RICHIAMI DI MATEMATICA

Le nozioni di matematica e geometria richieste in un corso elementare di fisica sono incluse nei programmi di studio di qualsiasi scuola inferiore e superiore, e la loro conoscenza è un requisito necessario per intraprendere un corso di studi a livello universitario.
Tenendo conto dell'eterogeneo grado di preparazione degli studenti del primo anno di un corso di laurea in Scienze Infermieristiche e della necessità per alcuni di loro di ripassare e riprendere confidenza su alcuni argomenti di matematica, si fornisce un breve richiamo sulle parti di matematica che si ritengono indispensabili e propedeuticihe allo studio della fisica.
L'esercizio è l'unico modo per assimilare nozioni e tecniche matematiche e di geometria; si consiglia quindi, per chi ne senta il bisogno, di seguire attentamente gli esempi svolti, e di cimentarsi nella soluzione degli esercizi e dei problemi proposti.

1. DEFINIZIONI INTRODUTTIVE

Si indica con il termine **espressione algebrica** una serie di operazioni di somma, differenza, prodotto e quoziente di più fattori numerici o letterali. Le parti letterali di un'espressione algebrica sono dei simboli, ognuno dei quali identifica un numero, noto o incognito. I termini incogniti di un'espressione algebrica si chiamano **variabili**.

Semplificare o risolvere un'espressione algebrica significa esprimerla nella forma più compatta possibile, svolgendo operazioni di somma, prodotto e quoziente. La semplificazione di un'espressione algebrica permette di rendere più semplice il proseguimento dei calcoli eliminando elementi inutili.

Nel caso in cui nell'espressione algebrica compaiano termini letterali, il risultato deve essere indipendente dal valore assunto dalle variabili. Ad esempio la seguente uguaglianza tra due espressioni algebriche

$$\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$$

è verificata per qualsiasi valore delle variabili $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.

Un insieme di termini può essere racchiuso tra parentesi; le parentesi possono essere eliminate senza cambiare il segno dei termini contenuti se le parentesi sono precedute dal segno +:

$$\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} - 2z) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - 2z$$

Se invece la parentesi è preceduta dal segno –, è necessario cambiare il segno degli addendi contenuti al suo interno:

$$\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{y} - 2z) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + 2z$$

Un numero può essere positivo o negativo a seconda del suo segno. Qualora rappresentato in forma letterale il segno non è esplicitato, per cui un simbolo, ad es. $\boldsymbol{x}$, può rappresentare sia un numero positivo ($\boldsymbol{x>0}$) che negativo ($\boldsymbol{x<0}$).

Si definisce **modulo** o **valore assoluto** di un numero $\boldsymbol{x}$ il valore del numero a meno del segno. L'operazione di modulo applicata ad un numero $\boldsymbol{x}$ si indica con $|\boldsymbol{x}|$ e corrisponde a

$|\boldsymbol{x}| = \boldsymbol{x}$ se $x > 0$

$|\boldsymbol{x}| = \boldsymbol{-x}$ se $x<0$

Ad esempio: $|-5| = 5$, $|10| = 10$, $|-1{,}35| = 1{,}35$

L'**opposto** di un numero è il numero stesso cambiato di segno. Ad esempio l'opposto di 5 è -5, l'opposto di -10 è 10.

L'**inverso** (o reciproco) di un numero ***x*** è il numero ***1/x***. Ad esempio, l'inverso di 5 è 1/5, l'inverso di 1/2 è 2.

2. NUMERI RELATIVI E RAZIONALI

L'insieme dei **numeri relativi** è l'estensione dell'insieme dei numeri naturali (1,2,3, …) a cui si aggiungono lo zero e l'insieme dei numeri negativi.
Nella **somma algebrica** di più numeri relativi è necessario considerare il segno dei singoli termini. Ad esempio la somma dei numeri 6 e -2

$$6 + (-2)$$

è equivalente alla differenza 6-2.

Nella differenza tra due numeri relativi si cambia il segno del numero sottratto

$$6 - (-2) = 6+2 = 8$$

Il prodotto e il quoziente di due numeri relativi è positivo se i due numeri hanno lo stesso segno, negativo se hanno segno opposto. Ad esempio:

$$(+6)\cdot(+2) = +12$$

$$(-3)\cdot(-5) = +15$$

$$(+4)\cdot(-5) = -20$$

$$(+4)/(+2) = +2$$

$$(+4)/(-4) = -1$$

Si tenga presente che il prodotto di un numero dispari di fattori con segno negativo fornisce un risultato di segno negativo, mentre il prodotto di un numero pari di fattori di segno negativo ha come risultato un numero positivo:

$$(-2)\cdot(-3)\cdot(+2)\cdot(-1) = -12$$

$$(-3)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-1)(+2) = +24$$

L'insieme dei **numeri razionali** contiene tutti i numeri che possono essere espressi come rapporto di due numeri relativi, ad esempio:

$$1/2 = 0{,}5 \qquad 1/3 = 0{,}3333... = 0{,}\overline{3} \qquad -4/5 = -0{,}8$$

Un rapporto tra due numeri relativi si chiama anche **frazione**.

3. FRAZIONI

Una frazione è un rapporto tra due numeri relativi $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$$

Il termine $\boldsymbol{a}$ è il **numeratore,** $\boldsymbol{b}$ il **denominatore** (diverso da zero) della frazione.
Esempi di frazioni sono:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \qquad \frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{3}} \qquad \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{14}}$$

Una frazione non cambia se il numeratore e denominatore sono moltiplicati o divisi per uno stesso fattore intero $\boldsymbol{n}$:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{n}} \qquad\qquad \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{a} / \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{b} / \boldsymbol{n}}$$

Una frazione può quindi essere espressa in infiniti modi equivalenti, ad esempio:

$$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{12}} = \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{24}}$$

Una frazione si dice **ridotta ai minimi termini** quando è espressa in modo che il numeratore e denominatore assumano il minor valore possibile, dopo averli divisi per tutti i fattori comuni. Nella frazione **3/6** dell'esempio precedente sia il numeratore che il denominatore sono multipli di **3**, e possono essere quindi divisi per questo numero, ottenendo la frazione **1/2**.
Quando la frazione coinvolge un rapporto tra numeri di valore elevato, è opportuno scomporre questi numeri in fattori primi, cioè esprimerli come prodotti di numeri primi. Questo permette di semplificare i fattori comuni per ridurre la frazione ai minimi termini.
Un esempio è il seguente rapporto

$$\frac{\mathbf{126}}{\mathbf{315}} = \frac{\mathbf{7 \cdot 2 \cdot 3^2}}{\mathbf{7 \cdot 5 \cdot 3^2}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$$

dove i fattori comuni dei due termini al numeratore e al denominatore ($\mathbf{7 \cdot 3^2}$) sono stati semplificati.
Il fattore numerico $\mathbf{7 \cdot 3^2}$ è il numero intero più grande per il quale i due numeri **126** e **315** possono essere divisi, chiamato anche **massimo comune denominatore** dei due numeri.

La riduzione ai minimi termini di una frazione si ottiene quindi dividendo numeratore e denominatore per il loro massimo comune denominatore.

Il **prodotto di due frazioni** è la frazione i cui numeratore e denominatore sono il prodotto rispettivamente dei numeratori e dei denominatori dei due fattori del prodotto:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Ad esempio:

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{15}{4}$$

L'**inverso di una frazione** si ottiene scambiando numeratore e denominatore

$$\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{b}{a}$$

Di conseguenza, il **rapporto tra due frazioni** è espresso come il prodotto della prima frazione per l'inverso della seconda.

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Esempio:

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

La somma algebrica di due frazioni si risolve esprimendo le due frazioni in forma equivalente in modo che al denominatore compaia il **minimo comune multiplo** dei denominatori delle due frazioni. Si ricorda che il minimo comune multipli di due interi è l'intero più piccolo multiplo di entrambi i numeri considerati.
Ad esempio, nella seguente somma algebrca di due frazioni

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{2}$$

il minimo comune multiplo è 10; le due frazioni possono essere riscritti in forma equivalente con lo stesso denominatore 10, e la somma si risolve sommando i numeratori e dividendo il risultato per il denominatore comune:

$$\mathbf{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}=\frac{2}{10}-\frac{5}{10}=\frac{2-5}{10}=\frac{-3}{10}=-\frac{3}{10}}$$

ESERCIZI:

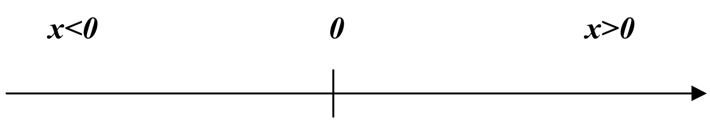
Calcolare il valore delle seguenti espressioni algebriche numeriche:

- $\left(\frac{7}{6}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)+\left(1-\frac{3}{8}\right)$ [13/8]
- $\left[(-8)\left(-\frac{1}{16}\right)\right]:\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right):\left(1-\frac{1}{3}\right)$ [-1/2]

4. NUMERI REALI

Vi sono dei numeri, ad esempio il risultato di $\sqrt{2}$ o il numero π (rapporto tra la circonferenza del cerchio e il suo diametro) che non sono numeri razionali, cioè che non possono in alcun modo essere scritti come rapporto tra due numeri relativi. L’insieme dei **numeri reali** estende l’insieme dei numeri razionali includendo anche tutti i numeri di questo tipo.

E’ possibile mettere in relazione l’insieme dei numeri reali con i punti di una retta orientata. Scelto un punto di riferimento come origine e un verso di orientamento della retta, la distanza di un punto generico della retta dall’origine è espresso da un numero reale, positivo o negativo a seconda della semiretta in cui si trova.



Nel seguito in ogni espressione algebrica i termini letterali corrispondono a generici numeri reali.

5. LE POTENZE

5.1 LE PROPRIETA' DELLE POTENZE

L'operazione di elevazione a potenza consiste nel moltiplicare un numero $\boldsymbol{a}$ per se stesso un numero $\boldsymbol{n}$ di volte, e si indica con $\boldsymbol{a^n}$.

$$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \qquad \text{(n volte)}$$

In una potenza $\boldsymbol{a^n}$, il numero reale $\boldsymbol{a}$ si chiama **base**, $\boldsymbol{b}$ è un numero razionale e si chiama **esponente.** Una potenza con esponente 0 ha come risultato 1 indipendentemente dal valore della base:

$$\boxed{a^0 = 1} \qquad \textbf{[5.1]}$$

Alcuni esempi di potenze con esponente intero sono:

$$\mathbf{3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27}$$

$$\mathbf{(0,5)^2 = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25}$$

$$\mathbf{(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16}$$

$$\mathbf{-\ 4^2 = -\ 4 \cdot 4 = -16}$$

$$\mathbf{(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8}$$

$$\mathbf{10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000}$$

Si noti che se $\boldsymbol{a}$ è un numero negativo, la potenza $\boldsymbol{a^n}$ ha valore positivo se $\boldsymbol{n}$ è un intero pari, ha valore negativo se $\boldsymbol{n}$ è un intero dispari. Si noti anche come $(-4)^2$ corrisponda alla potenza con esponente 2 del numero –4, mentre con la notazione -4^2 la potenza si riferisce alla base 4 mentre il segno meno è applicato al risultato della potenza. Le due notazioni forniscono risultati differenti, 16 nel primo caso, -16 nel secondo.

Vengono ora elencate alcune proprietà delle potenze, che forniscono delle regole utili nella semplificazioni di espressioni complesse.

