diagrammi di Feynman sono mostrati in Fig. 6.5. Le rispettive ampiezze di scattering sono:

$$\mathcal{M}_{\gamma e}^{(d)} = \bar{u}(p', s') (ie\gamma^\mu) \epsilon_\mu^*(k', \lambda') i \frac{\not{p} + \not{k} + m}{(p+k)^2 - m^2} (ie\gamma^\nu) \epsilon_\nu(k, \lambda) u(p, s) \quad (6.22)$$

$$\mathcal{M}_{\gamma e}^{(e)} = \bar{u}(p', s') (ie\gamma^\nu) \epsilon_\nu(k, \lambda) i \frac{\not{p} - \not{k}' - m}{(p-k')^2 - m^2} (ie\gamma^\mu) \epsilon_\mu^*(k', \lambda') u(p, s) \quad (6.23)$$

con l'ampiezza di scattering totale  $\mathcal{M}_{\gamma e}$  rappresentata dalla somma delle due ampiezze. Si può verificare che tale somma è effettivamente gauge invariante, ovvero risulta nulla se si sostituisce  $\epsilon$  con il quadri-impulso  $k$ . La sezione d'urto non polarizzata del processo è dunque:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} = \frac{1}{4} \sum_{\substack{s, s' \\ \lambda, \lambda'}} \frac{|\mathcal{M}_{\gamma e}^{(d)} + \mathcal{M}_{\gamma e}^{(e)}|^2}{64\pi^2 s}$$

data dalla media sugli stati di spin iniziali (2 per l'elettrone e 2 per il fotone) e dalla somma sugli stati finali. La sommatoria sarà d'ora in poi indicata come  $\sum_{\text{spin}}$  per brevità di notazione. Il fattore di ampiezza di scattering è quindi dato da tre termini:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_{\gamma e}^{(d)} + \mathcal{M}_{\gamma e}^{(e)}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} \left[ |\mathcal{M}_{\gamma e}^{(d)}|^2 + |\mathcal{M}_{\gamma e}^{(e)}|^2 + 2\text{Re}(\mathcal{M}_{\gamma e}^{(d)} \mathcal{M}_{\gamma e}^{(e)*}) \right]$$

che calcoliamo separatamente. Iniziamo dal primo:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_{\gamma e}^{(d)}|^2 = \frac{e^4}{4(s-m^2)^2} \sum_{\text{spin}} \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu \bar{u}' \gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\nu u \epsilon'_\rho \epsilon_\sigma^* \bar{u} \gamma^\sigma (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\rho u'$$

La somma sulle polarizzazioni del fotone può essere rimpiazzata dalla metrica:

$$\sum_{\lambda} \epsilon_\mu(\lambda) \epsilon_\nu^*(\lambda) \rightarrow -\eta_{\mu\nu} \quad (6.24)$$

Dimostriamolo considerando per esempio un fotone che si muove lungo l'asse  $z$ ,  $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ , e scrivendo le polarizzazioni (trasverse) attraverso:

$$\epsilon_{\lambda_1}^\mu = (0, 1, 0, 0) \quad ; \quad \epsilon_{\lambda_2}^\mu = (0, 0, 1, 0) ,$$

da cui si ottiene:

$$\sum_{\lambda} \epsilon_\mu(\lambda) \epsilon_\nu^*(\lambda) \mathcal{M}^\mu \mathcal{M}^{\nu*} = |\mathcal{M}^1|^2 + |\mathcal{M}^2|^2 \quad (6.25)$$

Dall'identità di Ward di Eq. (5.48), sappiamo che  $k_\mu \mathcal{M}^\mu = 0$ , cioè  $k\mathcal{M}^0 - k\mathcal{M}^3 = 0$  e quindi  $\mathcal{M}^0 = \mathcal{M}^3$ . Possiamo quindi riscrivere Eq. 6.25 come: <sup>1</sup>

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu(\lambda) \epsilon_\nu^*(\lambda) \mathcal{M}^\mu \mathcal{M}^{\nu*} = |\mathcal{M}^1|^2 + |\mathcal{M}^2|^2 + |\mathcal{M}^3|^2 - |\mathcal{M}^0|^2 = -\eta_{\mu\nu} \mathcal{M}^\mu \mathcal{M}^{\nu*} \quad (6.27)$$

Grazie ad Eq. (6.24) otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_{\gamma e}^{(d)}|^2 &= \frac{e^4}{4(s-m^2)^2} \sum_{s,s'} \eta_{\rho\mu} \eta_{\nu\sigma} \bar{u}' \gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\nu u \bar{u} \gamma^\sigma (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\rho u' \\ &= \frac{e^4}{4(s-m^2)^2} \sum_{s,s'} \bar{u}' \gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\nu u \bar{u} \gamma_\nu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma_\mu u' \\ &= \frac{e^4}{4(s-m^2)^2} \sum_{s,s'} \bar{u}'_\alpha \gamma^\mu_{\alpha\beta} (\not{p} + \not{k} + m)_{\beta\gamma} \gamma^\nu_{\gamma\delta} u_\delta \bar{u}_\epsilon (\gamma_\nu)_{\epsilon\eta} (\not{p} + \not{k} + m)_{\eta\rho} (\gamma_\rho)_{\rho\sigma} u'_\sigma \end{aligned}$$