- Il prodotto di due potenze con la stessa base $\boldsymbol{a}$ ed esponenti $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{m}$ è uguale ad una potenza di base $\boldsymbol{a}$ ed esponente dato dalla somma degli esponenti $\boldsymbol{n+m}$, cioè:

  $$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}} \qquad \textbf{[5.2]}$$

  Questa proprietà può essere verificata facilmente con degli esempi:

$$(2^2)\cdot(2^3) = (2\cdot2)\cdot(2\cdot2\cdot2) = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^5$$

$$10^3\cdot10^3 = (10\cdot10\cdot10)\cdot(10\cdot10\cdot10) = 10^6$$

Ovviamente questa proprietà può essere estesa al caso in cui sono moltiplicati un numero generico di potenze di base uguale:

$$a^{n_1} \cdot a^{n_2} \cdot \ldots \cdot a^{n_m} = a^{n_1+n_2+\ldots+n_m}$$

- Il prodotto di due potenze con basi diverse ***a*** e ***b***, e stesso esponente ***n*** è uguale ad una potenza con base pari al prodotto di ***a*** e ***b*** ed esponente ***n***:

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n} \qquad \textbf{[5.3]}$$

Ad esempio:

$$2^2\cdot10^2 = 4\cdot100 = (2\cdot10)^2 = (20)^2 = 400$$

- Come conseguenza della proprietà [5.2], si ricava che una potenza di esponente negativo è uguale all'inverso della potenza della stessa base con esponente positivo, cioè:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

In modo del tutto equivalente, la potenza a^{-n} è anche uguale ad una potenza di base pari all'inverso di ***a*** e con esponente cambiato di segno:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n} \qquad \textbf{[5.4]}$$

Per esempio:

$$2^{-3} = 1/2^3 = 1/8$$

$$10^{-1} = 1/10 = 0{,}1$$

La regola [5.4] si può dimostrare facilmente moltiplicando la potenza a^{-n} per la potenza a^n ed applicando la proprietà [5.3]:

$$a^{-n}\cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$$

Dividendo entrambi i membri dell'equazione precedente per a^n e semplificando le due potenze uguali al primo membro si ottiene la proprietà [5.4].

- Combinando le proprietà [5.2] e [5.4], si ottiene la seguente regola:

$$\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}} \qquad \textbf{[5.5]}$$

Esempi:

$$2^3/2^2 = 2^{3-2} = 2^1 = 2$$

$$10^6/10^3 = 10^{6-3} = 10^3 = 1000$$

- Un altra proprietà è relativa all'elevamento a potenza di una potenza:

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n\cdot m}} \qquad \textbf{[5.6]}$$

Anche questa regola si può verificare con un qualsiasi caso particolare, ad esempio:

$$(2^2)^3 = (2^2)\cdot(2^2)\cdot(2^2) = (2\cdot2)\cdot(2\cdot2)\cdot(2\cdot2) = 2^6$$

$$(10^2)^2 = 10^4 = 10000$$

- E' possibile esprimere la **radice di indice *n*** di un numero ***a*** con una potenza di base ***a*** con esponente frazionario pari a **1/*n***:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{1/n}} \qquad \textbf{[5.7]}$$

Si ricorda infatti che la radice di indice ***n*** di un numero ***a*** ($\sqrt[n]{a}$) è quel numero che elevato all'esponente ***n*** da come risultato ***a***, cioè:

$$b = \sqrt[n]{a} \qquad \text{se} \qquad b^n = a$$

Se quindi si esprime la radice come $b=a^{1/n}$, elevando entrambi i membri alla potenza n, si ha $b^n = (a^{1/n})^n = a^{n/n} = a$, dove si è usata la proprietà [5.6]; si ottiene quindi che la notazione [5.7] fornisce un numero che elevato alla potenza ***n*** da come risultato ***a***, cioè proprio la radice di indice ***n*** di ***a***.

Alcuni esempi di radici espresse come potenze di esponente frazionario sono qui elencate:

$$(100)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{100} = \pm 10$$

$$(27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$(-8)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-8} \quad \textbf{non esiste}$$

Si ricorda che una radice di indice dispari esiste sempre, mentre una radice di indice pari esiste solo se il radicando è positivo e corrisponde a due numeri opposti.

- Come conseguenza delle proprietà [5.6] e [5.7], una potenza con esponente frazionario coinvolge una radice e può essere espressa in due modi equivalenti:

$$\boxed{a^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}} \qquad \textbf{[5.8]}$$

Ad esempio:

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$$

$$(27)^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = (3)^2 = 9$$

$$(100)^{3/2} = (100^{1/2})^3 = (\pm 10)^3 = \pm 1000$$

Le proprietà delle potenze sopra descritte sono utili per semplificare espressioni numeriche o algebriche complesse in cui compaiono prodotti o frazioni di potenze. Si svolgono quindi un paio di esempi e si invita eventualmente a risolvere le espressioni proposte come esercizi.

Esempio 1:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$$

In questo esempio si è utilizzata la proprietà [5.3] relativa al prodotto di due potenze con lo stesso esponente, si è semplificato il prodotto tra le due frazioni e quindi si è applicata la regola [5.4].
Si ricorda che l'inverso di una frazione si ottiene invertendo numeratore e denominatore della frazione, cioè:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^{2} = 2^2 = 4$$

Esempio 2:

$$\frac{(10^2)^3}{10^2 \cdot 10^3} = \frac{10^{2\cdot 3}}{10^{2+3}} = \frac{10^6}{10^5} = 10^{6-5} = 10^1 = 10$$

Si è applicata la proprietà [5.6] al numeratore, dove compare la potenza di una potenza, mentre al denominatore è stata usata la regola [5.2] per esprimere il prodotto di due potenze con la stessa base. Si è quindi applicata la proprietà [5.5] per esprimere il rapporto tra due potenze di 10 ed ottenere il risultato finale.

Esempio 3:

$$(-27)^{-1} \cdot (-27)^{\frac{5}{3}} = (-27)^{-1+\frac{5}{3}} = (-27)^{\frac{-3+5}{3}} = (-27)^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{-27})^2 = (-3)^2 = 9$$

In questo caso si è applicata la proprietà [5.2] relativa al prodotto di due potenze con la stessa base e quindi la proprietà [5.8] per esprimere un esponente frazionario in termini di radice.
Si noti che, potendosi esprimere **–27= (-3)^3**, è possibile svolgere il calcolo anche nel seguente modo:

$$(-27)^{-1} \cdot (-27)^{\frac{5}{3}} = ((-3)^3)^{-1} \cdot ((-3)^3)^{\frac{5}{3}} = (-3)^{-3\cdot 1} \cdot (-3)^{3\cdot\frac{5}{3}} =$$
$$= (-3)^{-3} \cdot (-3)^5 = (-3)^{-3+5} = (-3)^2 = 9$$

ESERCIZI:

- Si calcolino le seguenti espressioni, utilizzando le proprietà delle potenze.

$(-2)\cdot(-2)^2$	(R –8)
$(5^{-2})\cdot 25$	(R. 1)
$(10^{-3}\cdot 10^6)^{1/3}$	(R. 10)

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot (-2)^2$$ (R. –8)

$$\sqrt[3]{\frac{9 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{10^{-5}}}$$ (R. 300)

$$(-5)^{3/2}$$ (R. inesistente)

5.2 POTENZE DI DIECI E NOTAZIONE SCIENTIFICA

Particolarmente importanti sono le potenze con base 10, utilizzate per esprimere valori numerici in notazione scientifica e per semplificare molti calcoli numerici.

Esprimiamo alcune potenze di base 10 con esponente positivo intero via via crescente in notazione ordinaria:

$$\mathbf{10^0=1}$$

$$\mathbf{10^1=10}$$

$$\mathbf{10^2=10 \cdot 10 = 100}$$

$$\mathbf{10^3=10 \cdot 10 \cdot 10 =1000}$$

Si noti come una potenza di dieci con esponente positivo può essere espressa in notazione ordinaria come un 1 seguito da un numero di zeri pari al valore dell'esponente. Ad esempio:

$$\mathbf{10^7 = 10000000}$$

Si può anche pensare una potenza di dieci come il prodotto di 1 per la potenza stessa, ad esempio

$$\mathbf{10^3 = 1 \cdot 10^3 = 1{,}000 \cdot 10^3}.$$

Un regola pratica per espimere questa potenza in notazione ordinaria è di spostare il punto decimale del fattore 1,000 verso destra di un numero di posizioni pari al valore dell'esponente della potenza di dieci che moltiplica questo fattore. Nel caso particolare dell'esempio si sposta la virgola del fattore 1,000 di 3 posizioni verso destra, ottenendo:

$$\mathbf{10^3 = 1{,}000 \cdot 10^3 = 1000}$$

Una potenza di dieci con esponente negativo si può esprimere come l'inverso di una potenza di dieci con esponente positivo, utilizzando la proprietà [5.4] delle potenze. Considerando quindi potenze con esponente negativo via via decrescente, si ha:

$$\mathbf{10^{-1} = 1/10^1 = 1/10 = 0{,}1}$$

$$\mathbf{10^{-2} = 1/10^2 = 1/100 = 0{,}01}$$

$$\mathbf{10^{-3} = 1/10^3 = 1/1000 = 0{,}001}$$

Analogamente a quanto mostrato per potenze di dieci con esponente positivo, si può moltiplicare la potenza di 10 per un fattore 1, ad es. $10^{-2} = 1{,}0 \cdot 10^{-2}$

Una regola pratica per esprimere una potenza di dieci con esponente negativo è di spostare il punto decimale del fattore 1,0 verso sinistra di un numero di posizioni pari al valore assoluto dell'esponente. Ad esempio:

$$\mathbf{10^{-1} = 1{,}0 \cdot 10^{-1} = 0{,}1}$$

(0,1 è ottenuto spostando il punto decimale del fattore 1,0 verso sinistra di una posizione)

$$\mathbf{10^{-2} = 1{,}0 \cdot 10^{-2} = 0{,}01}$$

(punto decimale spostato verso sinistra di due posizioni)

$$\mathbf{10^{-3} = 1{,}0 \cdot 10^{-3} = 0{,}001}$$

(punto decimale spostato verso sinistra di 3 posizioni)

Conversione di un numero da notazione ordinaria a notazione scientifica

Si ricorda un numero in **notazione scientifica** è espresso come il prodotto di un numero compreso tra 1 e 10 (cioè con una sola cifra diversa da zero prima del punto decimale) e una potenza di 10. Ad esempio

$$\mathbf{274 = 2{,}74 \cdot 100 = 2{,}74 \cdot 10^2}$$

$$\mathbf{0{,}35 = 3{,}5/10 = 3{,}5 \cdot 10^{-1}}$$

Prima di spiegare come convertire un numero da notazione ordinaria a notazione scientifica o viceversa, consideriamo un numero qualsiasi, ad esempio 12,43.

Questo numero può essere moltiplicato e diviso per uno stesso fattore, ad esempio il fattore 10, ottenendo l'uguaglianza:

$$\mathbf{12{,}43 = \frac{12{,}43}{10} \cdot 10}$$

Questa eguaglianza può essere espressa in due modi equivalenti:

$$\mathbf{12{,}43 = \left(\frac{12{,}43}{10}\right) \cdot 10 = 1{,}243 \cdot 10^1}$$

oppure

$$\mathbf{12{,}43 = \frac{(12{,}43 \cdot 10)}{10} = \frac{124{,}3}{10} = 124{,}3 \cdot 10^{-1}}$$

Nella prima uguaglianza il numero di partenza è uguale ad un fattore numerico moltiplicato per 10; il fattore numerico è ottenuto dividendo il numero di partenza per 10, ovvero spostandone la virgola verso sinistra di una posizione.
Nella seconda uguaglianza il numero di partenza è uguale ad un fattore numerico diviso per 10. Il fattore numerico al secondo membro è ottenuto moltiplicando il numero iniziale per 10, ovvero spostandone la virgola verso destra di una posizione.

Analogamente potrei dividere e moltiplicare il numero 12,43 per 100, e ragionando allo stesso modo, ottenere le seguenti uguaglianze:

$$\mathbf{12{,}43 = 0{,}1243 \cdot 10^2}$$

$$\mathbf{12{,}43 = 1243 \cdot 10^{-2}}$$

Nella prima uguaglianza il numero iniziale è uguale ad un fattore numerico che moltiplica una potenza di 10 con esponente 2; il fattore numerico al secondo membro è più piccolo del numero iniziale, ed è ottenuto da quest'ultimo spostandone la virgola verso sinistra di due posizioni, cioè di un numero di volte pari al valore dell'esponente della potenza di dieci.
Nella seconda uguaglianza il fattore numerico è maggiore del numero iniziale e moltiplica una potenza di dieci con esponente negativo; il fattore numerico che moltiplica la potenza di dieci è ottenuto spostando la virgola del numero iniziale verso destra di due posizioni.

In generale:

E' possibile esprimere qualsiasi numero come il prodotto di un fattore per una potenza di dieci. Il fattore numerico è ottenuto spostando la virgola del numero iniziale di un numero di posizioni pari al valore assoluto dell'esponente, verso sinistra se l'esponente è positivo, verso destra se negativo.

Questa regola permette di passare facilmente dalla notazione ordinaria alla notazione scientifica.
Se si vuole per esempio convertire un numero grande (maggiore o uguale a 10) in notazione scientifica, ad esempio 4250000, devo esprimerlo come il prodotto di un numero compreso tra 1 e 10 per una potenza di dieci. Il fattore cercato è 4,25, ottenuto dal numero iniziale spostandone la virgola verso sinistra di 6 posizioni. Questo fattore va moltiplicato per una potenza 10^6 per ottenere il numero iniziale, ovvero:

$$\mathbf{4250000 = 4{,}25 \cdot 10^6}$$

Per esprimere un numero piccolo (minore di 1) in notazione scientifica è necessario invece spostare il punto decimale verso destra per ottenere un numero compreso tra 1 e 10; il numero ottenuto moltiplica una potenza di dieci con esponente negativo di modulo pari al numero di posizioni di cui si è spostata la virgola.

Ad esempio:

$\mathbf{0{,}001 = 1/1000 = 1/10^3 = 1 \cdot 10^{-3}}$ (virgola spostata di 3 posizioni verso destra)

$\mathbf{0{,}000043 = 4{,}3/100000 = 4{,}3 \cdot 10^{-5}}$ (virgola spostata di 5 posizioni verso destra)

Numeri compresi tra 1 e 10 sono espressi in notazione scientifica semplicemente moltiplicandoli per 10^0.

$$\mathbf{1{,}5 = 1{,}5 \cdot 10^0}$$

$$\mathbf{5{,}712 = 5{,}712 \cdot 10^0}$$

In conclusione:

per convertire un numero in notazione scientifica si sposta il punto decimale fino ad ottenere un fattore compreso tra 1 *e* 10 *che moltiplica una potenza di dieci con esponente pari al numero di posizioni di cui si è spostato il punto decimale. L'esponente è positivo se il punto decimale è spostato verso sinistra (numero grande), negativo se è spostato verso destra (numero piccolo).*

Conversione da notazione scientifica a notazione ordinaria

Analogamente a quanto visto precedentemente, il prodotto di un numero per una potenza $\mathbf{10^n}$ con esponente positivo si ottiene dal numero iniziale spostando la virgola di n posizioni verso destra, ad es.

$$\mathbf{3 \cdot 10 = 3{,}0 \cdot 10^1 = 30}$$

$\mathbf{1,5 \cdot 10^2 = 1,5 \cdot 100 = 150}$

$\mathbf{0,0012 \cdot 10^3 = 0,0012 \cdot 1000 = 1,2}$

Il prodotto di un numero per un potenza $\mathbf{10^{-n}}$ con esponente negativo, si ottiene invece spostando la virgola del numero iniziale di *n* posizioni verso sinistra. Ad esempio:

$\mathbf{3 \cdot 10^{-1} = 3/10^1 = 3/10 = 0,3}$

$\mathbf{152 \cdot 10^{-2} = 152/10^2 = 152/100 = 1,52}$

$\mathbf{12,4 \cdot 10^{-3} = 0,0124}$

In particolare, queste due regole si applicano per convertire un numero da notazione scientifica a notazione ordinaria, ad esempio:

$\mathbf{1,5 \cdot 10^3 = 1,5 \cdot 1000 = 1500}$

$\mathbf{1,5 \cdot 10^{-3} = 1,5/1000 = 0,0015}$

In conclusione:

Per convertire un numero da notazione scientifica a notazione ordinaria si sposta la virgola di un numero di posizioni pari al valore assoluto dell'esponente della potenza di dieci, verso destra se l'esponente è positivo, verso sinistra se l'esponente è negativo.

Esercizi:

- Si convertano i seguenti numeri da notazione ordinaria a notazione scientifica o viceversa:

284,1	132.000
0,256	0,00045
$1,54 \cdot 10^2$	$33,75 \cdot 10^3$
$2,9 \cdot 10^{-3}$	$12,1 \cdot 10^{-3}$
$0,023 \cdot 10^3$	$0,12 \cdot 10^{-4}$

5.3 CALCOLO NUMERICO IN NOTAZIONE SCIENTIFICA

Usare la notazione scientifica e le proprietà delle potenze permette in molti casi di semplificare lo svolgimento dei calcoli, soprattutto se questi coinvolgono numeri molto grandi o molto piccoli.
Immaginiamo per esempio di voler calcolare il prodotto di 20000000 e di 0,03, e di dividere il risultato per 600000. Eseguire il calcolo con una calcolatrice può portare facilmente ad un errore qualora si scordi di digitare uno zero. Il calcolo è molto semplice se si esprimono i singoli fattori in notazione scientifica

$$\frac{\mathbf{20000000 \cdot 0{,}03}}{\mathbf{60000}} = \frac{\mathbf{(2 \cdot 10^7) \cdot (3 \cdot 10^{-2})}}{\mathbf{6 \cdot 10^4}} = \frac{\mathbf{2 \cdot 3}}{\mathbf{6}} \cdot \frac{\mathbf{10^{7-2}}}{\mathbf{10^4}} = \mathbf{1 \cdot 10^5 \cdot 10^{-4}} = \mathbf{10^{5-4}} = \mathbf{10^1} = \mathbf{10}$$

Nel calcolo si è utilizzata la proprietà [5.2] relativa al prodotto di due potenze con la stessa base, si è semplificato il fattore 2·3 al numeratore con il 6 al denominatore, e si è portata la potenza 10^4 al numeratore cambiando il segno all'esponente ($1/10^4 = 10^{-4}$ per la proprietà [5.4] delle potenze).

A volte i calcoli coinvolgono numeri talmente grandi o piccoli che è inevitabile ricorrere alla notazione scientifica e alle proprietà delle potenze per svolgerli. Ad esempio:

$$\mathbf{(1{,}6 \cdot 10^{-19}) \cdot (2 \cdot 10^5) = (1{,}6 \cdot 2) \cdot 10^{-19+5} = 3{,}2 \cdot 10^{-14}}$$

L'uso della notazione scientifica e delle proprietà delle potenze può essere utile per risolvere calcoli che coinvolgono radici, ad esempio:

$$\mathbf{\sqrt[2]{4 \cdot 10^8} = \sqrt[2]{4} \cdot \sqrt[2]{10^8} = \pm 2 \cdot 10^{\frac{8}{2}} = \pm 2 \cdot 10^4}$$

dove si è usata la proprietà [5.8] delle potenze.

Un altro esempio è il seguente:

$$\mathbf{\sqrt[4]{0{,}0016} = \sqrt[4]{16 \cdot 10^{-4}} = \sqrt[4]{\frac{2^4}{10^4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{2}{10}\right)^4} = \left(\frac{2}{10}\right)^{\frac{4}{4}} = \frac{\pm 2}{10} = \pm 0{,}2}$$

L'uso delle potenze di dieci permette anche di eseguire dei calcoli complessi in modo approssimato, ottenendo dei risultati non lontani del valore vero. Questo può essere utile se si vuole eseguire un calcolo velocemente e non si ha a disposizione una calcolatrice.

Ad esempio si voglia moltiplicare 312 per 192. Il risultato del calcolo esatto è

$$\mathbf{312 \cdot 192 = 59904 = 5{,}99 \cdot 10^4.}$$

Esprimiamo ora i singoli fattori del prodotto in notazione scientifica e approssiamoli all'intero più vicino:

$$\mathbf{312 \cdot 192 = (3{,}12 \cdot 10^2) \cdot (1{,}92 \cdot 10^2) \sim (3 \cdot 10^2) \cdot (2 \cdot 10^2) = 6 \cdot 10^4}$$

Il risultato approssimato è stato ottenuto senza ricorrere a calcoli complessi e risulta molto vicino al valore vero del prodotto.

Esercizi:

- Si calcolino le seguenti epressioni numeriche usando la notazione scientifica e le proprietà delle potenze.

$\dfrac{(4 \cdot 10^{15}) \cdot (2 \cdot 10^{-2})}{8 \cdot 10^{20}}$ (R. 10^{-7})

$0{,}00021 \cdot 30000$ (R. 6,3)

$\dfrac{320 \cdot 0{,}0024}{0{,}12 \cdot 3200}$ (R. $2 \cdot 10^{-3}$)

$(900)^{1/2}$ (R. ±30)

$(160000)^{-1/4}$ (R. $\pm 0{,}5 \cdot 10^{-1}$)

6. MONOMI, BINOMI E POLINOMI

Un **monomio** è composto da un fattore numerico e uno o più fattori letterali legati tra loro da operazioni di prodotto e quoziente. Esempi di monomi sono:

$$\boldsymbol{y^3,\ 3abc,\ x^2y,\ 2z^3,\ x/y^2}$$

Due monomi si dicono **simili** se hanno la stessa parte letterale.
La **somma algebrica di monomi simili** è un monomio avente parte letterale uguale a quella di uno degli addendi e parte numerica data dalla somma algebrica delle parti numeriche dei singoli addendi. Ad esempio

$$\boldsymbol{2ac+6ac-3ac = (2+6-3)ac = 5ac}$$

Il **prodotto di due monomi** si esegue svolgendo separatamente il prodotto delle parti numeriche e delle singole lettere, come mostrato nell'esempio seguente:

$$(3ac^2)\cdot(-2a^2c) = [3\cdot(-2)]\cdot[a\cdot a^2]\cdot[c^2\cdot c] = -6a^3c^3$$

Anche il quoziente di due monomi si esegue separatamente sulle parti numeriche e le singole parti letterali al numeratore e al denominatore, e usando le proprietà delle potenze per semplificare fattori comuni al numeratore e al denominatore.