Riordinando questi elementi di matrice per poter usare le proprietà di Eq. (6.14):

$$\begin{aligned} \sum_{s'} u'_\sigma \bar{u}'_\alpha &= (\not{p}' + m)_{\sigma\alpha} \\ \sum_s u_\delta \bar{u}_\epsilon &= (\not{p} + m)_{\delta\epsilon} \end{aligned}$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_{\gamma e}^{(d)}|^2 &= \frac{e^4}{4(s-m^2)^2} (\gamma_\mu)_{\rho\sigma} (\not{p}' + m)_{\sigma\alpha} \gamma^\mu_{\alpha\beta} (\not{p} + \not{k} + m)_{\beta\gamma} \gamma^\nu_{\gamma\delta} (\not{p} + m)_{\delta\epsilon} (\gamma_\nu)_{\epsilon\eta} (\not{p} + \not{k} + m)_{\eta\rho} \\ &= \frac{e^4}{4(s-m^2)^2} \text{Tr} \left[ \gamma_\mu (\not{p}' + m) \gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\nu (\not{p} + m) \gamma_\nu (\not{p} + \not{k} + m) \right] \end{aligned}$$

che, ponendoci nel limite ad alte energie che ci permette di trascurare le masse degli elettroni, diventa:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_{\gamma e}^{(d)}|^2 = \frac{e^4}{4s^2} \text{Tr} \left[ \gamma_\mu \not{p}' \gamma^\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\nu \not{p} \gamma_\nu (\not{p} + \not{k}) \right] \quad (6.28)$$

<sup>1</sup>In generale si può vedere che vale la relazione covariante (per vettori di polarizzazione di fotoni reali):

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu(\lambda) \epsilon_\nu^*(\lambda) = -\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{(k \cdot n)^2} [k_\mu k_\nu - (k \cdot n)(k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu)] \quad (6.26)$$

dove  $n^\mu = (1, \vec{0})$ . Nel caso di fotone che si muove lungo l'asse  $z$ , si possono utilizzare le espressioni esplicite di  $\epsilon^\mu$  introdotte in sezione 4.3 per il caso di polarizzazione circolare (Eq. 4.20) e verificare la relazione. I termini proporzionale a  $k^\mu$ ,  $k^\nu$  danno un contributo nullo all'ampiezza di scattering in virtù dell'identità di Ward.

Analogamente il secondo termine di ampiezza di scattering è:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_{\gamma e}^{(e)}|^2 &= \frac{e^4}{4u^2} \sum_{\text{spin}} \epsilon'_{\mu}{}^* \epsilon_{\nu} \epsilon'_{\rho} \epsilon_{\sigma}{}^* \bar{u}' \gamma^{\nu} (\not{p} - \not{k}') \gamma^{\mu} u \bar{u} \gamma^{\rho} (\not{p} - \not{k}') \gamma^{\sigma} u' \\ &= \frac{e^4}{4u^2} \sum_{s,s'} \bar{u}' \gamma^{\nu} (\not{p} - \not{k}') \gamma^{\mu} u \bar{u} \gamma_{\mu} (\not{p} - \not{k}') \gamma_{\nu} u' \end{aligned}$$

da cui:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_{\gamma e}^{(e)}|^2 = \frac{e^4}{4u^2} \text{Tr} \left[ \gamma_{\nu} \not{p}' \gamma^{\nu} (\not{p} - \not{k}') \gamma^{\mu} \not{p} \gamma_{\mu} (\not{p} - \not{k}') \right] \quad (6.29)$$

Chiaramente ottenibile dalla (6.28) scambiando di posto  $\mu$  con  $\nu$  e sostituendo  $k$  con  $-k'$ . Infine, il termine di interferenza è:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} \mathcal{M}_{\gamma e}^{(d)} \mathcal{M}_{\gamma e}^{(e)*} &= \frac{e^4}{4su} \sum_{\text{spin}} \epsilon'_{\mu}{}^* \epsilon_{\nu} \bar{u}' \gamma^{\mu} (\not{p} + \not{k}) \gamma^{\nu} u \epsilon'_{\rho} \epsilon_{\sigma}{}^* \bar{u} \gamma^{\rho} (\not{p} - \not{k}') \gamma^{\sigma} u' \\ &= \frac{e^4}{4u^2} \sum_{s,s'} \bar{u}' \gamma^{\mu} (\not{p} + \not{k}) \gamma^{\nu} u \bar{u} \gamma_{\mu} (\not{p} - \not{k}') \gamma_{\nu} u' \end{aligned}$$

ovvero:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} \mathcal{M}_{\gamma e}^{(d)} \mathcal{M}_{\gamma e}^{(e)*} = \frac{e^4}{4su} \text{Tr} \left[ \gamma_{\nu} \not{p}' \gamma^{\mu} (\not{p} + \not{k}) \gamma^{\nu} \not{p} \gamma_{\mu} (\not{p} - \not{k}') \right] \quad (6.30)$$