$$\frac{8a^2b^6}{-2ab^4} = -4a^{2-1}b^{6-4} = -4ab^2$$

Un **binomio** è un'espressione algebrica riconducibile alla somma di due monomi non simili, come ad esempio:

$$x+y, \quad b+c^2, \quad zx+y^2$$

Più in generale si parla di **polinomio** per espressioni riconducibili alla somma algebrica di più monomi non simili. Esempi di polinomi sono:

$$x+y+z/2+1$$

$$-x^2+y^2+xy$$

La **somma algebrica di due o più polinomi** si esegue sommando algebricamente monomi simili tra loro. Un esempio di somma di due binomi è

$$(2x+3y) - (4x-y) = 2x+3y-4x+y = -2x+4y$$

Il **prodotto di due polinomi** si esegue moltiplicando ogni termine del primo polinomio per tutti i termini del secondo polinomio e sommando i risultati, come nell'esempio seguente:

$$(2x+3y)\cdot(4x-y) = 8x^2-2xy+12yx-3y^2 = 8x^2+10xy-3y^2$$

Sebbene siano casi particolari di prodotti di due binomi, è utile ricordare le espressioni a cui si riconducono i quadrati di un binomio:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 -2ab +b^2$$

e il seguente prodotto notevole:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Un'espressione algebrica riconducibile ad un rapporto tra due polinomi, può essere semplificata raccogliendo a fattor comune termini moltiplicativi al numeratore e al denominatore, al fine di rendere più semplici e scorrevoli i calcoli. Ad esempio nel seguente quoziente

$$\frac{8x^2 - 2xy + 4x^2}{2x - 4xy}$$

tutti i termini sia al numeratore che al denominatore contengono lo stesso fattore pari a **2*x*.** L'espressione può essere riscritta raccogliendo e semplificando tale fattore comune, nel seguente modo:

$$\frac{8x^2 - 2xy + 4x^2}{2x - 4xy} = \frac{4x^2 - 2xy}{2x - 4xy} = \frac{2x(x-y)}{2x(1-2y)} = \frac{x-y}{1-2y}$$

Al fine di esercitarsi nella semplificazione di espressioni algebriche, si propongono i seguenti **esercizi** di risoluzione di espressioni algebriche letterali.

- $2c(c+a^2) - c(c+a^2) - c^2$ (R: a^2c)
- $\dfrac{(-4a^3b^2)^2}{(-2ab)^3}$ (R: $-2a^3b$)
- $\left(\dfrac{-7a^2c^2}{5b}\right) \Big/ \left(\dfrac{14a^3c}{10abc}\right)$ (R: $-c^2$)
- $\dfrac{3x(y-x) - x^2 + xy}{x-y}$ (R: $-4x$)
- $\dfrac{y \cdot (16x+20)}{8xy+10y}$ (R: 2)

7. EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

Un'**equazione** è una relazione di uguaglianza tra due espressioni algebriche letterali in cui una o più variabili sono incognite. Altri termini dell'equazione, numerici o letterali, di cui si assume di conoscere il valore si chiamano termini noti. L'eguaglianza può essere verificata solo per particolari valori delle variabili incognite.

Un'**equazione di primo grado** contiene una sola variabile incognita che compare alla prima potenza. Esempi di equazioni di primo grado sono:

$$\mathbf{5x-7=2}$$

$$\mathbf{3+2/x = 1/x}$$

$$\boldsymbol{mx = nx-m} \qquad \text{(con } x \text{ variabile incognita)}$$

Risolvere un'equazione di primo grado corrisponde ad isolare la variabile incognita al primo membro dell'uguaglianza in modo che il suo valore sia specificato in relazione ai termini noti che compaiono tutti al secondo membro dell'uguaglianza.
Un'equazione di primo grado con incognita x può essere sempre espressa nella forma

$$\boldsymbol{ax + b = 0} \qquad \textbf{[7.1]}$$

dove $\boldsymbol{a}$ è il coefficiente dell'incognita e $\boldsymbol{b}$ il termine noto. La sua soluzione è

$$\boldsymbol{x = \frac{-b}{a}} \qquad \textbf{[7.2]}$$

come si può verificare sostituendo questo valore di $\boldsymbol{x}$ nell'equazione di partenza.

In pratica per risolvere un'equazione ed isolare la variabile incognita al primo membro si può ricorrere alle seguenti due regole valide per un'uguaglianza tra due espressioni algebriche.

(1) *In un uguaglianza tra espressioni algebriche si può sommare o sottrarre ai due membri uno stesso termine.*

Ad esempio, nell'equazione

$$\boldsymbol{ax + b = c} \qquad \textbf{[7.3]}$$

con variabile incognita $\boldsymbol{x}$, è possibile sottrarre ad entrambi i membri il termine $\boldsymbol{b}$, mantenendo la relazione di eguaglianza tra i due membri:

$$\boldsymbol{ax + b - b = c - b}$$

Essendo b-b=0, l'uguaglianza può essere riscritta nella seguente forma:

$$\boldsymbol{ax = c - b} \qquad \textbf{[7.4]}$$

Si può notare come la regola (1) equivale a spostare un addendo tra i due membri dell'equazione, cambiandone il segno.

Ad esempio, l'equazione

$$\mathbf{5}\boldsymbol{x} + \mathbf{2} = \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{6} \qquad \textbf{[7.5]}$$

può essere riscritta spostando il temine $3x$ al primo membro e il fattore +2 al secondo membro, cambiando il segno di entrambi:

$$\mathbf{5}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}\boldsymbol{x} = \mathbf{6} - \mathbf{2}$$

che equivale all'equazione

$$\mathbf{2}\boldsymbol{x} = \mathbf{4} \qquad \textbf{[7.6]}$$

(2) *In un eguaglianza algebrica si possono moltiplicare o dividere i due membri per uno stesso fattore.*

Ad esempio, nell'equazione [7.4] posso dividere i due membri per il coefficiente ***a***, ottenendo

$$\frac{\boldsymbol{ax}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$$

Semplificando i due fattori uguali al primo membro si ottiene la soluzione dell'eq. di partenza [7.3]:

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$$

Si noti come la regola 2) equivale a spostare un fattore comune da un membro dell'equazione all'altro membro, muovendolo dal numeratore al denominatore o viceversa.
L'equazione [7.6] può essere quindi risolta dividendo entrambi i membri per 2, ovvero spostando il fattore 2 dal numeratore al primo membro al denominatore al secondo membro, ottenendo

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{4/2} = \mathbf{2}$$

La semplificazione delle espressioni ai due membri dell'uguaglianza e l'applicazione di queste due regole permette di risolvere qualsiasi equazione di primo grado.
Ad esempio l'equazione

$$\mathbf{5}\boldsymbol{y} + \mathbf{10}\boldsymbol{a}\mathbf{/3} = \mathbf{5}\boldsymbol{a}$$

con variabile incognita y, può essere risolta spostando il temine $10a/3$ dal primo al secondo membro cambiandone il segno

$$\mathbf{5y/3 = 5a-10a/3}\ ,$$

esplicitando e semplificando la somma algebrica al secondo membro

$$\mathbf{5y/3 = (15a-10a)/3}$$

$$\mathbf{5y/3 = 5a/3}\ ,$$

e spostando infine la frazione 5/3 al secondo membro scambiando il numeratore con il denominatore

$$\mathbf{y = (5a/3)\cdot(3/5) = a}$$

Un'equazione di primo grado può avere una sola soluzione, come negli esempi mostrati precedentemente, ma può anche essere impossibile da risolvere, non avere alcuna soluzione valida, o avere infinite soluzioni.

Ad esempio, l'equazione

$$\mathbf{x+3 = x-4}$$

equivalente all'uguaglianza assurda **3 = -4**, non è verificata per alcun valore di $\mathbf{x}$. Questa equazione è impossibile e non ha soluzione.

Invece l'equazione $\mathbf{2(x+3)-x = x+6}$ (riconducibile all'uguaglianza **0=0**) è verificata per qualsiasi valore di $\mathbf{x}$, ed ha quindi infinite soluzioni.

Esercizi:

Nei seguenti esercizi si propone di risolvere equazioni di primo grado, in cui la variabile incognita e' indicata in grassetto:

- $a\mathbf{x}+b = -2a\mathbf{x}-b$
- $1/(2\mathbf{b}+c) = 2/(6\mathbf{b}+2c)$
- $2\mathbf{y}^2-a^2 = 2(\mathbf{y}-a)^2$

8. PROPORZIONI

Una **proporzione** è un'equazione di primo grado che esprime un'uguaglianza tra rapporti di due grandezze direttamente proporzionali.
Una proporzione può essere utilizzata per esprimere il valore di una delle due grandezze, noto il valore dell'altra e il rapporto relativo tra le due.
Una proporzione si esprime nella forma

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad [8.1]$$

o, in modo del tutto equivalente, come

$$a : b = c : d \qquad [8.2]$$

dove uno dei quattro termini è eventualmente una variabile incognita.
La proporzione [8.1] si può anche esprimere come

$$ad = cb$$

(prodotto dei termini medi uguale al prodotto dei termini esterni) e quindi risolta rispetto alla variabile incognita.

Si può usare una proporzione per convertire il valore di una grandezza tra unità di misura differenti. Ad esempio, posso esprimere un intervallo di tempo in ore o in giorni. Sapendo che **1 giorno = 24 ore** il rapporto tra l'intervalo di tempo espresso in ore (**Δt(ore)**) e lo stesso intervallo di tempo espresso in giorni (**Δt(giorni)**) è uguale al rapporto rapporto tra 24 ore e un giorno. Vale quindi la proporzione:

$$\frac{\Delta t(\text{ore})}{\Delta t(\text{giorni})} = \frac{24\ \text{ore}}{1\ \text{giorno}} \qquad [8.3]$$

Noto il valore dell'intervallo espresso in ore, il corrispondente intervallo di tempo espresso in giorni è:

$$\Delta t(\text{giorni}) = \frac{1\ \text{giorno}}{24\ \text{ore}} \cdot \Delta t(\text{ore}) = 0{,}0417 \cdot \Delta \text{t}(\text{ore})$$

Ad esempio un intervallo di tempo di 96 ore, espresso in giorni è pari a

$$\Delta t(\text{giorni}) = \frac{1\ \text{giorno}}{24\ \text{ore}} \cdot 96\ \text{ore} = 0{,}0417 \cdot 96\ \text{giorni} = 4\ \text{giorni}$$

Si ottiene quindi un rapporto di conversione tra ore e giorni pari a 0,0417 che, moltiplicato per un intervallo di tempo espresso in ore, mi permette di esprimere lo stesso intervallo di tempo in giorni.
La stessa proporzione [8.3] può essere risolta rispetto alla variabile incognita Δt(ore), noto il valore dell'intervallo di tempo espresso in giorni.

$$\Delta t(\text{ore}) = \frac{24\ \text{ore}}{1\ \text{giorno}} \cdot \Delta t(\text{giorni}) = 24 \cdot \Delta t(\text{giorni})$$

Proporzioni possono essere utilizzate non solo per convertire unità di misura, ma anche per risolvere alcuni problemi pratici, come mostrato nell'esempio seguente:

Esempio:

Un podista effettua 190 passi ogni 2 minuti. Sapendo che 10 passi coprono una distanza di 12 m, qual è la distanza percorsa dopo 1 ora ?

Il problema può essere risolto con due proporzioni. Una prima proporzione può essere usata per calcolare la distanza percorsa in 2 minuti. Il rapporto tra la distanza percorsa in un certo numeri di passi e il numero di passi compiuto è infatti costante (il numero di passi e distanza percorsa sono cioè due grandezze direttamente proporzionali). Vale quindi l'uguaglianza

$$\boldsymbol{d} : \textbf{(190 passi)} = \textbf{(12 m)} : \textbf{(10 passi)}$$

dove la variabile incognita ***d*** è la distanza percorsa in 2 minuti. La soluzione e'

$$\boldsymbol{d} = \textbf{(12 m)}\cdot\textbf{(190 passi)/(10 passi)} = \textbf{228 m}$$

Un altra proporzione, relativa al rapporto costante tra la distanza percorsa e il tempo trascorso, permette di calcolare la distanza ***D*** percorsa dopo un'ora:

$$\boldsymbol{d} : \textbf{(60 min)} = \boldsymbol{d} : \textbf{(2 min)}$$

la cui soluzione e'

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{d}\cdot\textbf{(60 min)/(2 min)} = \textbf{30}\cdot\boldsymbol{d} = \textbf{30}\cdot\textbf{228 m} = \textbf{6840 m}$$

Esercizi:

- Sapendo che 1 euro = 1936,27 lire, si calcoli il valore in euro di 10.000 lire e il valore in lire di 10 euro.

- La gittata cardiaca di un paziente è pari a 70 cm^3. Sapendo che il numero di battiti è 70 al minuto e che 1 litro = 1000 cm^3, quanti litri di sangue sono pompati dal cuore in 1 ora ?

9. Conversioni

Il valore che assume una grandezza fisica (ad esempio una distanza o una velocità) è sempre espresso come un coefficiente numerico moltiplicato per un'unità di misura. Ad esempio una distanza di 1,8 metri è espressa come ***l* = 1,8 m,** dove il coefficiente 1,8 rappresenta il numero di volte che il campione di misura scelto, il metro, è contenuto nella distanza considerata.
Poichè la medesima grandezza può essere espressa utilizzando diverse unità di misura (si può scegliere ad esempio di esprimere la distanza in centimetri anzichè in metri), è importante saper trasformare la espressione di una grandezza da un'unità di misura ad un'altra. Tale trasformazione, chiamata conversione di unità di misura, è facilmente eseguibile se si conosce l'equivalenza tra le due unità di misura. Per esempio l'equivalenza tra metri e centimetri è

$$\mathbf{1\ m = 100\ cm}$$

dove 100 è il rapporto tra i due campioni di misura e rappresenta il fattore di conversione da applicare per convertire una distanza da metri a centimetri. Si ha infatti

$$l = \mathbf{1{,}8\ m = 1{,}8 \cdot 100\ cm = 180\ cm}$$

In termini generali, siano ***x(a)*** è il valore della grandezza espressa in un'unità di misura ***a***, e ***x(b)*** la stessa grandezza epressa in un'altra unità di misura ***b***; il rapporto tra i valori che la grandezza assume quando espressa nelle due unità è uguale al rapporto ***a/b*** tra i corrispondenti campioni, cioè

$$\frac{x(a)}{x(b)} = \frac{a}{b}$$

Noto il valore della grandezza ***x(b)*** espressa nell'unità ***b***, il valore ***x(a)*** della stessa grandezza espresso nell'unità ***a*** è quindi:

$$x(a) = \frac{a}{b} \cdot x(b)$$

Viceversa, noto ***x(a)*** espresso nell'unità ***a***, ***x(b)*** è pari a

$$x(b) = \frac{b}{a} \cdot x(a)$$

Si evince che il fattore di conversione nella trasformazione ***x(a)→ x(b)*** (pari a ***a/b***) è l'inverso del rapporto di conversione da ***x(b)*** a ***x(a)*** (pari a ***b/a***).

Ad esempio una quanità di calore può essere espressa in due unità di misura, il joule (simbolo J) e la chilocaloria (simbolo kcal); la relazione tra le due grandezze e'

$$\mathbf{1\ kcal = 4186\ J} \qquad \mathbf{[9.1]}$$

cioè **4186** è il fattore di conversione da kcal a J.

Nota una quantità di calore espressa in kcal (ad esempio 100 kcal), il corrispondente valore espresso in J è

$$\boldsymbol{Q} \mathbf{= 100\ kcal = 4186 \cdot 100\ J = 4{,}186 \cdot 10^5\ J}$$

Viceversa il fattore di conversione da J a kcal si ottiene dividendo entrambi i membri dell'uguaglianza [9.1] per il fattore di conversione al secondo membro, cioè

$$\mathbf{1\ J = 1/4186\ kcal = 2{,}39 \cdot 10^{-4}\ kcal}$$

che fornisce il fattore di conversione da J a kcal di $\mathbf{2{,}39 \cdot 10^{-4}}$, pari all'inverso del fattore di conversione da kcal a J.
Una quantità di calore di 100 J, quando espressa in kcal è pari a

$$\boldsymbol{Q} \mathbf{= 100\ J = 100 \cdot 2{,}39 \cdot 10^{-4}\ kcal = 0{,}0239\ kcal}$$

9.1 Multipli e sottomultipli

Multipli e sottomultipli, utilizzati per esprimere in modo sintetico e compatto grandezze fisiche di valore molto grande o molto piccolo, sono ottenuti aggiungendo all'unità di misura dei prefissi cui corrispondono dei fattori di conversione esprimibili come potenze di 10.
La lista dei prefissi più comunemente usati e dei corrispondenti fattori di conversione è mostrata nella tabella seguente:

Prefisso	**Simbolo**	**Fattore**
tera	**T**	10^{12}
giga	**G**	10^{9}
mega	**M**	10^{6}
kilo	**k**	10^{3}
etto	**h**	10^{2}
deca	**da**	**10**
deci	**d**	10^{-1}
centi	**c**	10^{-2}
milli	**m**	10^{-3}
micro	**μ**	10^{-6}
nano	**n**	10^{-9}
pico	**p**	10^{-12}

Ad esempio:

$1\ \mathrm{ns} = 10^{-9}\ \mathrm{s}$

$1\ \mathrm{km} = 10^{3}\ \mathrm{m}$

$1\ \mathrm{mg} = 10^{-3}\ \mathrm{g}$

Invertendo queste relazioni, cioè dividendo entrambi i membri per il fattore a secondo membro, si ottengono i fattori relativi alle conversioni inverse. Per gli esempi di cui sopra:

$1\ \mathrm{s} = 10^{9}\ \mathrm{ns}$

$1\ \mathrm{m} = 10^{-3}\ \mathrm{km}$

$1\ \mathrm{g} = 10^{3}\ \mathrm{mg}$.

La conversione tra multipli e sottomultipli diversi di una stessa unità di misura può essere eseguita esplicitando e combinando tra loro i singoli fattori di conversione.

Si supponga ad esempio di voler trasformare una lunghezza di **0,12 mm** in **μm**.
Per trovare il fattore di conversione si ricorda che

$$1\ \mathrm{mm} = 10^{-3}\ \mathrm{m} \qquad [9.2]$$

$$1\ \mu\mathrm{m} = 10^{-6}\ \mathrm{m}. \qquad [9.3]$$

Invertendo la seconda relazione si ottiene

$$1\ \mathrm{m} = 10^{6}\ \mu\mathrm{m}$$

che, sostituita nella [9.2], fornisce il fattore di conversione cercato:

$$1\ \mathrm{mm} = 10^{-3}\ \mathrm{m} = 10^{-3}\cdot 10^{6}\ \mu\mathrm{m} = 10^{3}\ \mu\mathrm{m}$$

E' possibile ora convertire la lunghezza di 0,12 mm in μm

$$l = 0{,}12\ \mathrm{mm} = 0{,}12\cdot 10^{3}\ \mu\mathrm{m} = 120\ \mu\mathrm{m}.$$

Il fattore di conversione si può ricavare anche direttamente come rapporto tra le relazioni [9.2] e [9.3], cioè:

$$1\ \mathrm{mm}/1\ \mu\mathrm{m} = 10^{-3}/10^{-6} = 10^{3}$$

da cui si ottiene **$1\ \mathrm{mm} = 10^{3}\ \mu\mathrm{m}$**, oppure **$1\ \mu\mathrm{m} = 10^{-3}\ \mathrm{mm}$**

La conversione potrebbe coinvolgere grandezze quali superfici o volumi. Ad esempio, si potrebbe voler convertire una superficie di **0,12 m^2** in **cm^2.**

Ad esempio, si potrebbe voler convertire una superficie di **0,12 m^2** in **cm^2.**

Di fatto si esegue la conversione per l'unità di lunghezza (**1 m = 10^2 cm**) e si elevano al quadrato entrambi i membri per ottenere il fattore di conversione corrispondente alla superficie di 1 m^2:

$$\mathbf{1\ m^2 = (1\ m)^2 = (10^2\ cm)^2 = 10^4\ cm^2.}$$

Il fattore di conversione inverso (da cm^2 a m^2) lo si ottiene seguendo lo stesso metodo, essendo cioè, essendo **1 cm = 10^{-2} m**, si ha:

$$\mathbf{1\ cm^2 = (10^{-2}\ m)^2 = 10^{-4}\ m^2.}$$

La conversione per un volume si esegue in modo analogo. Si supponga ad esempio di voler esprimere il volume di **1000 *l*** in **m^3**.
Essendo per definizione **1 *l* = 1 dm^3**, ed essendo **1 dm = 10^{-1} m** il volume dato è pari a

$$\mathbf{V = 1000\ l = 1000\ dm^3 = 1000\cdot(10^{-1}\ m)^3 = 10^3 \cdot 10^{-3}\ m^3 = 1\ m^3}$$

A volte la conversione coinvolge grandezze più complesse, le cui unità di misura sono espresse come prodotti e rapporti delle unità di misura fondamentali e dei corrispondenti multipli e sottomultipli.

Si voglia ad esempio convertire una velocità da **mm/s** in **µm/µs**. E' necessario in tal caso convertire separatamente le unità di misura al numeratore e al denominatore.
Essendo quindi **1 mm= 10^3 µm** e **1 s = 10^6 µs**, si calcola il fattore di conversione come segue

$$\mathbf{1\frac{mm}{s} = \frac{1\,mm}{1\,s} = \frac{10^3\ \mu m}{10^6\ \mu s} = 10^{-3}\,\frac{\mu m}{\mu s}} \qquad \mathbf{[9.4]}$$

Quando si sostituiscono valori di grandezze fisiche in una formula, è necessario prestare attenzione affinchè tutte le grandezze fisiche coinvolte siano espresse in un sistema di unità di misura coerente, cioè che tutte le unità di misura siano espresse in funzione degli stessi multipli o sottomultipli delle unità delle grandezze fondamentali.

Ad esempio, si immagini di voler calcolare lo spazio $\mathbf{\Delta s}$ percorso in un tempo $\mathbf{\Delta t = 100\ \mu s}$ da un oggetto in moto con la velocità **v = 1000 mm/s**, ed esprimere il risultato in **µm**. Lo spazio percorso in un tempo Δt da un oggetto in moto con velocità v è pari a $\mathbf{\Delta s = v \cdot \Delta t}$ (vedi libro di testo, capitolo 2). Nel sostituire i valori di velocità e di tempo nella formula

precedente è necessario tuttavia prestare attenzione alle unità di misura in cui queste grandezze sono espresse.
La velocità v è un rapporto tra uno spazio percorso e un tempo, ed essendo la velocità espressa in mm/s, l'unità di misura utilizzata per il tempo è il s. Il tempo trascorso Δt è espresso invece in μs, cioè in unità differente dall'unità di tempo usata nell'espressione della velocità.
E' necessario nel calcolo dello spazio percorso Δs=v·Δt, che i valori di v e di Δt siano espressi in un sistema di unità di misura coerente; in particolare sia la velocità che il tempo trascorso devono essere espressi usando la stessa unità di misura del tempo.
Prima di sostituire i valori di velocità e di tempo nella formula per il calcolo dello spazio percorso è quindi necessario convertire il tempo trascorso in s oppure trasformare la velocità in modo che questa dipenda da un tempo espresso in μs.