Al fine di semplificare le tracce di Eqs. (6.28), (6.29), (6.30) usiamo la relazione  $\gamma_{\mu} \not{a} \gamma^{\mu} = -2\not{a}$ . Dimostriamola:

$$\gamma_{\mu} \not{a} \gamma^{\mu} = \gamma_{\mu} a_{\nu} \gamma^{\nu} \gamma^{\mu} = a_{\nu} \gamma_{\mu} (-\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} + 2\eta^{\mu\nu}) = -4a_{\nu} \gamma^{\nu} + 2a_{\nu} \gamma^{\nu} = -2\not{a}$$

essendo  $\gamma_{\mu} \gamma^{\mu} = 4\mathbb{1}$ . Usando questa relazione e ricordando di aver imposto il limite di alta energia, per cui  $\not{p}^2 = p^2 \simeq 0$ , Eq. (6.28) diventa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_{\gamma e}^{(d)}|^2 &= \frac{e^4}{4s^2} \text{Tr} \left[ -2\not{p}' (\not{p} + \not{k}) (-2\not{p}) (\not{p} + \not{k}) \right] = \frac{e^4}{s^2} \text{Tr} (\not{p}' \not{k} \not{p} \not{k}) \\ &= \frac{8e^4}{s^2} (p' \cdot k) (p \cdot k) = \frac{2e^4}{s^2} 2(p' \cdot k) 2(p \cdot k) = -2e^4 \frac{u}{s} \end{aligned}$$

Analogamente, Eq. (6.29) si riscrive come:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_{\gamma e}^{(e)}|^2 &= \frac{e^4}{u^2} \text{Tr} \left[ \not{p}' (\not{p} - \not{k}') \not{p} (\not{p} - \not{k}') \right] = -\frac{e^4}{u^2} \text{Tr} (\not{p}' \not{k}' \not{p} \not{k}') \\ &= -2\frac{e^4}{u^2} 2(p' \cdot k') 2(p \cdot k') = -2e^4 \frac{s}{u} \end{aligned}$$

Usando  $\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu = -2 \not{c} \not{b} \not{a}$  e  $\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu = 4a \cdot b \mathbb{1}$ , vediamo che il termine di interferenza di Eq. (6.30):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} \mathcal{M}_{\gamma e}^{(d)} \mathcal{M}_{\gamma e}^{(e)*} &= \frac{e^4}{4su} (-2) \text{Tr} \left[ \gamma_\nu \not{p}' \not{p} \gamma^\nu (\not{p} + \not{k})(\not{p} - \not{k}') \right] = -\frac{2e^4}{su} (p \cdot p') \text{Tr} \left[ (\not{p} + \not{k})(\not{p} - \not{k}') \right] \\ &= -\frac{2e^4}{su} (p \cdot p') \text{Tr}(\not{k} \not{p} - \not{p} \not{k}) = 0 \end{aligned}$$

non dà alcun contributo. In alternativa si può osservare che:

$$\text{Tr} \left[ (\not{p} + \not{k})(\not{p} - \not{k}') \right] = \text{Tr}(-\not{p}' \not{k} + \not{k} \not{p} - \not{k} \not{k}') = 2(-2p \cdot k' + 2p \cdot k - 2k \cdot k') = 2(u + s + t)$$

è nullo ad alte energie in virtù di Eq. (C.6).

Da questi risultati otteniamo:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_{\gamma e}|^2 = -2e^4 \left( \frac{u}{s} + \frac{s}{u} \right) \quad (6.31)$$

da cui la sezione d'urto:

$$\frac{d\sigma}{2\pi d(\cos\theta)} = \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} \frac{|\mathcal{M}_{\gamma e}|^2}{64\pi^2 s} = -\frac{2e^4}{64\pi^2 s} \left( \frac{u}{s} + \frac{s}{u} \right) = -\frac{\alpha^2}{2s} \left( \frac{u}{s} + \frac{s}{u} \right)$$

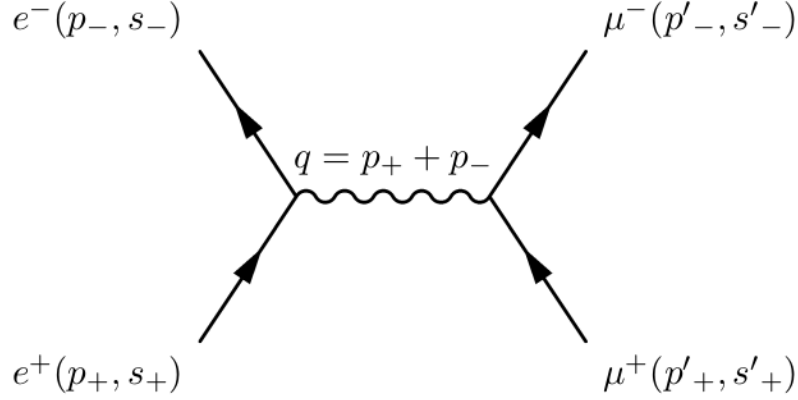
cioè:

$$\frac{d\sigma}{d(\cos\theta)} = -\frac{\pi\alpha^2}{s} \left( \frac{u}{s} + \frac{s}{u} \right) \quad (6.32)$$

## 6.6 Sezione d'urto per il processo $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$

Consideriamo in questa sezione il processo in cui una coppia elettrone-positrone si annichila per dare origine ad un'altra coppia di particella e antiparticella di Dirac, in questo caso  $\mu^-$  e  $\mu^+$ . Al prim'ordine perturbativo, un singolo diagramma di Feynman, rappresentato in Fig. 6.7, contribuisce a questo processo. Utilizzando le regole di Feynman, la corrispondente ampiezza di scattering è data da:

$$\mathcal{M}_{e^- e^+} = \bar{v}(p_+, s_+) (ie\gamma^\mu) u(p_-, s_-) \left( -i \frac{\eta_{\mu\nu}}{q^2} \right) \bar{u}(p'_-, s'_-) (ie\gamma^\nu) v(p'_+, s'_+) \quad (6.33)$$


 Figure 6.7: Diagramma di Feynman del processo  $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ .

mentre la somma/media sugli stati di spin finali/iniziali del suo modulo quadro risulta essere:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_{e^+e^-}|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} \frac{e^4}{s^2} \bar{v} \gamma^\mu u \bar{u}' \gamma_\mu v' \bar{v}' \gamma_\nu u' \bar{u} \gamma^\nu v \\
 &= \frac{e^4}{4s^2} \sum_{\text{spin}} \bar{v}_\alpha \gamma_{\alpha\beta}^\mu u_\beta \bar{u}'_\gamma (\gamma_\mu)_{\gamma\delta} v'_\delta \bar{v}'_\epsilon (\gamma_\nu)_{\epsilon\eta} u'_\eta \bar{u}_\rho \gamma_{\rho\sigma}^\nu v_\sigma \\
 &= \frac{e^4}{4s^2} \sum_{\text{spin}} v_\sigma \bar{v}_\alpha \gamma_{\alpha\beta}^\mu u_\beta \bar{u}_\rho \gamma_{\rho\sigma}^\nu v'_\delta \bar{v}'_\epsilon (\gamma_\nu)_{\epsilon\eta} u'_\eta \bar{u}'_\gamma (\gamma_\mu)_{\gamma\delta} \\
 &= \frac{e^4}{4s^2} \sum_{\text{spin}} \text{Tr} \left[ (\not{p}_+ - m) \gamma^\mu (\not{p}_- + m) \gamma^\nu \right] \text{Tr} \left[ (\not{p}'_+ - m) \gamma_\nu (\not{p}'_- + m) \gamma_\mu \right].
 \end{aligned}$$

Nel limite di alte energie si ha:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_{e^+e^-}|^2 &= \frac{e^4}{4s^2} \sum_{\text{spin}} \text{Tr}(\not{p}_+ \gamma^\mu \not{p}_- \gamma^\nu) \text{Tr}(\not{p}'_+ \gamma_\nu \not{p}'_- \gamma_\mu) \\
 &= \frac{e^4}{4s^2} 16(p_+^\mu p_-^\nu + p_+^\nu p_-^\mu - \eta^{\mu\nu} p_+ \cdot p_-)(p_+^\mu p_-^\nu + p_+^\nu p_-^\mu - \eta^{\mu\nu} p_+ \cdot p_-) \\
 &= \frac{4e^4}{s^2} [2(p_+ \cdot p'_+)(p_- \cdot p'_-) + 2(p_+ \cdot p'_-)(p_- \cdot p'_+) + 4(p_+ \cdot p_-)(p'_+ \cdot p'_-) + \\
 &\quad - 4(p_+ \cdot p_-)(p'_+ \cdot p'_-)] \\
 &= \frac{4e^4}{s^2} [2(p_+ \cdot p'_+)(p_- \cdot p'_-) + 2(p_+ \cdot p'_-)(p_- \cdot p'_+)]
 \end{aligned}$$

Usando le variabili di Mandelstam (C.2):

$$2p_+ \cdot p'_+ = 2p_- \cdot p'_- = -t \quad ; \quad 2p_+ \cdot p'_- = 2p_- \cdot p'_+ = -u$$

si ottiene:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_{e^+e^-}|^2 = \frac{2e^4}{s^2} (t^2 + u^2)$$

Abbiamo già visto come nel sistema del baricentro valgano:

$$t = -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta) \quad , \quad u = -\frac{s}{2}(1 + \cos \theta) \quad , \quad t^2 + u^2 = \frac{s^2}{2}(1 + \cos^2 \theta) \quad ,$$

il che permette di scrivere la sezione d'urto in questo sistema di riferimento come:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2 \theta) \tag{6.34}$$

la quale, integrata su tutto l'angolo solido, diventa:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad .$$



# Appendix A

## Unità naturali

Per quanto riguarda l'elettromagnetismo utilizziamo il sistema di Heavyside-Lorenz, per cui cariche e correnti non sono grandezze dimensionalmente indipendenti. I tipi indipendenti di grandezze sono dunque la lunghezza  $[L]$ , il tempo  $[t]$ , la massa  $[M]$  e, se consideriamo anche la termodinamica e la meccanica statistica - la temperatura  $[T]$ . In natura esistono delle costanti dimensionali universali, riportate nella tabella A.1. Usualmente vengono definite come “unità naturali” quelle in cui si pone  $c = 1$  e  $\hbar = 1$ . Dire che la velocità della luce è una grandezza unitaria adimensionale implica che le unità di lunghezza e tempo sono equivalenti:

$$[L] = [t] . \quad (\text{A.1})$$

Di conseguenza, si ha anche

$$[E] = [\vec{p}] = [M] . \quad (\text{A.2})$$

Queste relazioni sono consistenti con la relazione relativistica tra energia, impulso e massa che per  $c = 1$  diviene

$$E^2 = (\vec{p})^2 + m^2 . \quad (\text{A.3})$$

Per una forza si ha  $[F] = [ML^{-1}]$ .