Ad esempio la converione della velocità da mm/s a μm/μs è la seguente:

$$\mathbf{v = 1000\frac{mm}{s} = 1000 \cdot \frac{10^3\,\mu m}{10^6\,\mu s} = 1000 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mu m}{\mu s} = 1\,\frac{\mu m}{\mu s}}$$

Lo spazio percorso è quindi

$$\mathbf{\Delta s = v \cdot \Delta t = 1\ \mu m/\mu s \cdot 100\ \mu s = 100\ \mu m}$$

ESERCIZI:

Effettuare le seguenti conversioni esprimendo le grandezze nell'unità di misura indicata:

- 56 cm = ….   m
- 0,780 m = ….. cm
- $2{,}9 \cdot 10^5$ cm = ….. km
- 8,2 dm = …. cm
- $8{,}1 \cdot 10^3$ μg = ….. mg
- $8{,}1 \cdot 10^3$ μg = …. g
- 1h 20' 17" = ….. s
- 530 s = ….. min
- 7240 s = ….. h
- 0,02 l = …. cm^3
- $3{,}6 \cdot 10^4$ cm^3 = …. ml
- $3{,}6 \cdot 10^4$ ml = …. dm^3
- 290 l = ….. m^3
- 0,71 m^3 = …. dm^3
- 55 km/h = …. m/s
- $6{,}1 \cdot 10^3$ J = …. kcal   (NOTA: 1 kcal = 4168 J)

- 200 mmHg = …. Pa (NOTA: $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa = 760 mmHg)
- 200 mmHg = …. atm (NOTA: 1 atm = 760 mmHg)
- $6{,}1 \cdot 10^5$ Pa = ….. atm (NOTA: 1 atm = $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa)

10. Percentuali

Si definisce la percentuale *P* di una quantità *y* (indicato con *P%* di *y*) come la frazione *P*/100 di *y*:

$$\boldsymbol{P\% \text{ di } y = \frac{P}{100} \cdot y = (0{,}01 \cdot P) \cdot y}$$

Ad esempio l'1% di un numero *y* è pari a

$$\mathbf{1\% \text{ di } } \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}} \cdot \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{y}}{\mathbf{100}} = \mathbf{0{,}01} \cdot \boldsymbol{y}$$

mentre il 10% di un numero *y* e'

$$\mathbf{10\% \text{ di } } \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{100}} \cdot \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{y}}{\mathbf{10}} = \mathbf{0{,}1} \cdot \boldsymbol{y}$$

Nel caso in cui l'operazione di percentuale sia applicata ad una grandezza fisica, il risultato è una grandezza omogenea a quella di partenza, come nell'esempio seguente:

20% di 50 litri = 20/100·50 litri = 0,2·50 litri = 10 litri.

La percentuale è anche un modo per rappresentare variazioni relative di una quantità. La **variazione percentuale Δ(%)** di una grandezza *y* è definita come la variazione relativa della grandezza (Δ*y/y*) moltiplicata per 100:

$$\mathbf{\Delta(\%) = \frac{\Delta y}{y} \cdot 100}$$

In questo caso, poichè la percentuale esprime un rapporto tra due grandezze omogenee, il risultato è adimensionale. Ad esempio, l'**errore percentuale** della misura di una grandezza di valore ***x*** e affetta da un errore **Δ*x*** è definito come:

$$\mathbf{err(\%)} = \frac{\boldsymbol{\Delta x}}{\boldsymbol{x}} \cdot \mathbf{100}$$

Un errore **Δ*x*=1 m** su una grandezza di valore ***x*=100 m** corrisponde ad un errore percentuale pari a

err(%) = (1 m/100 m)·100 = 1%.

indicando in questo modo che l'errore sulla misura è l'1% del valore della grandezza misurata.

Una quantità *y* diminuita dell'*x* per cento corrisponde a

$$y - P\% \text{ di } y = y - \Delta y = y - \frac{P}{100} \cdot y = (1 - 0{,}01 \cdot P) \cdot y$$

Per esempio il valore corripondente ad una somma di 1000 euro diminuita del 10% è pari a

1000 euro - 10% di 1000 euro = 1000 euro - 10/100·1000 euro =

= (1-0,01·10)·1000 euro = 0,9·1000 euro = 900 euro.

Analogamente una quantità *y* aumentata del *P%* è pari a

$$y + P\% \text{ di } y = y + \Delta y = y + \frac{P}{100} \cdot y = (1 + 0{,}01 \cdot P) \cdot y$$

Ad esempio una velocità di 100 km/h aumentata del 15% è pari a:

100 km/h +15%·100 km/h = 100 km/h +15/100·100 km/h =

=(1+0,01·15)·100 km/h = 1,15·100 km/h = 115 km/h

Esercizi:

- A che velocità viaggerà un automobile dopo aver ridotto del 40% la velocità iniziale di 120 km/h ?

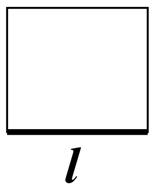
- Un individuo, di massa *m*=80 kg, dopo un periodo di dieta diminuisce il proprio peso del 10%. Quanl'è la massa dell'individuo dopo la dieta ?

11. Richiami di geometria.

11.1 Superfici e volumi

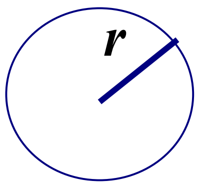
Si riportano nel seguito alcune formule per il calcolo di perimetri (***P***), superfici (***S***) e volumi (***V***) di alcune figure piane e solide elementari:

Quadrato



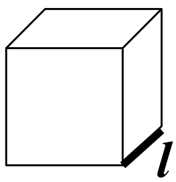
$$P = 4 \cdot l \qquad S = l^2$$

Cerchio



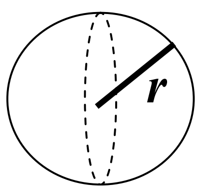
$$c = 2\pi \cdot r \qquad S = \pi \cdot r^2$$

Cubo



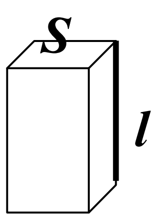
$$S = 6\, l^2 \qquad V = l^3$$

Sfera



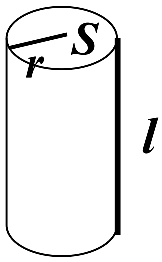
$$S = 4\pi \cdot r^2 \qquad V = \frac{4\pi}{3} r^3$$

Parallelepipedo



$$V = S \cdot l$$

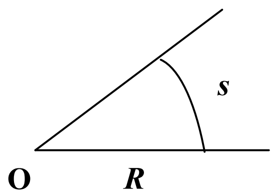
Cilindro



$$V = S \cdot l = \pi r^2 \cdot l$$

11.2 Angoli

Un **angolo** è la porzione di piano limitato da due semirette non parallele; il valore dell'angolo è definito come il rapporto tra la lunghezza ***s*** dell'arco sotteso dalle due semirette su di una circonferenza avente come origine il loro punto di incontro O e il raggio ***R*** di tale circonferenza:



$$\alpha = \frac{s}{R} \qquad \textbf{[11.1]}$$

Poichè la lunghezza dell'arco di circonferenza è direttamente proporzionale al raggio *R*, l'angolo definito come rapporto tra queste due lunghezze non dipende dalla scelta del raggio della circonferenza. Un angolo definito secondo la relazione [11.1] è espresso in **radianti**. Trattandosi di un rapporto tra due grandezze omogenee, l'angolo è una grandezza adimensionale. Il radiante (simbolo **rad***)* non è quindi l'unità di misura di una grandezza fisica, ma un simbolo utilizzato per specificare che il valore dell'angolo è calcolato secondo il rapporto [11.1].

Poichè l'angolo giro corrisponde ad un arco che copre l'intera circonferenza (**$s = 2\pi \cdot R$**), esso è pari a **2π** radianti. Analogamente, in base alla definizione data, i valori in radianti di un angolo piano e di un angolo retto sono rispettivamente **π** e **$\pi/2$**.

E' possibile anche esprimere un angolo in **gradi sessagesimali** (simbolo **^{o}**), definendo il grado sessagesimale (**1^o)** come la novantesima parte dell'angolo retto.

Trattandosi di due grandezze direttamente proporzionali, il rapporto tra i valori di uno stesso angolo espresso in radianti (α) e in gradi sessagesimali (**α^o**) è pari al rapporto tra i valori di un angolo di riferimento espresso nelle due notazioni (ad esempio un angolo piano pari a **$180^o = \pi$ rad**):

$$\frac{\alpha^o}{\alpha} = \frac{\mathbf{180^o}}{\pi}$$

Questa proporzione permette di effettuare la conversione tra gradi sessadecimali e radianti o viceversa. Ad esempio, un angolo di 30^o espresso in radianti vale:

$$\alpha = \frac{\pi \cdot 30^o}{180^o} = \frac{\pi}{6} = \mathbf{0{,}524\ rad}$$

Nella tabella seguente è mostrata la corrispondenza tra i valori di alcuni angoli espressi in radianti e in gradi sessagesimali:

angolo giro	**2π**	**360^o**
	$3\pi/2$	**270^o**
angolo piano	**π**	**180^o**
angolo retto	**$\pi/2$**	**90^o**
	$\pi/3$	**60^o**
	$\pi/4$	**45^o**
	$\pi/6$	**30^o**

Esercizi:

Si trasformino i seguenti angoli da gradi sessadecimali a radianti e viceversa:

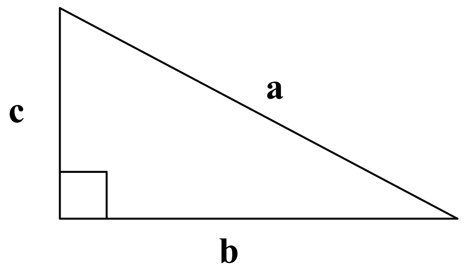
- 1 rad
- 1^o
- 0,7853 rad
- 70^o

11.3 Alcune proprietà geometriche dei triangoli

Un **triangolo** è un poligono formato da tre lati. La somma dei suoi tre angoli è sempre uguale a 180^o.
Triangoli particolari, di interesse per le loro proprietà geometriche, sono i **triangoli rettangoli** (nei quali uno degli angoli è un angolo retto), i **triangoli isosceli** (in cui due lati sono uguali) e i **triangoli equilateri** (in cui i tre lati hanno la stessa lunghezza e gli angoli sono tutti di 60^o).