Una quantità, come  $\hbar$ , che ha le dimensioni di un'azione, cioè  $[Et]$ , quando  $c = 1$  ha

$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$	$[c] = [Lt^{-1}]$
$\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ J s}$	$[\hbar] = [Et] = [ML^2t^{-1}]$
$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ Kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$	$[G] = [L^3M^{-1}t^{-2}]$
$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$	$[k] = [ET^{-1}] = [ML^2t^{-2}T^{-1}]$

Table A.1: Le costanti universali dimensionali: la velocità della luce  $c$ , la costante di Planck  $\hbar$ , la costante di gravitazione universale  $G$ , la costante di Boltzmann  $k$ .

dimensione  $[ML]$ . Dunque, porre  $\hbar = 1$  richiede che le azioni siano adimensionali e quindi che

$$[M] = [L^{-1}] . \quad (\text{A.4})$$

Usando le unità naturali che valgono sia in (A.1) e in (A.4). Si ha pertanto, oltre alla temperatura<sup>1</sup>, un solo tipo di grandezza indipendente, che possiamo scegliere essere la lunghezza. In questo modo

$$[t] = [L] , \quad [E] = [\vec{p}] = [m] = [L^{-1}] , \quad [F] = [L^{-2}] . \quad (\text{A.5})$$

**Ripristinare le unità fisiche** Le unità naturali sono molto pratiche e comode in un contesto relativistico e quantistico. Per ottenere però espressioni nel sistema internazionale con le convenzioni di Heavyside-Lorenz (HL), al fine di effettuare predizioni confrontabili con le misure sperimentali, è necessario reintrodurre le opportune potenze di  $c$  e  $\hbar$ . Ciò è molto semplice da fare utilizzando l'analisi dimensionale. Nel S.I. si ha  $[c] = [L t^{-1}]$  e  $[\hbar] = [E t] = [M L^2 t^{-1}]$ , pertanto

$$[\hbar^\alpha c^\beta] = [M^\alpha L^{2\alpha+\beta} t^{-\alpha-\beta}] . \quad (\text{A.6})$$

Data una quantità espressa nel sistema naturale, la moltiplichiamo per  $\hbar^\alpha c^\beta$  e fissiamo  $\alpha$  e  $\beta$  in modo che essa assuma le dimensioni che le competono nel sistema internazionale A.1.

**Consideriamo un esempio** La *costante di struttura fine*  $\alpha$  è una quantità adimensionale che, come vedremo, caratterizza la forza dell'accoppiamento elettromagnetico delle particelle di carica  $e$ . Lavorando nel sistema naturale si trova

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} . \quad (\text{A.7})$$

Notiamo che nel sistema HL la dimensionalità della carica è tale che  $[e^2] = [F L^2]$ . In unità naturali la carica è quindi adimensionale, come segue dalla (A.5), e questa espressione di  $\alpha$  è dimensionalmente consistente. Nel sistema di HL avremo

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \hbar^\alpha c^\beta , \quad (\text{A.8})$$

con  $\alpha, \beta$  tali da rendere  $\alpha$  adimensionale. Dobbiamo dunque avere

$$\begin{aligned} 1 = [\alpha] &= [e^2] [\hbar^\alpha c^\beta] = [F L^2 M^\alpha L^{2\alpha+\beta} t^{-\alpha-\beta}] \\ &= [M^{\alpha+1} L^{2\alpha+\beta+3} t^{-2-\alpha-\beta}] , \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

<sup>1</sup>E' possibile, ma non rilevante per questo corso, porre  $k = 1$  in modo tale che la temperatura abbia le stesse dimensioni di un'energia.

il che impone  $\alpha = \beta = -1$ . Dunque nel sistema di HL abbiamo

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi \hbar c} . \quad (\text{A.10})$$

Ricordando che nel sistema di HL si ha  $e = 5.4 \times 10^{-14} \text{ N}^{1/2} \text{ m}$  ed usando i valori delle costanti  $\hbar$  e  $c$  dati nella tabella A.1, si ottiene

$$\alpha \sim \frac{1}{137} . \quad (\text{A.11})$$

**Consideriamo un altro esempio** La costante di gravitazione universale  $G$  compare nella legge di Newton ed ha pertanto le dimensioni indicate nella tabella A.1. In unità naturali, le sue dimensioni sono semplicemente

$$[G] = [L^2] . \quad (\text{A.12})$$

Possiamo dunque definire la costante universale  $L_P$ . detta “Lunghezza di Planck”, ponendo

$$L_P^2 = G . \quad (\text{A.13})$$

La lunghezza di Planck rappresenta la scala di lunghezza alla quale si presume diventino rilevanti gli effetti della gravità quantistica. Quale è il valore di  $L_P$  nel sistema internazionale? Poniamo

$$L_P^2 = G \hbar^\alpha c^\beta , \quad (\text{A.14})$$

con  $\alpha$  e  $\beta$  tali che il membro di destra abbia le dimensioni di una lunghezza quadra, cioè tali che

$$[L^2] = [M^{\alpha-1} L^{3+2\alpha+\beta} t^{-2-\alpha-\beta}] . \quad (\text{A.15})$$

Questa condizione impone  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -3$ , così che nel sistema internazionale si ha

$$L_P^2 = \frac{G\hbar}{c^3} . \quad (\text{A.16})$$

Sostituendo i valori delle costanti  $G$ ,  $c$  ed  $\hbar$  si trova che la lunghezza di Planck è strabliantemente piccola:  $L_P \sim 1.5 \times 10^{-35} \text{ m}$ .

A parte i richiami iniziali e, salvo in casi particolari, in queste dispense sono sempre utilizzate le unità naturali.

## Appendix B

# Oscillatore armonico - metodo algebrico

Calcoliamo spettro di energia e stati quantistici associati dell'oscillatore armonico avente hamiltoniana 3.12 usando il metodo operatoriale di Dirac. Introducendo gli operatori:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{m\omega} \hat{q} + \frac{i}{\sqrt{m\omega}} \hat{p} \right) \quad (\text{B.1})$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{m\omega} \hat{q} - \frac{i}{\sqrt{m\omega}} \hat{p} \right) \quad (\text{B.2})$$

possiamo riscrivere l'hamiltoniana come:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) \omega = \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \omega \quad (\text{B.3})$$

La seconda uguaglianza è ottenibile usando la relazione di commutazione:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (\text{B.4})$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \hat{a} \hat{a}^\dagger &= \frac{1}{2} \left( m\omega \hat{q}^2 - i\hat{q}\hat{p} + i\hat{p}\hat{q} + \frac{\hat{p}^2}{m\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( m\omega \hat{q}^2 - i[\hat{q}, \hat{p}] + \frac{\hat{p}^2}{m\omega} \right) \\ &= \frac{\hat{H}}{\omega} + \frac{1}{2} \\ \hat{a}^\dagger \hat{a} &= \frac{1}{2} \left( m\omega \hat{q}^2 + i\hat{q}\hat{p} - i\hat{p}\hat{q} + \frac{\hat{p}^2}{m\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( m\omega \hat{q}^2 + i[\hat{q}, \hat{p}] + \frac{\hat{p}^2}{m\omega} \right) \\ &= \frac{\hat{H}}{\omega} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

nel seguito useremo anche le relazioni:

$$[\hat{H}, \hat{a}] = -\omega \hat{a} \quad ; \quad [\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \omega \hat{a}^\dagger \quad (\text{B.5})$$

di cui ad esempio dimostriamo la prima:

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{a}] &= \frac{1}{2}\omega[\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}] \\ &= \frac{1}{2}\omega\{[\hat{a}\hat{a}^\dagger, \hat{a}] + [\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}]\} \\ &= \frac{1}{2}\omega\{\hat{a}[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] + [\hat{a}, \hat{a}]\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger[\hat{a}, \hat{a}] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}]\hat{a}\} \\ &= \frac{1}{2}(-\hat{a} - \hat{a}) \\ &= -\omega\hat{a} \end{aligned}$$

Consideriamo ora uno stato  $|n\rangle$ , autostato di  $\hat{H}$  con energia  $E_n$ , cioè per cui valga l'equazione agli autovalori:

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$$

usando le relazioni di commutazione B.5 possiamo trovare l'energia degli stati  $\hat{a}^\dagger|n\rangle$  e  $\hat{a}|n\rangle$  come:

$$\begin{aligned} \hat{H}\hat{a}^\dagger|n\rangle &= (\omega\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{H})|n\rangle \\ &= (E_n + \omega)\hat{a}^\dagger|n\rangle \\ \hat{H}\hat{a}|n\rangle &= (-\omega\hat{a} + \hat{a}\hat{H})|n\rangle \\ &= (E_n - \omega)\hat{a}|n\rangle \end{aligned}$$

È dunque chiaro come gli operatori  $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{a}$  aumentino e diminuiscano rispettivamente l'energia dello stato di un quanto  $\hbar\omega$ ; poichè l'energia non può essere diminuita indefinitamente (infatti per l'oscillatore armonico l'energia potenziale, e quindi quella totale, è sempre non negativa) deve esistere uno **stato di energia minima**  $|0\rangle$  tale:

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \quad (\text{B.6})$$

L'energia di questo stato minimo è data da:

$$\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{2}\omega|0\rangle$$

Il primo stato eccitato è dato da  $|1\rangle = \hat{a}^\dagger|0\rangle$  e avrà energia  $(1 + \frac{1}{2})\omega$ ; lo stato n-esimo sarà invece ottenuto tramite  $(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$  e avrà energia  $(n + \frac{1}{2})\omega$ . Al fine di ottenere la corretta normalizzazione  $\langle n|n\rangle = 1$  poniamo:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle \quad (\text{B.7})$$