Il **teorema di Pitagora** è una relazione che lega tra loro le lunghezze dei tre lati di un triangolo rettangolo. Se ***a*** è il lato opposto all'angolo retto (**ipotenusa**), ***b*** e ***c*** sono gli altri due lati del triangolo (**cateti**), la relazione tra questi tre lati è:

$$\mathbf{a^2 = b^2+c^2} \qquad \textbf{[11.2]}$$



Il teorema di Pitagora permette di calcolare uno dei tre lati del triangolo rettangolo, note le lunghezze degli altri due. Ad esempio, se si conoscono le lunghezze dei due cateti, la lunghezza dell'ipotenusa è pari a:

$$\boldsymbol{a} = \sqrt{\boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2}$$

Oppure, note le lunghezze dell'ipotenusa ***a*** e di uno dei due cateti la lunghezza dell'altro cateto è:

$$\boldsymbol{c} = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2}$$

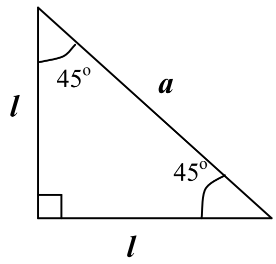
Esempio:

In un triangolo rettangolo l'ipotenusa ha lunghezza pari a 5 cm e uno dei cateti ha lunghezza pari a 3 cm. La lunghezza dell'altro cateto è

$$c = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

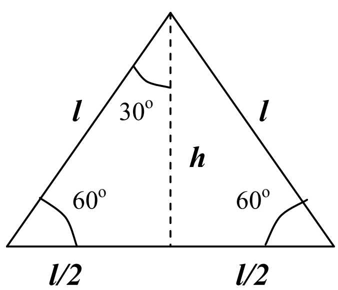
Nel caso particolare in cui il triangolo rettangolo sia anche isoscele (cioè i due cateti siano entrambi di lunghezza pari a l e gli angoli opposti ai due cateti siano di 45^o), l'ipotenusa ha lunghezza pari a:

$$a = \sqrt{l^2 + l^2} = l \cdot \sqrt{2} \qquad \textbf{[11.3]}$$



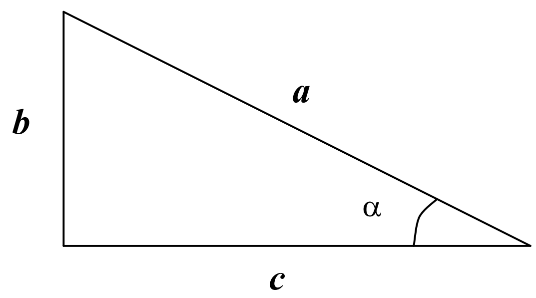
In un triangolo equilatero con lati di lunghezza pari a ***l***, l'altezza interseca la base nel suo punto medio e quindi la divide in due segmenti di lunghezza ***l*/2**. Si può applicare il teorema di Pitagora ad uno dei due triangoli rettangoli, in cui il triangolo isoscele è diviso dall'altezza, per calcolare l'altezza del triangolo:

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = l \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \textbf{[11.4]}$$



11.4 Elementi di trigonometria

La trigonometria permette di estendere a casi più generali i calcoli eseguiti nel paragrafo precedente su alcuni triangoli particolari.
Le funzioni trigonometriche principali sono la funzione **seno** e la funzione **coseno** di un angolo.



In riferimento al triangolo rettangolo raffigurato in figura, il seno dell'angolo α è definito come il rapporto tra il cateto opposto all'angolo e l'ipotenusa.

$$\sin(\alpha) = \frac{b}{a} \qquad [11.5]$$

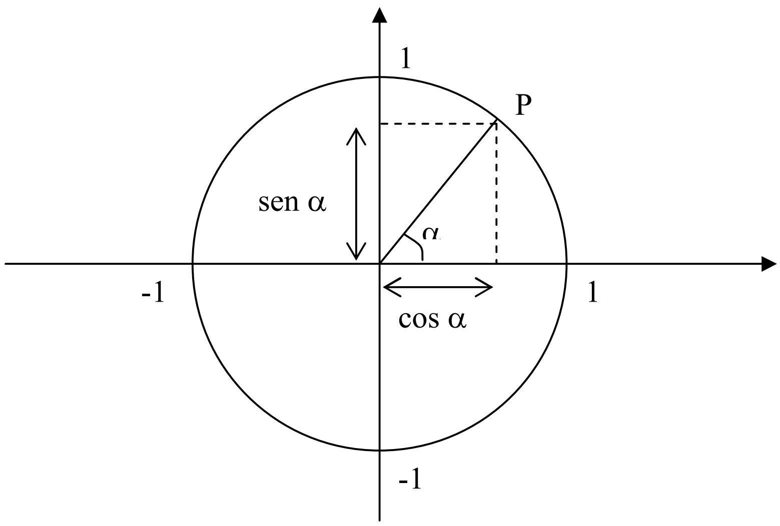
Il coseno dell'angolo α è invece definito come il rapporto tra l'altro cateto e l'ipotenusa:

$$\cos(\alpha) = \frac{c}{a} \qquad [11.6]$$

Si può facilmente verificare che il teorema di Pitagora implica, per qualsiasi angolo α:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Le funzioni trigonometriche si possono anche definire a partire dal cerchio di raggio unitario con centro nell'origine degli assi del piano cartesiano.



Considerato il raggio (R=1) che forma un angolo α con l'asse delle x e che interseca il cerchio in un punto P, il seno e il coseno dell'angolo α sono rispettivamente le coordinate x e y del punto P, ovvero le lunghezze delle proiezioni del raggio sui due assi cartesiani. Si evince che il seno e il coseno di un angolo sono sempre compresi tra -1 e 1:

$$\mathbf{-1 \leq sen(\alpha) \leq 1}$$

$$\mathbf{-1 \leq cos(\alpha) \leq 1}$$

Ritornando al triangolo in figura, è evidente che la conoscenza del seno e del coseno dell'angolo α permette, sulla base delle definizioni di seno e coseno, di ricavare le relazioni tra i lati del triangolo. Noto ad esempio il valore dell'ipotenusa ***a***, i due cateti sono rispettivamente:

$$\boldsymbol{b = a \cdot \sin(\alpha)}$$

$$\boldsymbol{c = a \cdot \cos(\alpha)}$$

La **tangente** di un angolo α è definita come il rapporto tra il seno e il coseno dell'angolo:

$$\mathbf{tan}(\alpha) = \frac{\mathbf{sin}(\alpha)}{\mathbf{cos}(\alpha)} \qquad [11.7]$$

Considerando il triangolo rettangolo mostrato in figura, e tenendo conto delle definizioni [11.5] e [11.6], si ottiene la seguente relazione tra i cateti ***b*** e ***c*** del triangolo e l'angolo $\boldsymbol{\alpha}$ che il cateto ***c*** forma con l'ipotenusa:

$$\mathbf{tan}(\alpha) = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}}$$

I valori del seno, del coseno e della tangente di alcuni angoli sono riportati nella tabella seguente. Si noti come alcuni di questi valori derivino dall'applicazione del teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli particolari considerati nel paragrafo precedente (eq. [11.3] e [11.4]).

angolo α	**cos α**	**sin α**	**tan α**
0^o	**1**	**0**	**0**
$30^o = \pi/6$	**$\sqrt{3}/2$**	**1/2**	**$1/\sqrt{3}$**
$45^o = \pi/4$	**$1/\sqrt{2}$**	**$1/\sqrt{2}$**	**1**
$60^o = \pi/3$	**1/2**	**$\sqrt{3}/2$**	**$\sqrt{3}$**
$90^o = \pi/2$	**0**	**1**	**$+\infty$**
$180^o = \pi$	**-1**	**0**	**0**
$270^o = 3\pi/2$	**0**	**-1**	**$-\infty$**
$360^o=2\pi$	**1**	**0**	**0**

12. Funzioni e loro rappresentazione grafica

Una **funzione** è una relazione matematica tra più variabili reali che definisce il valore che assume una di esse, detta **variabile dipendente**, in corrispondenza di ognuno dei possibili insiemi di valori assunti dalle altre, dette **variabili indipendenti**. Funzioni ad una sola variabile, come quelle considerate in questa sede, hanno una sola variabile dipendente.

Il modo sintetico per esprimere che una variabile dipendente ***y*** è legata da una relazione funzionale generica con una variabile indipendente ***x*** è:

$$y = f(x)$$

e si indica dicendo che "*y è funzione di x*".

Esempi di funzioni sono:

$$y = 3x+5 \qquad \textbf{[12.1]}$$

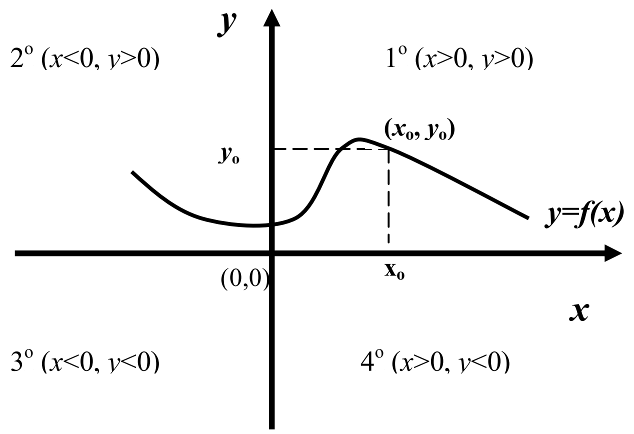
$$y = x^2 \qquad \textbf{[12.2]}$$

$$y=1/x \qquad \textbf{[12.3]}$$

L'insieme dei possibili valori assunti dalla variabile indipendente x è il **dominio** della funzione $f(x)$, il corrispondente insieme di valori della variabile y è il **codominio** della funzione. Per gli esempi di funzione mostrati prima:

- la funzione [12.1] ha domino e codominio che si estendono a tutto l'asse dei numeri reali;
- la funzione [12.2] ha dominio corrispondente all'intero asse reale, mentre il codominio è l'insieme dei numeri reali maggiori o uguali a zero;
- il dominio della funzione [12.3] è l'insieme dei numeri reali ad esclusione dello 0, il suo codominio è l'intero insieme dei numeri reali.

La dipendenza funzionale tra due variabili può essere rappresentata graficamente in un sistema di assi cartesiani ortogonali in cui l'asse delle ascisse corrisponde ai possibili valori assunti dalla variabile indipendente x e l'asse delle ordinate ai possibili valori assunti dalla variabile dipendente y. Si ricorda che, una volta fissata l'origine del sistema di riferimento e una scala numerica sui due assi, ogni coppia di valori (x_o,y_o) è rappresentata da un punto nel piano cartesiano. Il piano è diviso in 4 quadranti, i cui punti corrispondono alle quattro possibili combinazioni dei segni per le due variabili x e y, come mostrato nella figura seguente.

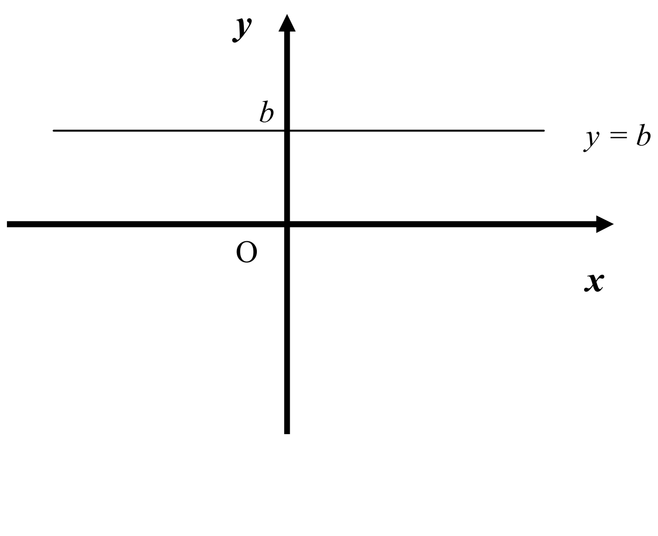


Una funzione $y=f(x)$ è rappresentata nel piano cartesiano da una curva formata dalle possibili coppie di valori (x,y) dove, per ogni valore della variabile indipendente x, il valore assunto dalla variabile dipendente y è definito dalla funzione $y=f(x)$.