Abbiamo:

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = C_{n+1} |n+1\rangle$$

con gli stati  $|n\rangle$ ,  $|n+1\rangle$  correttamente normalizzati; si ha allora:

$$\begin{aligned} |C_{n+1}|^2 &= \langle n | \hat{a} \hat{a}^\dagger | n \rangle \\ &= \langle n | \left( \frac{\hat{H}}{\omega} + \frac{1}{2} \right) | n \rangle \\ &= n + 1 \end{aligned}$$

Analogamente abbiamo:

$$\hat{a} |n\rangle = C_{n-1} |n-1\rangle$$

per cui:

$$\begin{aligned} |C_{n-1}|^2 &= \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle \\ &= \langle n | \left( \frac{\hat{H}}{\omega} - \frac{1}{2} \right) | n \rangle \\ &= n \end{aligned}$$

Possiamo allora scrivere:

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (\text{B.8})$$

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (\text{B.9})$$

Inoltre vale:

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle &= \hat{a}^\dagger \sqrt{n} |n-1\rangle \\ &= \sqrt{n} \sqrt{n} |n\rangle \end{aligned}$$

ovvero:

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle \equiv \hat{n} |n\rangle = n |n\rangle \quad (\text{B.10})$$

dove l'operatore  $\hat{a}^\dagger \hat{a} \equiv \hat{n}$  è detto operatore numero.

Nel caso in cui il sistema fisico sia un insieme di  $N$  oscillatori armonici indipendenti, la lagrangiana diventa:

$$\hat{L} = \sum_{r=1}^N \left( \frac{1}{2} m \dot{\hat{q}}_r^2 - \frac{1}{2} m \omega_r^2 \hat{q}_r^2 \right)$$

con le relazioni di commutazione:

$$[\hat{q}_r, \hat{p}_s] = i\delta_{rs} \quad ; \quad [\hat{q}_r, \hat{q}_s] = [\hat{p}_r, \hat{p}_s] = 0$$

L'hamiltoniana diventa analogamente la somma di  $N$  hamiltoniane:

$$\hat{H} = \sum_{r=1}^N \left( \frac{\hat{p}_r^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_r^2 \hat{q}_r^2 \right) = \sum_{r=1}^N \left( \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r + \frac{1}{2} \right) \omega_r$$

così come l'energia totale diventa la somma di  $N$  energie  $E_r$ :

$$E = \sum_{i=1}^N \left( n_r + \frac{1}{2} \right) \omega_r$$

I corrispondenti autostati sono i prodotti  $|n_1\rangle|n_2\rangle\dots|n_N\rangle$  di  $N$  autostati di oscillatori indipendenti;  $|n_r\rangle$  contiene  $n_r$  unità discrete di eccitazione di frequenza  $\omega_r$ . Tali stati si indicano in genere come  $|n_1, n_2, \dots, n_n\rangle$ , e lo stato fondamentale è quello in cui tutti gli oscillatori sono nello stato non eccitato, ovvero  $|0, 0, \dots, 0\rangle \equiv |0\rangle$ , e per tale stato vale:

$$\hat{a}_r |0\rangle = 0 \quad , \forall r$$

Gli operatori  $\hat{a}_r^\dagger$  creano quanti di energia  $\hbar\omega_r$ , mentre gli operatori  $\hat{a}_r$  distruggono quanti di eguale energia; per questo motivo sono detti rispettivamente **operatore di creazione** e **di distruzione**.

## Appendix C

# Variabili di Mandelstam

In un processo di tipo  $1+2 \rightarrow 3+4$  come quello rappresentato in Fig. 5.7, i quadri-impulsi delle particelle coinvolte devono rispettare le condizioni di mass-shell:

$$p_1^2 = m_1^2 \quad ; \quad p_2^2 = m_2^2 \quad ; \quad p_3^2 = m_3^2 \quad ; \quad p_4^2 = m_4^2$$

e la conservazione di energia ed impulso:

$$p_1 + p_2 - p_3 - p_4 = 0$$

Per esprimere con maggiore agevolezza le caratteristiche di invarianza di questo processo possiamo introdurre le **variabili di Mandelstam**:

$$\begin{cases} s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\ t = (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2 \\ u = (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2 \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

È immediato notare come  $\sqrt{s}$  non sia altro che l'energia nel sistema di riferimento del centro di massa; infatti:

$$p_1^\mu + p_2^\mu = (E_1 + E_2, \vec{0}) \Rightarrow s = (E_1 + E_2)^2$$

Dalle definizioni delle variabili (C.1) discendono inoltre interessanti relazioni tra i prodotti dei quadri-impulsi; si ha infatti:

$$\begin{aligned} s &= m_1^2 + m_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 = m_3^2 + m_4^2 + 2p_3 \cdot p_4 \\ t &= m_1^2 + m_3^2 - 2p_1 \cdot p_3 = m_2^2 + m_4^2 - 2p_2 \cdot p_4 \\ u &= m_1^2 + m_4^2 - 2p_1 \cdot p_4 = m_2^2 + m_3^2 - 2p_2 \cdot p_3 \end{aligned}$$



dalle quali si ottiene rispettivamente:

$$\begin{cases} 2p_1 \cdot p_2 = s - m_1^2 - m_2^2 \\ 2p_3 \cdot p_4 = s - m_3^2 - m_4^2 \\ 2p_1 \cdot p_3 = m_1^2 + m_3^2 - t \\ 2p_2 \cdot p_4 = m_2^2 + m_4^2 - t \\ 2p_1 \cdot p_4 = m_1^2 + m_4^2 - u \\ 2p_2 \cdot p_3 = m_2^2 + m_3^2 - u \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Notiamo che:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + 2p_1 \cdot (p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \quad (\text{C.3})$$

$$= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \quad (\text{C.4})$$

$$(\text{C.5})$$

Di particolare interesse è anche la riduzione di quest'ultima proprietà alle alte energie, cioè con masse trascurabili:

$$s + t + u \simeq 0 \quad (\text{C.6})$$

Nel caso in cui  $m_1 = m_3$  e  $m_2 = m_4$  (cioè le particelle dello stato iniziale sono anche quelle dello stato finale), le espressioni di cui sopra si semplificano e in particolare otteniamo

$$\begin{cases} p_1 \cdot p_2 = p_3 \cdot p_4 \\ p_1 \cdot p_4 = p_2 \cdot p_3 \\ p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4 \quad \text{solo se } m_1 = m_2 \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

## Appendix D

# Proprietà della traccia delle matrici $\gamma$

In questa Appendice dimostriamo le proprietà della traccia delle matrici  $\gamma$  o dei loro prodotti, enunciate in Eq. (6.15):

$$\begin{cases} Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu} \\ Tr(\not{a}_1 \not{a}_2 \cdots \not{a}_n) = 0 & \text{per } n \text{ dispari} \\ Tr(\not{a}\not{b}) = 4a \cdot b \\ Tr(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c) - (a \cdot c)(b \cdot d)] \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

Innanzitutto è bene ricordare che lavoriamo in uno spazio quadridimensionale, da cui:

$$Tr\mathbb{1} = 4$$

Dimostriamo ora la prima di queste proprietà.

Dalla proprietà di anti-commutazione  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}$ , e usando l'invarianza della traccia di matrici per permutazioni cicliche, si ha:

$$\begin{aligned} Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= Tr(-\gamma^\nu \gamma^\mu + 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}) \\ &= -Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) + 2\eta^{\mu\nu}Tr(\mathbb{1}) \\ &= -Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) + 8\eta^{\mu\nu} \end{aligned}$$

da cui la proprietà in questione.

Per dimostrare la seconda è sufficiente sfruttare le proprietà delle matrici  $\gamma^5$ , in particolare l'identità  $\gamma^5 \gamma^5 = \mathbb{1}$  e  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ . Infatti:

$$\begin{aligned} Tr(\not{a}_1 \not{a}_2 \cdots \not{a}_n) &= Tr(\not{a}_1 \not{a}_2 \cdots \not{a}_n \gamma^5 \gamma^5) \\ &= Tr(\gamma^5 \not{a}_1 \not{a}_2 \cdots \not{a}_n \gamma^5) \\ &= (-1)^n Tr(\gamma^5 \gamma^5 \not{a}_1 \not{a}_2 \cdots \not{a}_n) \\ &= (-1)^n Tr(\not{a}_1 \not{a}_2 \cdots \not{a}_n) \end{aligned}$$

da cui segue chiaramente che la traccia del prodotto di un numero  $n$  dispari di matrici contenenti le matrici  $\gamma$  è nullo.

Per la terza proprietà vediamo che:

$$Tr(\not{a}\not{b}) = Tr(a_\mu\gamma^\mu b_\nu\gamma^\nu) = a_\mu b_\nu Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) = a_\mu b_\nu 4\eta^{\mu\nu} = 4a \cdot b .$$

Non è invece nel nostro interesse dimostrare esplicitamente la quarta proprietà; mostriamo però come valga il caso particolare:

$$Tr(\not{a}\gamma^\mu\not{b}\gamma^\nu) = 4[a^\mu b^\nu + a^\nu b^\mu - a \cdot b \eta^{\mu\nu}]$$

che usiamo nel calcolo di Eq. (6.16). Dalle proprietà di anticommutazione della matrici  $\gamma$  non è difficile dimostrare che:

$$Tr(\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu) = 4[\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu} + \eta^{\alpha\nu}\eta^{\mu\beta} - \eta^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}]$$

da cui:

$$\begin{aligned} Tr(\not{a}\gamma^\mu\not{b}\gamma^\nu) &= a_\alpha b_\beta Tr(\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu) \\ &= 4 a_\alpha b_\beta [\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu} + \eta^{\alpha\nu}\eta^{\mu\beta} - \eta^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}] \\ &= 4[a^\mu b^\nu + a^\nu b^\mu - a \cdot b \eta^{\mu\nu}] \end{aligned}$$