Molte leggi fisiche e relazioni tra grandezze fisiche sono rappresentate da alcune funzioni particolari, descritte nel seguito:

- ***y* = *b* = costante**

la variabile dipendente y ha valore costante e indipendente dal valore assunto dalla variabile indipendente x. La sua rappresentazione grafica è una retta parallela all'asse delle x e che interseca l'asse delle y nel punto b.

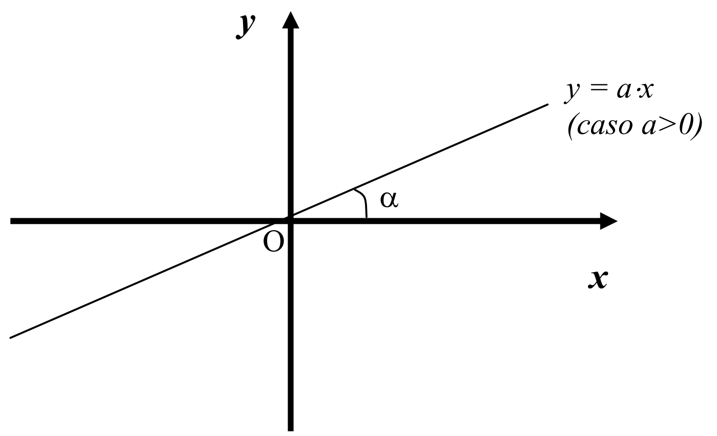


- $y = a \cdot x$ (***a* costante).**

La rappresentazione grafica di questa funzione sul piano cartesiano è una retta passante per l'origine, la cui pendenza dipende dal valore della costante a. La costante a è pari alla tangente dell'angolo α che la retta forma con l'asse delle ascisse:

$$\boldsymbol{a = \tan(\alpha)}$$

Valori di a positivi corrispondondono a rette che attraversano il 1° ed il 3° quadrante (valori di x e y entrambi positivi o entrambi negativi), mentre valori di a negativi a rette che attraversano il 2° e il 4° quadrante (segni opposti per x e y). Valori di a piccolo corrispondono a rette che formano angoli piccoli con l'asse delle ascisse mentre, al crescere del valore di a, la pendenza della retta aumenta fino a diventare ortogonale all'asse delle x per $a=\infty$, nel qual caso la retta non può essere descritta da una funzione del tipo $y=f(x)$. Il caso particolare in cui $a=0$ corrisponde ad una funzione il cui valore $y=0$ è indipendente dal valore assunto dalla variabile x.

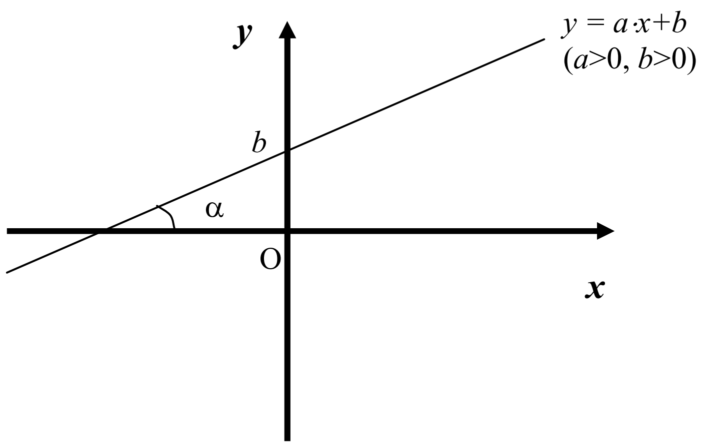


La funzione $y=a \cdot x$ esprime la dipendenza tra due variabili il cui rapporto $y/x=a$ è costante. Le due grandezze si dicono in tal caso essere **direttamente proporzionali**, nel senso che, se si moltiplica il valore di una delle due grandezze di un certo fattore, anche l'altra grandezza varia dello stesso fattore. Ad esempio raddoppiando o dimezzando il valore di una delle due variabili, anche il valore assunto dall'altra raddoppia o si dimezza. La funzione $y=a \cdot x$ esprime quindi una **relazione di proporzionalità diretta** tra le due variabili.

- Una retta generica nel piano cartesiano è la rappresentazione grafica della seguente funzione:

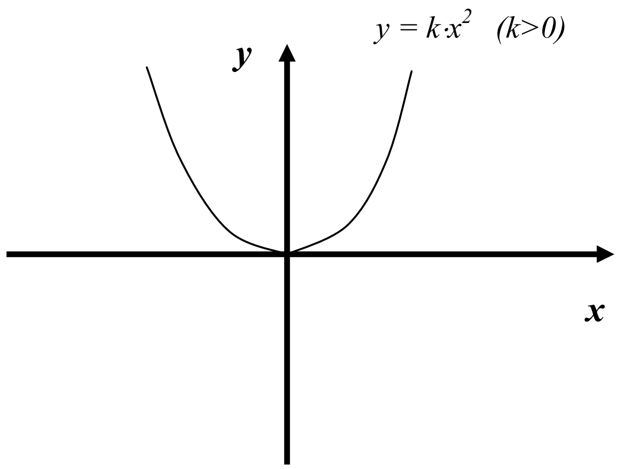
$$y = a \cdot x + b$$

dove a e b sono costanti. Il valore assunto dalla variabile y in corrispondenza del valore $x = 0$ è $y = b$. Il punto b rappresenta quindi il punto in cui la retta interseca l'asse delle ordinate, mentre la costante a dipende dalla pendenza della retta rispetto all'asse delle ascisse (a = tan(α)). Due variabili legate da questa funzione si dicono **linearmente dipendenti**.
Nel caso particolare in cui a=0, la funzione y=b è rappresentata da una retta parallela all'asse delle ascisse e la variabile dipendente y assume lo stesso valore indipendentemente dal valore della variabile indipendente x.



- $y = k \cdot x^2$

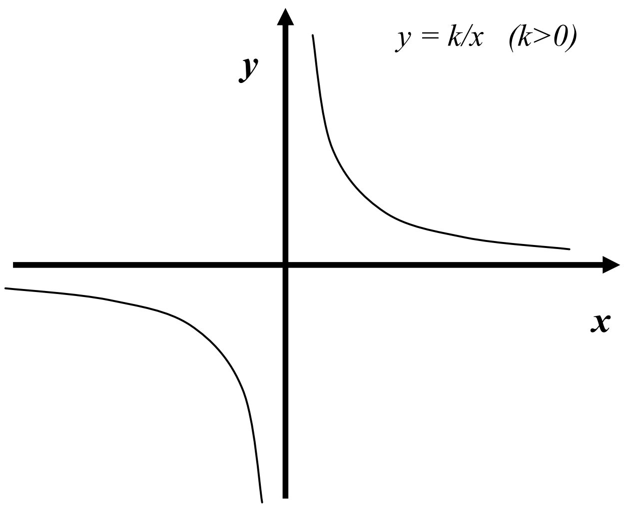
Questa funzione corrisponde ad una dipendenza di **proporzionalità quadratica** tra le due variabili ed è rappresentata nel piano cartesiano da una parabola con vertice nell'origine.



Se si moltiplica la variabile indipendente x per un fattore f, la variabile dipendente y, legata da una relazione di proporzionalità quadratica a x, varia di un fattore f^2. Ad esempio, raddoppiando il valore di x, il valore di y aumenta di un fattore $2^2=4$.

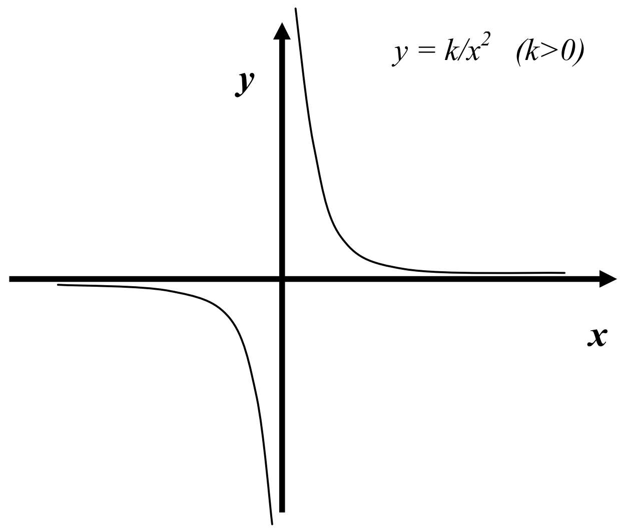
- $\boldsymbol{y = k / x}$

Questa funzione descrive una relazione di **proporzionalità lineare inversa** tra le due variabili x e y; aumentando il valore della variabile indipendente x di un fattore f, il valore corrispondente della variabile dipendente y diminuisce di un fattore $1/f$. Ad esempio, raddoppiando o triplicando il valore di x, i corrispondenti valori di y si dimezzano o diventano tre volte più piccoli.
La rappresentazione grafica nel piano cartesiano di questa relazione è fornita da iperboli equilatere, nel primo e terzo quadrante se $k>0$, nel secondo e quarto quadrante se $k<0$.



- $\boldsymbol{y = k/x^2}$

Questa funzione descrive una relazione di **proporzionalità inversa quadratica** tra le due variabili x e y. Moltiplicando il valore di x per un fattore f, il corrispondente valore di y varia di un fattore $1/f^2$. Ad esempio raddoppiando o triplicando il valore della variabile x, la variabile y diventa 4 o 9 volte più piccola.
In una relazione di dipendenza quadratica inversa, la variabile y decresce quindi più velocemente al crescere di x di quanto non succeda nel caso di una relazione lineare inversa tra le due variabili.



$y = k/x^2 \quad (k>0)$
y
x

APPENDICI

Sommatoria

La sommatoria è l'operazione di somma di N valori x_i, ognuni dei quali identificato da un indice i che può variare da 1 a N. La sommatoria si indica con il simbolo Σ (lettera greca sigma maiuscola), ed è definita come segue:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_{N-1} + x_N$$

Simbologia matematica

$=$	uguale
$\neq$	diverso
$<$	minore
$\leq$	minore o uguale
$\ll$	molto minore
$>$	maggiore
$\geq$	maggiore o uguale
$\gg$	molto maggiore
$\cong$	circa uguale
$\approx$	circa uguale
$\sim$	all'incirca
$\pm$	pio' o meno (per indicare un errore di misura)
$\propto$	proporzionale
∞	infinito
%	percentuale
Σ	sommatoria
Δ	differenza (delta)
$\perp$	ortogonale
//	parallelo
$\rightarrow$	su un simblo letterale indica un vettore
$\sqrt{\ }$	radice
$^\circ$	grado

ALFABETO GRECO

Α	α	alpha
Β	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
Ε	ε	epsilon
Ζ	ζ	zeta
Η	η	eta
Θ	ϑ, θ	theta
Ι	ι	iota
Κ	κ	kappa
Λ	λ	lambda
Μ	μ	mu, mi
Ν	ν	nu, ni
Ξ	ξ	xi
Ο	ο	omicron
Π	π, ϖ	pi
Ρ	ρ	rho
Σ	σ	sigma
Τ	τ	tau
Υ	υ	upsilon
Φ	φ, ϕ	phi
Χ	χ	chi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega