

# Dinamica I

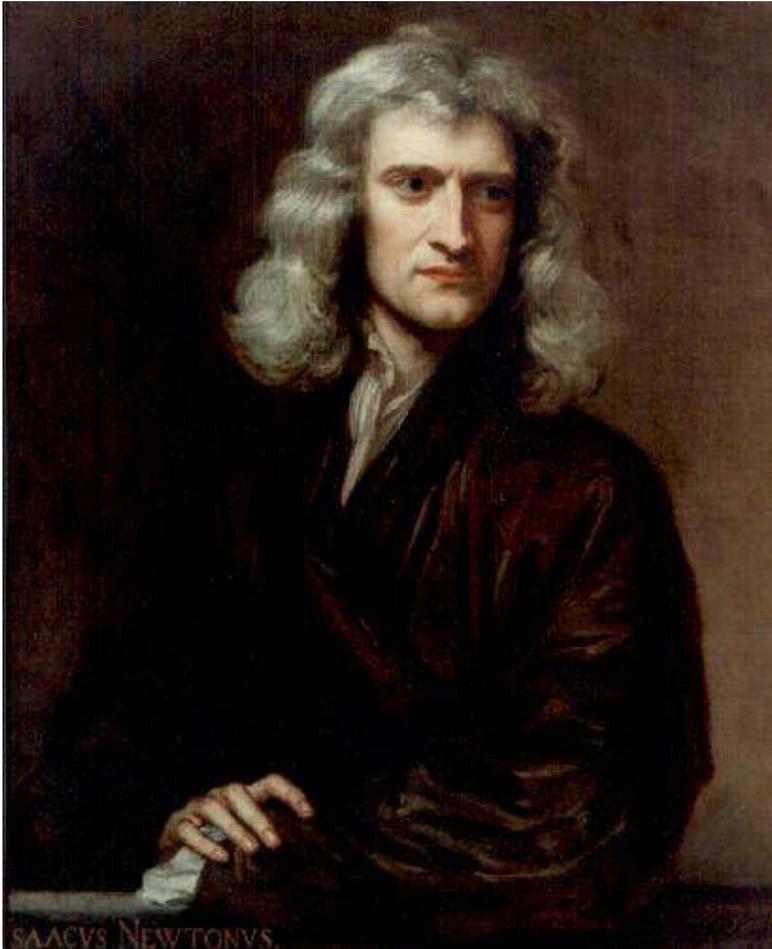
## Dinamica del punto

La **dinamica** del **punto materiale** si occupa di studiare gli **effetti** che l'**applicazione** di una **forza** produce sul **moto** di un **oggetto** le cui **dimensioni** siano **trascurabili**.

Da sempre è stato evidente che la variazione di stato di quiete o di moto di un corpo dipende dalle **interazioni** che esso ha **con altri oggetti** o con **l'ambiente esterno**.

Nel linguaggio comune ci si riferisce quasi sempre a queste **interazioni** come a **forze che agiscono sul corpo**.

# Dinamica



KNELLER, Godfrey, 1689  
Ritratto di Sir Isaac Newton

Farleigh House, Husterbourbe Park, England

A cavallo fra i secoli XVII e XVIII, **Isaac Newton** compì un importante passo nella comprensione dei fenomeni fisici, stabilendo una **relazione che lega l'accelerazione** subita da un oggetto **alle forze** che agiscono su di esso.

Questa relazione è alla base di tutta la cosiddetta **meccanica newtoniana**, che oggi sappiamo essere un caso **limite** di teorie più generali (la **meccanica relativistica** e la **meccanica quantistica**), ma che è utile per descrivere gran parte dei fenomeni meccanici che avvengono in condizioni “*standard*” (ovvero quando non siano implicate velocità prossime a quella della luce e oggetti di massa comparabile o inferiore a quella degli atomi).

# Principi della dinamica

La dinamica newtoniana si fonda su **tre principi** (detti anche “**le tre leggi di Newton**”), che sono giustificati dall’esperienza e dal fatto che le loro conseguenze descrivono propriamente un **gran numero di fenomeni**. I tre principi sono i seguenti:

- **Principio di inerzia** (cosa succede se **non** ci sono forze agenti su un corpo);
- **(II) Legge di Newton** (cosa succede quando su un corpo agisce una forza);
- **Principio di azione e reazione** (cosa succede se un corpo esercita una forza su un altro corpo).

# Primo principio della dinamica

*Un corpo non soggetto a forze mantiene il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme*

Questo principio, noto anche come **principio di inerzia**, ci dice che lo stato di **quiete** o di **moto rettilineo uniforme** sono da un certo punto di vista equivalenti.

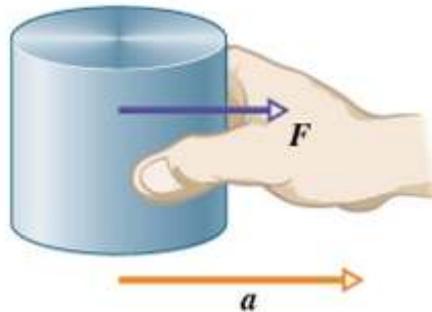
Se su un **corpo non** agisce nessuna **forza**, la sua **velocità non** può **cambiare**, ossia il corpo **non** può **accelerare**. In altre parole, se il corpo è in stato di quiete, vi resterà; *se si sta muovendo*, continuerà a farlo con la *stessa velocità (in modulo e direzione)*.

La prima legge di Newton **vale** non solo quando il corpo non è sottoposto ad alcuna forza, ma anche quando la **somma di tutte le forze agenti** su di esso (la forza **risultante**) è **nulla**.

Nei beni culturali sovente questo è il caso più interessante. Vogliamo che l'opera stia ferma

# Forze

L'effetto di una forza è quello di imprimere un'**accelerazione** ad un oggetto. Dall'**esperienza** possiamo dedurre che le forze possano avere **diversa intensità** (se spingiamo un oggetto più o meno “forte” otteniamo un'accelerazione maggiore o minore...).

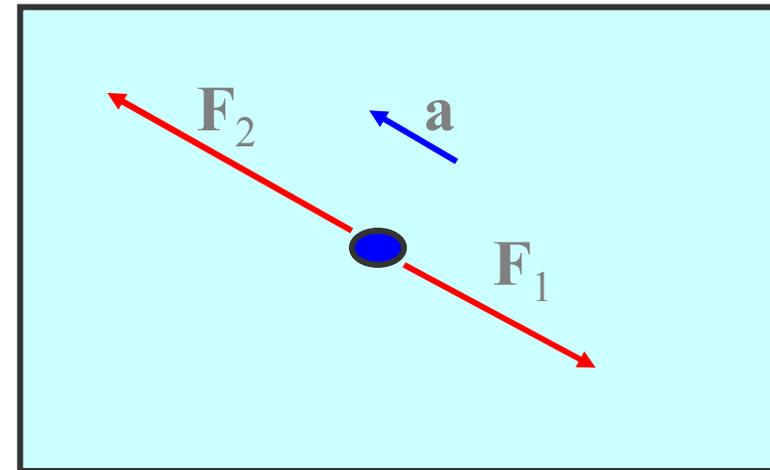
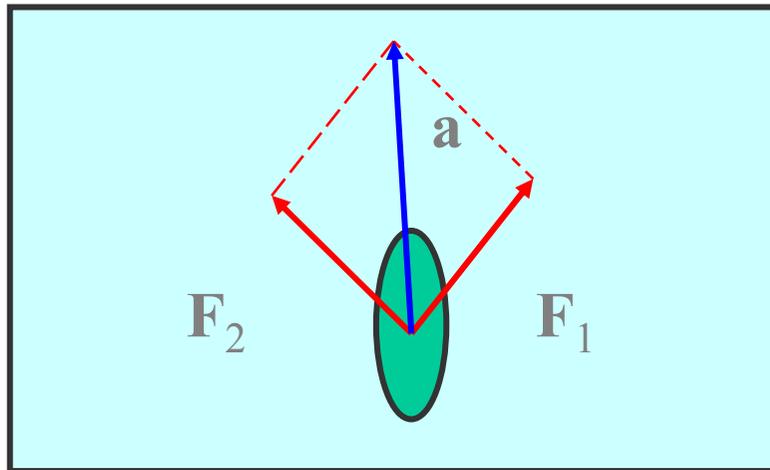


Inoltre l'**accelerazione** che noi otteniamo tende ad avere la stessa **direzione della forza** (se spingiamo un mobile in avanti, questo non si sposta di lato...). Lo stesso vale per il **verso** nel quale applichiamo la forza.

L'esperienza ci suggerisce che **la forza è una quantità di tipo vettoriale.**

# Forze

La natura vettoriale delle forze si manifesta nel modo in cui esse si **combinano** fra loro:



La somma vettoriale di tutte le forze agenti su un corpo è chiamata **risultante delle forze** e viene indicata con l'espressione:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{\text{ris}}$$

**Miglioramento superficiale:** la forza è applicata in maniera localizzata, con direzioni ed intensità vincolate alla morfologia della deformazione -Foderatura del supporto con metodi tradizionali (adesivi animali): la forza è applicata su tutta la superficie con intensità calibrata in relazione ai rilievi originali della pellicola pittorica -Trattamento a caldo del consolidante con l'ausilio di ferro da stiro: la forza è in relazione al peso del ferro



P.Buscaglia



Restauro - Dinamica 1



**incollaggi a freddo con ausilio di tavolo a bassa pressione (prima e dopo l'attivazione): pressione esercitata omogeneamente/uniformemente su tutta la superficie**

# Massa

L'esperienza ci dice che se vogliamo imprimere **la stessa accelerazione a oggetti diversi**, **l'intensità della forza** da applicare dovrà essere **diversa** (per trainare un treno occorre un locomotore, per trainare una slitta basta una persona...).

Normalmente noi associamo all'intensità della forza necessaria per muovere un certo oggetto la definizione di “**massa**” (tanto più l'oggetto è “massiccio”, più forza occorre per spostarlo).

La massa è una caratteristica intrinseca del corpo che mette in relazione forza applicata e accelerazione che ne risulta.

Per definizione, il rapporto tra la massa di un corpo e quella di un altro è uguale **all'inverso del rapporto delle accelerazioni** prodotte su quei corpi dalla stessa forza:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}$$

L'unità di misura SI della massa è il **kilogrammo (kg)**.



## Dinamica: secondo principio

Newton raccolse tutte queste osservazioni in **un'unica legge** che **lega** fra loro la risultante di **tutte e solo le forze esterne** (di qualsivoglia natura) agenti su un corpo, con l'**accelerazione** ad esso impressa.

$$a = \frac{\sum_i F_i}{m}$$

Questa relazione **vettoriale** può essere anche **separata** per **componenti**:

$$\sum_i F_{i,x} = m \cdot a_x \quad \sum_i F_{i,y} = m \cdot a_y \quad \sum_i F_{i,z} = m \cdot a_z$$

Ciò equivale a dire che la **componente dell'accelerazione lungo un asse** è causata solo dalla **somma delle componenti delle forze lungo quell'asse** e non da componenti lungo gli altri assi.

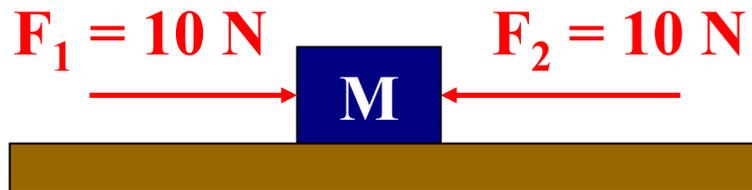
Il secondo principio della dinamica ci dice anche quale sono **dimensioni e unità di misura delle forze**:

$$F = m \cdot a \quad \xrightarrow{\text{Newton}} \quad 1N = kg \cdot \frac{m}{s^2}$$

Una forza ha l'intensità di **1 N** se imprime a un oggetto di **massa 1 kg** un'**accelerazione di 1 m/s<sup>2</sup>**.

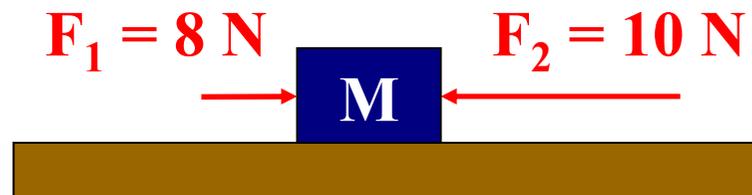
## Dinamica: secondo principio

Esempi: supponiamo di avere un corpo di massa  $M = 4\text{kg}$  collocato su una superficie perfettamente liscia (priva di attrito) soggetto a forze



In questo caso  $F_1 = -F_2$  (in quanto hanno lo stesso modulo, ma verso opposto) per cui la risultante è nulla: il corpo rimane fermo.

Se il corpo si sta muovendo con velocità  $v$ , mantiene tale velocità



In questo caso:

$$F_{RISULTANTE} = \sum_i F_{i,x} = F_1 - F_2 = 8 - 10 = -2\text{ N}$$

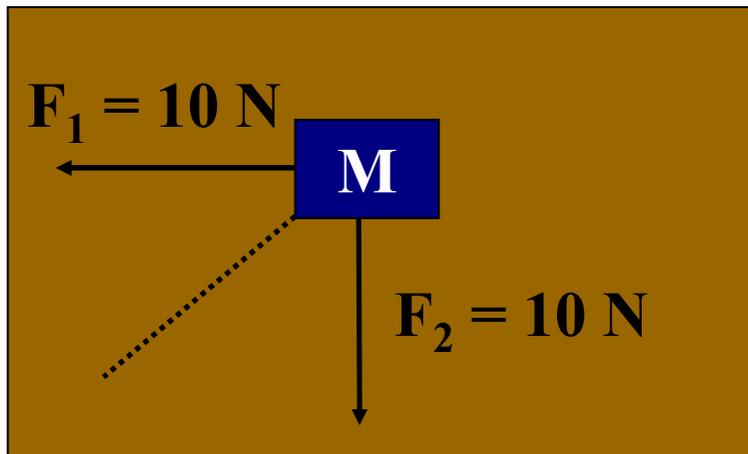
Il corpo accelererà verso sinistra con moto uniformemente accelerato con accelerazione pari a:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-2}{4} = -0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Il segno - indica che il moto è verso sinistra

## Dinamica: secondo principio

Esempi: supponiamo di avere un corpo di massa  $M = 4\text{kg}$  collocato su una superficie orizzontale perfettamente liscia (priva di attrito)

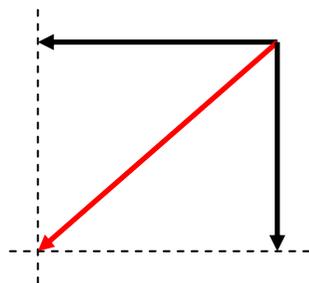


In questo caso è intuitivo pensare che il corpo si sposterà nella direzione tratteggiata.

Quale sarà la forza risultante e l'accelerazione del corpo?

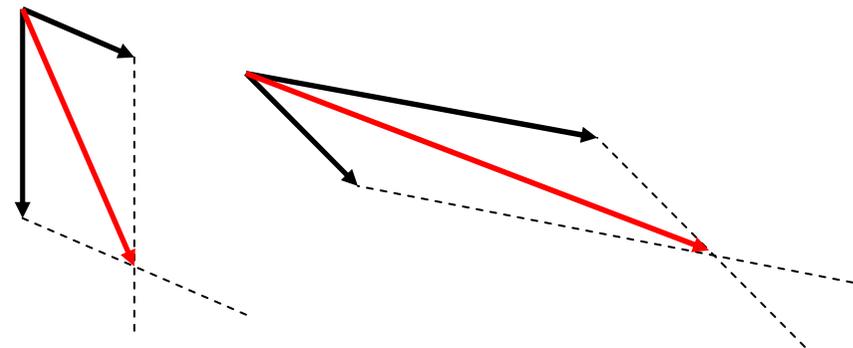
Le cose si complicano: per ottenere la forza risultante bisogna sommare **vettorialmente** le forze.

Nel caso di due forze è possibile utilizzare la regola del parallelogramma.



A.Romero

Più genericamente...

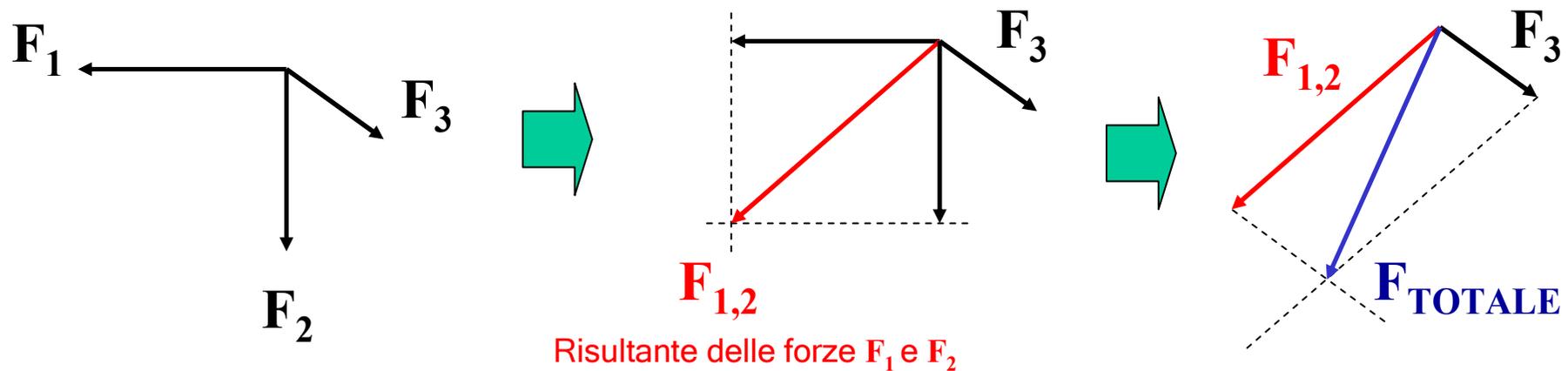


Fisica dei Beni Culturali - Dinamica I

12

## Dinamica: secondo principio

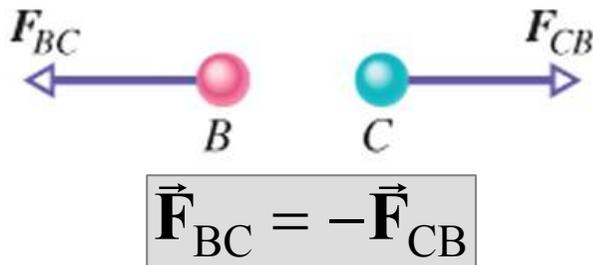
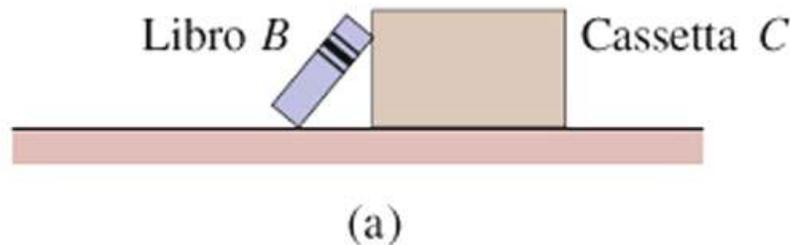
Nel caso di più di due forze è possibile applicare la regola del parallelogramma alle forze prese due a due...



Oppure, più facilmente, utilizzare metodi matematici scomponendo i vettori lungo due assi cartesiani

# Terzo principio della dinamica

*“Le forze si presentano sempre a due a due; se il corpo A esercita una forza sul corpo B, una forza uguale e contraria viene esercitata da B su A.”*



Il libro B è poggiato sulla cassetta C. Per la terza legge di Newton, la forza  $F_{BC}$  esercitata dalla cassetta C sul libro B ha lo stesso modulo e direzione, ma verso opposto, rispetto alla forza  $F_{CB}$  esercitata su C da B.

N.B. Le forze di **azione e reazione** agiscono sempre su **corpi diversi**. Forze **uguali ed opposte**, ma **agenti sullo stesso corpo**, **non** possono essere quelle previste dalla **terza legge di Newton**.

# Terzo principio: esempio



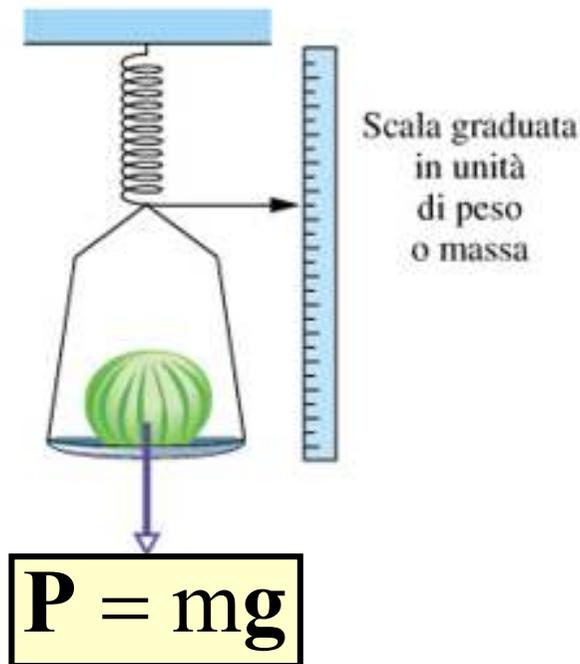
Un **cavallo tira un carro**. Il carro accelera verso sinistra se la forza **T** esercitata su di esso dal cavallo è maggiore della forza di attrito **f** (di cui parleremo più diffusamente in seguito), esercitata su di esso dal suolo e diretta verso destra.

Per il terzo principio della dinamica deve esistere una **forza T' uguale ed opposta a T**; poiché essa è **esercitata dal carro sul cavallo**, **non** ha alcun effetto sul moto del **carro**, mentre **influenza il moto del cavallo**. Se il cavallo riesce ad accelerare verso sinistra è perché ci deve essere una forza **F** (verso sinistra) esercitata dal terreno sulle zampe del cavallo, la quale è maggiore di **T'**.

## Forza peso

La **forza più comune** nella nostra esperienza quotidiana è quella dovuta all'attrazione gravitazionale esercitata dalla Terra su un corpo: questa forza si chiama **peso** del corpo ed è direttamente proporzionale (attraverso l'accelerazione di gravità  $g$ ) alla massa del corpo.

Poiché, come abbiamo visto, il valore di  $g$  non è lo stesso per tutti i punti della Terra, possiamo concludere che il peso, diversamente dalla massa, non è una proprietà intrinseca del corpo.



A.Romero



BRUEGEL, Pieter il vecchio, 1558. La caduta di Icaro  
Olio su tela: 73,5x112 cm. Bruxelles, Musées Royaux des Beaux-Arts

## Forza peso

Il **peso** misurato sulla **Terra** (da non confondere con la massa) è **diverso** da quello misurato per esempio sulla **Luna** (a causa della diversa accelerazione di gravità:  $g_{LUNA} = 1.63 \text{ m/s}^2$  per cui una persona che pesi  $70 \cdot 9.81 \text{ N}$  sulla Terra su una bilancia di casa, peserebbe  $70 \cdot 1.63 \text{ N}$  sulla Luna). La **massa** invece è la stessa.



Immagine dal viaggio dell'Apollo 17

# Dinamica: secondo principio

Supponendo abbia una massa di 80 kg

Centometrista (accelerazione media):  $a = 2 \frac{m}{s^2}$

$$F = 160 \text{ N}$$



Corpo in caduta libera:  $a = 9,8 \frac{m}{s^2}$

Supponendo abbia una massa di 80 kg

$$F = 784 \text{ N}$$



Infatti... il centometrista lasciato cadere nel vuoto, impiegherebbe:

$$t = 0,45 \times \sqrt{100} = 4,5 \text{ s}$$

A percorrere 100 m..... per cui è maggiore la forza di gravità rispetto a quella sviluppata dai muscoli del centometrista

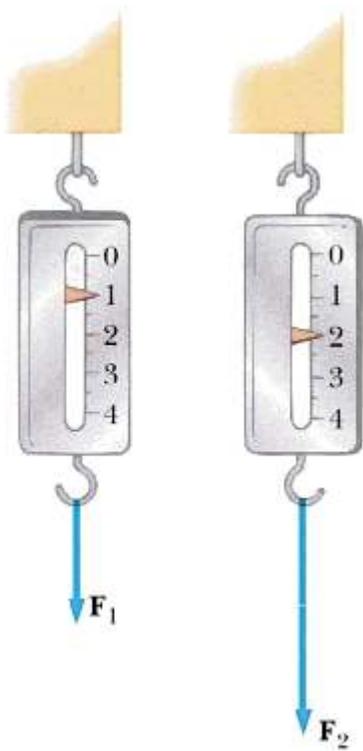
Dragster in accelerazione:  $a = 18,7 \frac{m}{s^2}$

Supponendo abbia una massa di 100 kg

$$F = 1870 \text{ N}$$



## Dinamica: dinamometro



Lo strumento utilizzato per misurare le forze è il **dinamometro** che si basa sulla **forza elastica**.

Se sottoposti ad una sollecitazione (Forza  $F$ ), i corpi **solidi** subiscono una **deformazione**. Per **conservare la loro forma**, applicano, a chi ha prodotto la deformazione, una **forza di richiamo**  $F_{\text{elastica}}$  ( $F_{\text{el}}$ , opposta a  $F$ ) che, per piccole deformazioni, è proporzionale alla deformazione stessa (**comportamento elastico**). Una volta rimossa la sollecitazione ritornano allo stato normale.

Il dinamometro a molla è un semplice dispositivo composto da un cilindro all'interno del quale è presente una molla. Tirando da un lato il dinamometro, la molla si allunga, generando, a causa della deformazione, una forza opposta alla direzione in cui viene tirata.

Una scala graduata posta all'esterno del cilindro mostra l'equivalente in **Newton** della forza di richiamo della molla.



## Dinamica: forza elastica

Il comportamento del sistema in presenza di una forza elastica può essere descritto dalla seguente legge (supponendo sempre il moto unidirezionale):

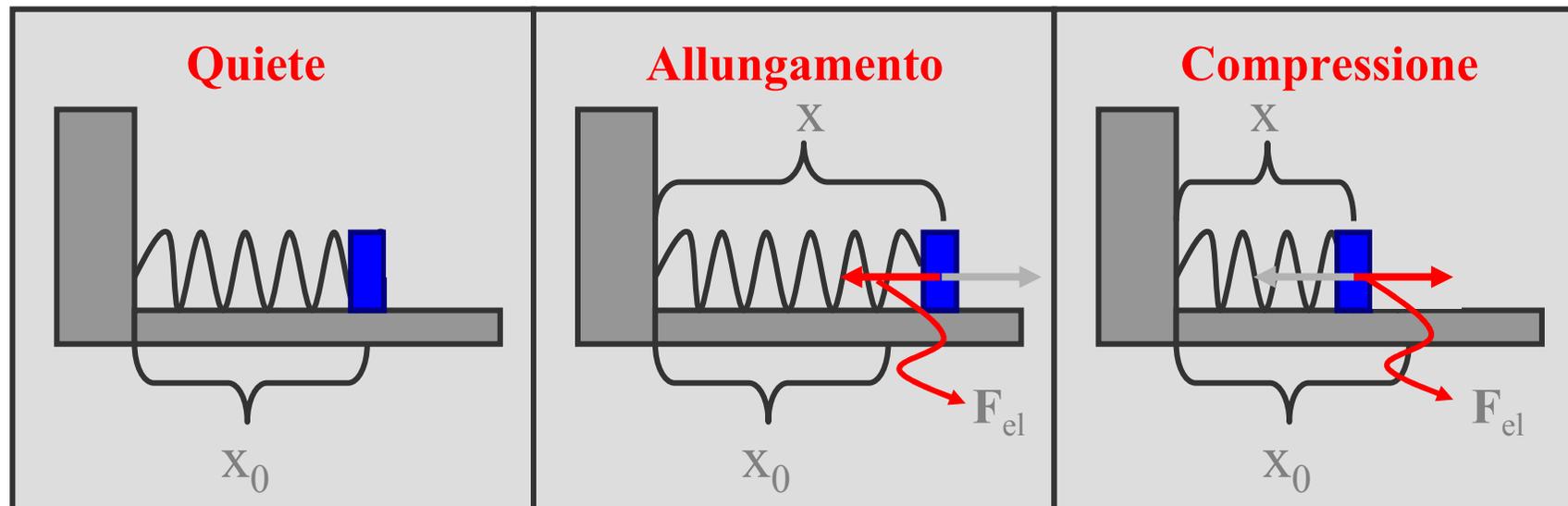
$$F_{el} = -k \cdot \Delta x$$

Dove

$k$  è detta **costante elastica**, dipende dal tipo di materiale e si esprime in N/m.

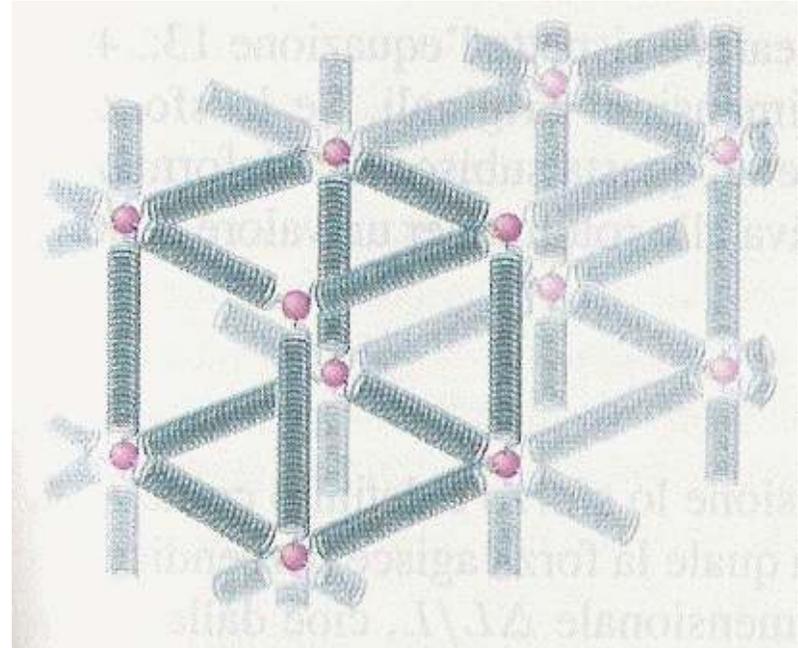
$x_0$  è la posizione iniziale e  $\Delta x$  di quanto ci si è spostati rispetto ad essa

il segno - indica che la **forza è sempre di “richiamo”** ovvero tende sempre a riportare il corpo nella sua posizione iniziale.



## Elasticità dei corpi

Quando un gran numero di atomi si riuniscono a formare un solido, come può accadere in una statua di marmo, si collocano in configurazioni di equilibrio assumendo la forma di un *reticolo cristallino* tridimensionale che è una disposizione ripetitiva in cui ogni atomo ha una distanza di equilibrio ben definita rispetto agli atomi adiacenti. Gli atomi sono tenuti insieme da forze interatomiche che si possono **rappresentare da molle**. Il reticolo è notevolmente rigido, ciò che equivale a dire che le «**molle interatomiche**» sono **assai poco deformabili**.



È per questa ragione che **molti oggetti** comuni come scale, tavoli e cucchiai ci **sembrano** perfettamente **rigidi**. **Altri invece**, come canne per innaffiare e guanti di gomma **non** ci sembrano affatto **rigidi**: gli atomi di cui sono costituiti *non formano* reticoli rigidi, ma si allineano in lunghe catene molecolari che possono essere flessibili, quando sono legate debolmente fra loro.

## Elasticità dei corpi

Tutti i corpi «rigidi» reali sono **elastici entro certi limiti**, ciò equivale a dire che possiamo modificare le loro dimensioni, solo in piccola misura, tirandoli, spingendoli, torcendoli o comprimendoli. Per avere un'idea dell'ordine di grandezza delle deformazioni in gioco, immaginiamo di appendere il David di Michelangelo ad un'asta verticale di tondino di ferro (un profilato a sezione circolare) lunga 1 m, di 1 cm di diametro.

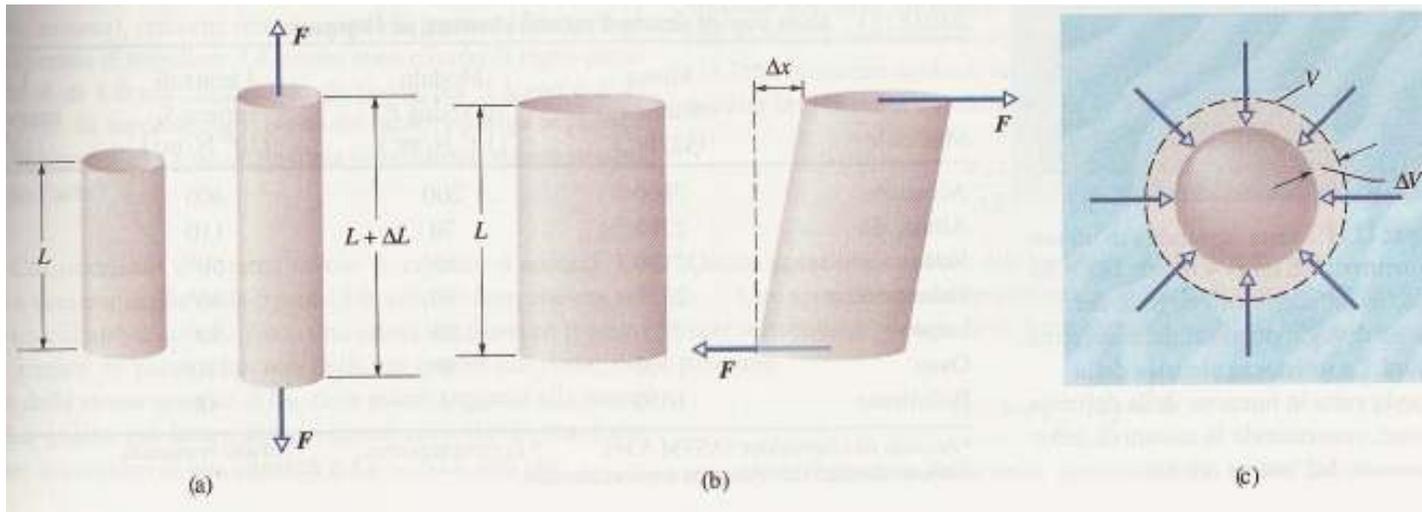


L'asta si **allunga**, ma soltanto di qualcosa come **0.5 mm**, ossia dello 0.05 %. E appena rimosso il carico, ritorna alle sue dimensioni iniziali.

Se alla stessa asta appendiamo due David, si deforma in modo permanente, e togliendo il carico non la vedremo ritornare alle dimensioni iniziali. Se poi vi appenderemo tre David, si spezzerà. Un istante prima della rottura l'allungamento dell'asticella sarà inferiore allo 0.2 %. Anche se deformazioni di questo ordine possono sembrare molto piccole, sono molto importanti nella pratica

## Elasticità dei corpi

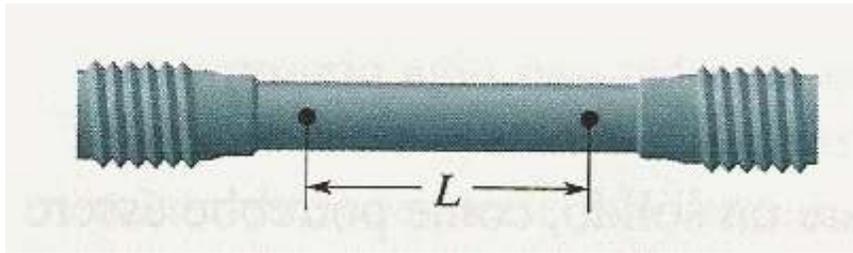
La figura presenta tre modi in cui un solido può modificare le proprie dimensioni quando è sollecitato da forze. Nella (a) un cilindro è **allungato longitudinalmente**. Nella (b) un cilindro è **deformato** da una forza **trasversale** come potrebbe essere deformato un *mazzo di carte o un libro*. Nella (c) un oggetto solido, immerso in un **fluido** sotto alta pressione, è **compresso** uniformemente in tutte le direzioni. Ciò che i tre esempi hanno in comune è che uno **sforzo**, ossia una **forza deformante per unità di superficie**, produce una deformazione, di norma considerata in termini relativi. Nella figura abbiamo in (a) uno **sforzo longitudinale** (associato all'allungamento o all'accorciamento) detto anche **sforzo normale**, in (b) **uno sforzo di taglio**, detto anche **sforzo tangenziale** o di **scorrimento** e in (c) uno **sforzo di compressione uniforme**.



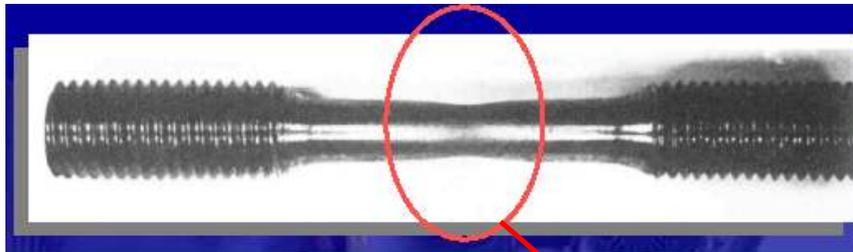
## Elasticità dei corpi

Sforzi e deformazioni assumono aspetti molto diversi nei tre casi della figura precedente, ma, entro il campo delle applicazioni, lo sforzo e la deformazione da esso prodotta sono fra loro proporzionali. La **costante di elasticità** è chiamata **modulo di elasticità** (o modulo elastico), come risulta dall'espressione

$$\text{sforzo} = \text{modulo} \cdot \text{deformazione}$$



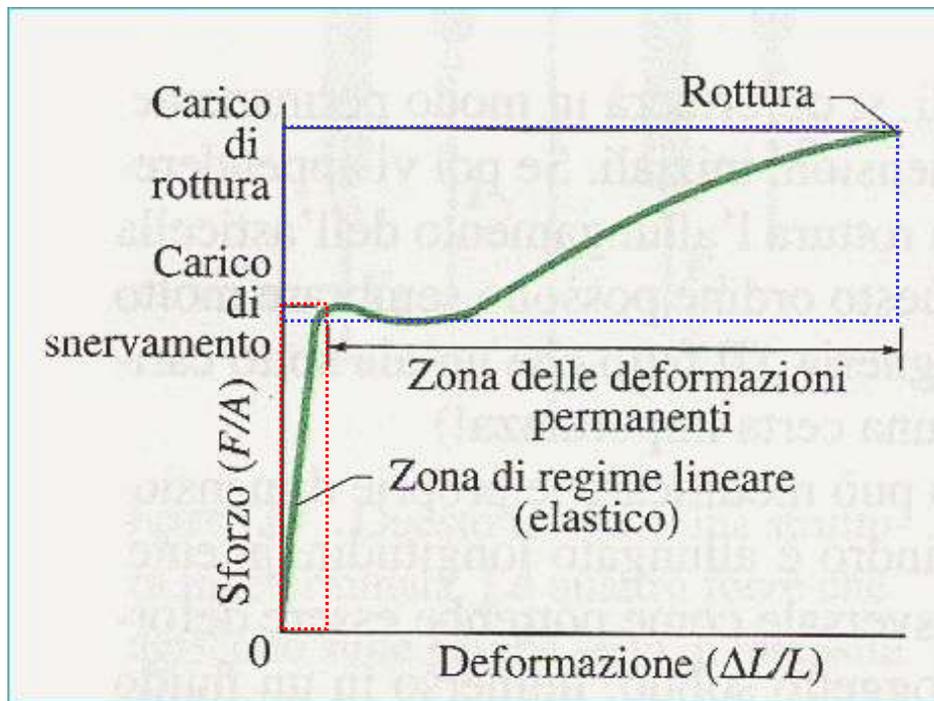
In una **prova standard** delle proprietà elastiche lo **sforzo normale** su una barretta cilindrica viene **umentato lentamente** da zero fino al valore per il quale il cilindro si strappa, e la deformazione (in questo caso l'allungamento) è misurata con grande precisione.



Deformazione permanente

# Elasticità dei corpi

Si può rappresentare **graficamente** quanto accade nel caso dell'allungamento di un materiale: la **deformazione subita**  $\Delta L/L$  viene rappresentata in **funzione dello sforzo** applicato (forza/superficie). Applicando uno sforzo crescente il materiale passa da una situazione di comportamento elastico, ad una di deformazione permanente ed infine arriva alla rottura.

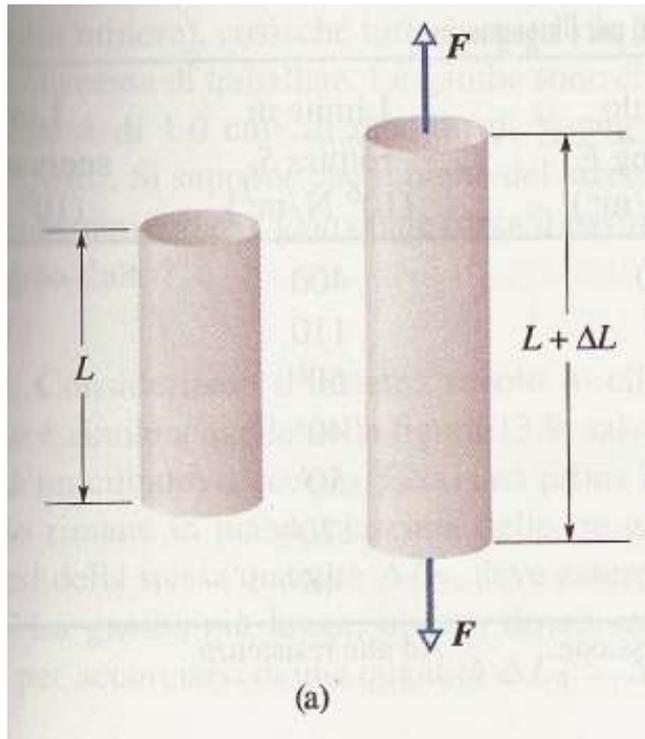


**Zona rossa:** in questa regione il materiale si comporta in modo elastico: una volta esaurito lo sforzo, esso ritorna alla sua dimensione originale.

**Zona blu:** in questa regione il materiale si deforma in modo permanente: una volta esaurito lo sforzo, esso non ritorna alla sua dimensione originale. Il valore dello sforzo per cui il materiale esce dalla zona di elasticità è detto carico di snervamento.

**Al di sopra della zona blu:** il materiale si rompe: il valore dello sforzo a cui ciò accade è detto carico di rottura.

## Elasticità dei corpi: trazione e compressione



Per una sollecitazione di semplice trazione o compressione lo **sforzo** è definito come  $F/A$  cioè l'intensità della forza divisa per la superficie sulla quale la forza agisce perpendicolarmente.

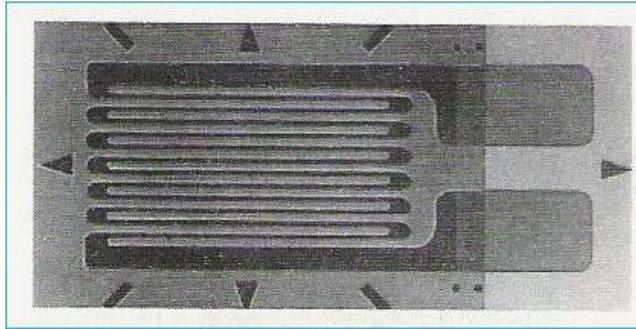
Anche la **pressione** è definita come  $F/A$  e misurata in  $N/m^2$  (Pascal  $\rightarrow$  Pa).  $P_{atm} = 10^5$  Pa. P sui nostri piedi  
Peso/superficie  $\rightarrow \dots$ )

La **deformazione** è espressa dalla quantità adimensionale  $\Delta L/L$  cioè dalla variazione relativa (talvolta espressa in percentuale) della lunghezza del campione. Dato che la deformazione è una grandezza adimensionale, il modulo definito ha le stesse dimensioni dello sforzo, ossia di una forza divisa per una lunghezza al quadrato.

Il modulo relativo a sollecitazioni di trazione o compressione, che provocano cioè allungamenti o accorciamenti, è chiamato **modulo di Young** o **modulo di allungamento** ed è rappresentato nel linguaggio tecnico-scientifico dal simbolo E. Per cui:

$$\frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

## Elasticità dei corpi: trazione e compressione



Tensimetro di 9,8 mm x 4,6 mm

L'allungamento  $\Delta L/L$  in un materiale sottoposto a sforzi di trazione può essere misurato agevolmente mediante un **tensimetro**.

Questi semplici e utili strumenti, che possono essere attaccati direttamente con un adesivo ad una struttura in opera, sono basati sulla proprietà che fa dipendere la resistenza elettrica (torneremo sull'argomento parlando della legge di Ohm) della sonda dalla deformazione che subisce.

Mentre il **modulo di Young** di un oggetto può essere praticamente **identico per trazione o compressione**, nei due casi il **limite di rottura può essere molto differente**

Materiale	Massa volumica $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Modulo di Young $E$ (10 <sup>9</sup> N/m <sup>2</sup> )	Limite di rottura $S_r$ (10 <sup>6</sup> N/m <sup>2</sup> )	Limite di snervamento $S_s$ (10 <sup>6</sup> N/m <sup>2</sup> )
Acciaio <sup>a</sup>	7860	200	400	250
Alluminio	2710	70	110	95
Vetro	2190	65	50 <sup>b</sup>	—
Calcestruzzo <sup>c</sup>	2320	30	40 <sup>b</sup>	—
Legno <sup>d</sup>	525	13	50 <sup>b</sup>	—
Osso	1900	9 <sup>b</sup>	170 <sup>b</sup>	—
Polistirene	1050	3	48	—

<sup>a</sup> Acciaio da costruzione (ASTM A36).    <sup>b</sup> In compressione.    <sup>c</sup> Ad alta resistenza.  
<sup>d</sup> Abete standard dell'America nordoccidentale.



**Esempio di tensionamento manuale: il dipinto viene vincolato alla propria struttura di sostegno sfruttando il pre-esistente tensionamento su telaio interinale**



**Esempio di tensionamento manuale con l'ausilio di pinza tenditele; vincolo puntuale (sellerine)**

P.Buscaglia

Restauro - Dinamica I

29

# MIGLIORAMENTO TECNICO DELLA STRUTTURA DI SOSTEGNO

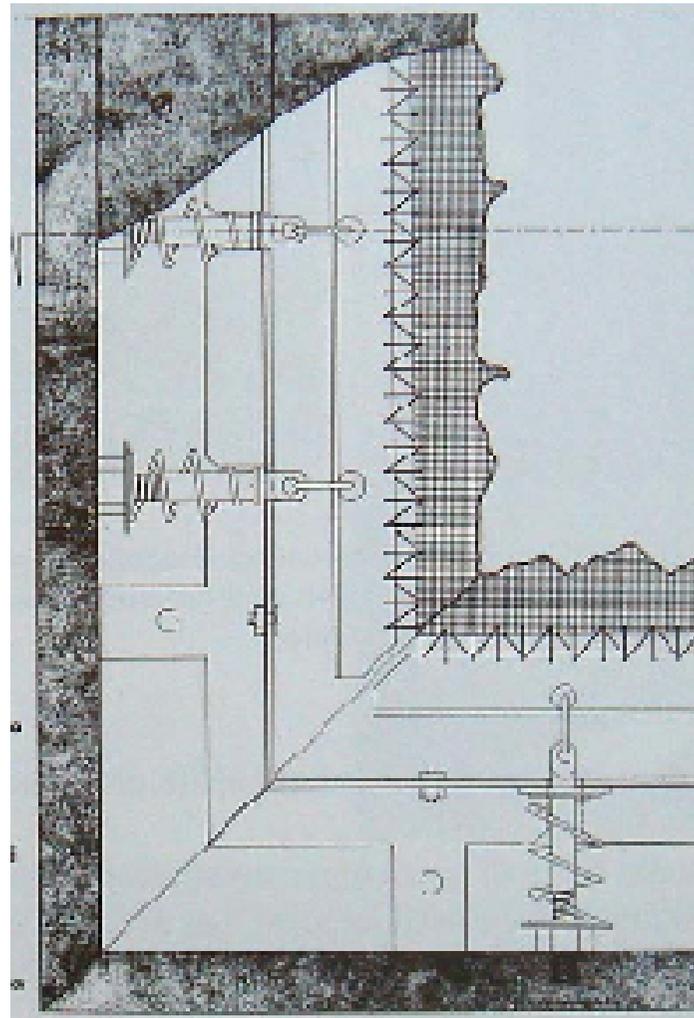


A) TELAIO FISSO



B)

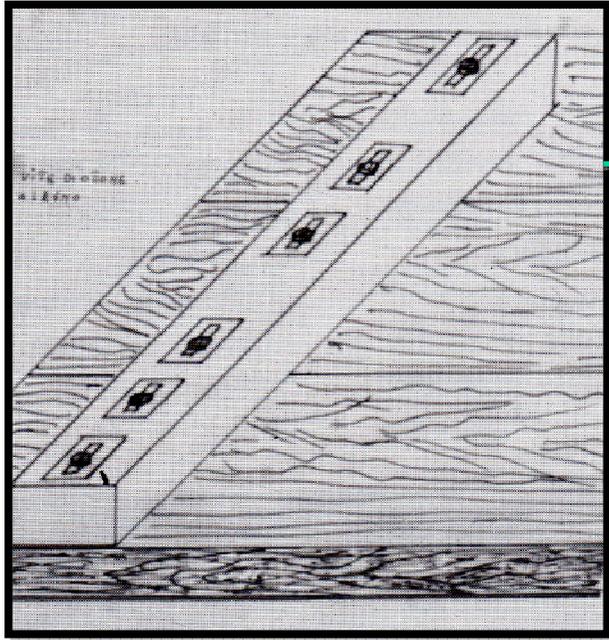
TELAIO AD ESPANSIONE MANUALE  
P. Buscaglia



C)

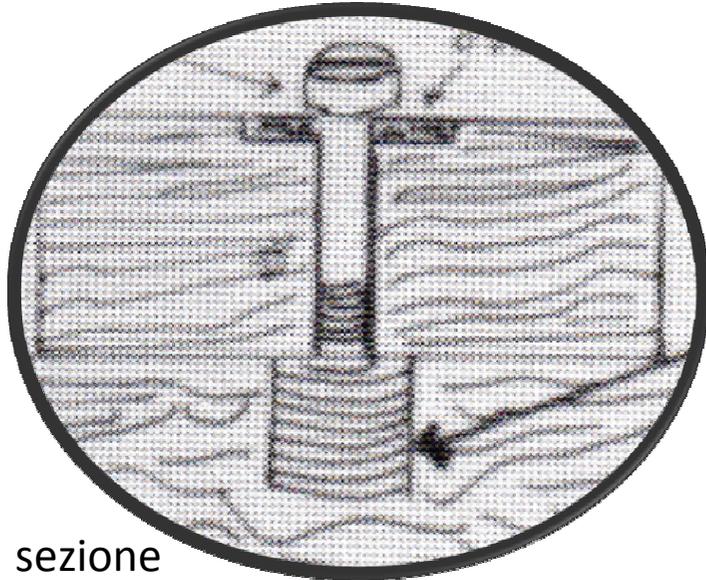
SISTEMA DI TENSIONAMENTO A TENSIONE CONTINUA  
Restauro - Dinamica I

ESEMPIO  
DI  
MOTO  
ARMONICO  
SMORZATO



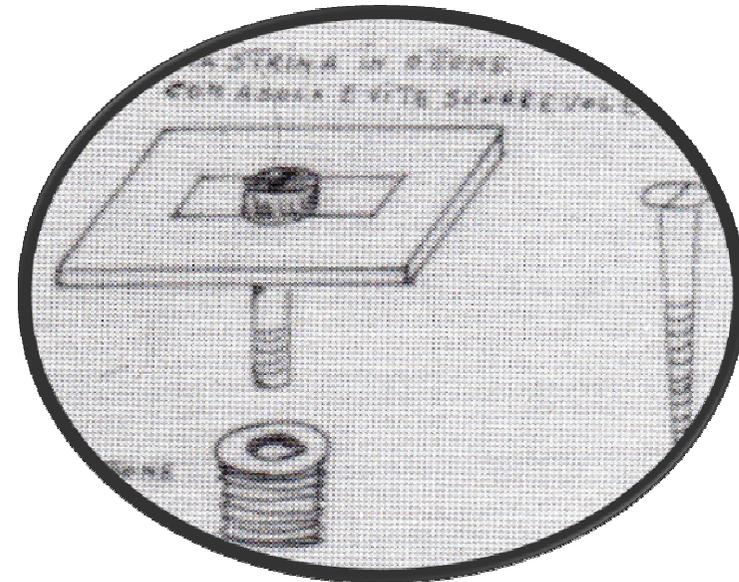
TRAVERSATURA AD ASOLA:  
un tentativo di miglioramento nel  
controllo dei movimenti del legno  
(OPD CON CIRO CASTELLI)

Autocritica: NON PERMETTE LO SCORRIMENTO  
DEL PERNO METALLICO NELLA FERITOIA,  
MA OSCILLAZIONE DIFFICOLTOSA



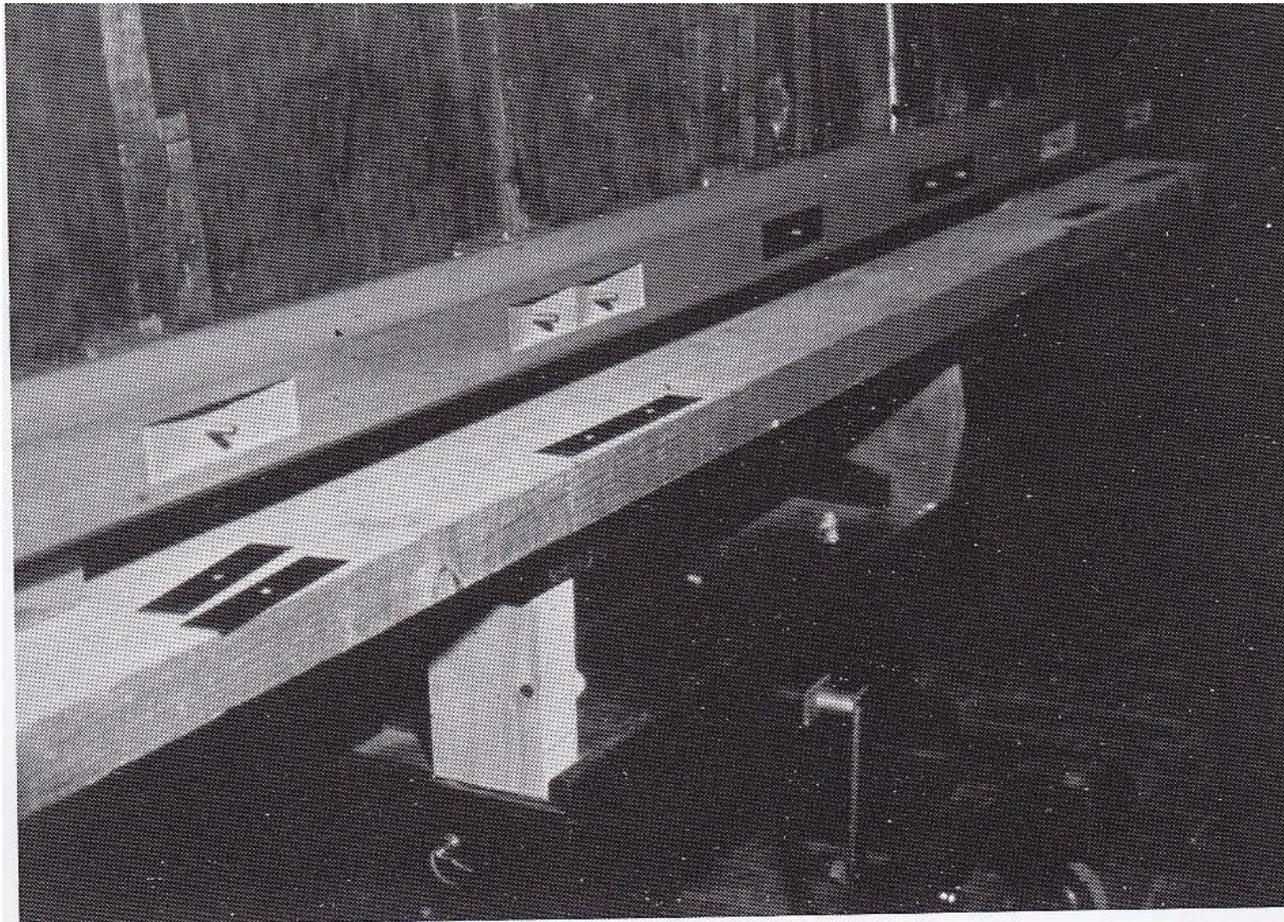
sezione

P.Buscaglia



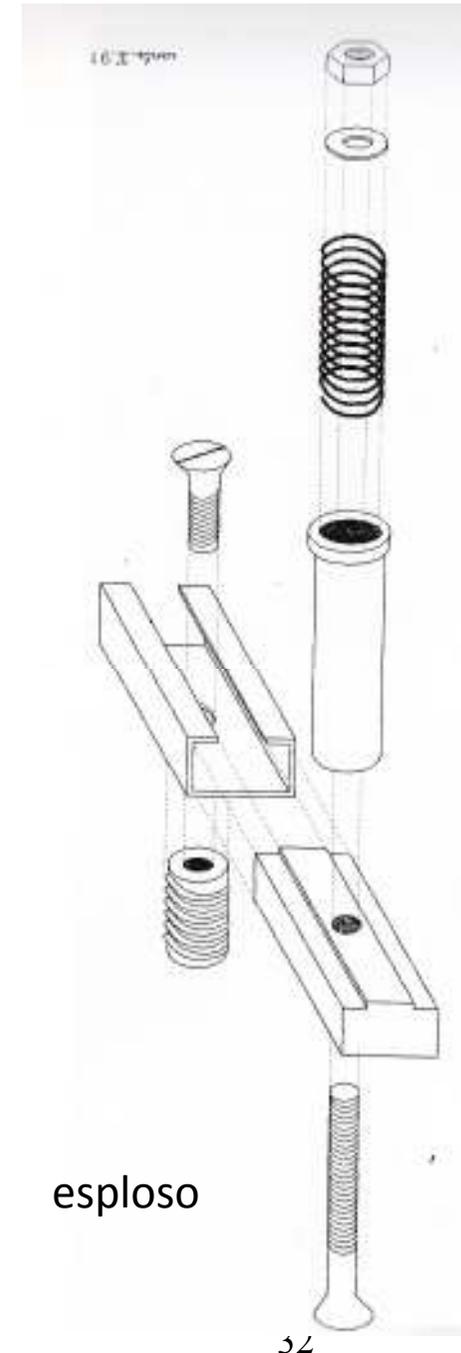
esploso

EVOLUZIONE: → TRAVERSATURA AD ASOLA  
CON INSERIMENTO DELLA MOLLA  
-OPD CON CIRO CASTELLI-  
(contenimento dei movimenti  
naturalì del legno)



P.Buscaglia

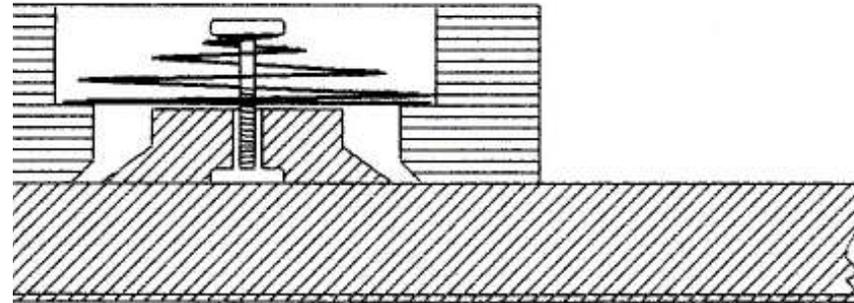
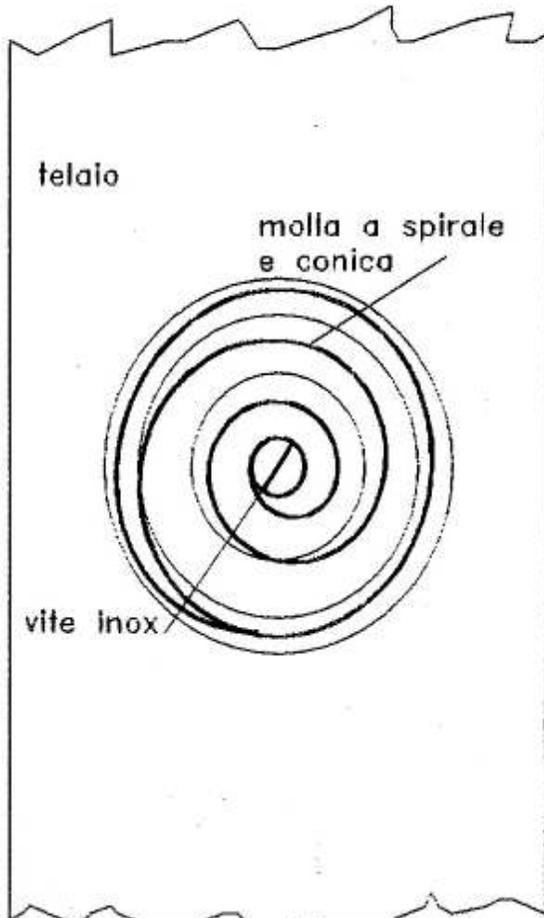
Restauro - Dinamica I



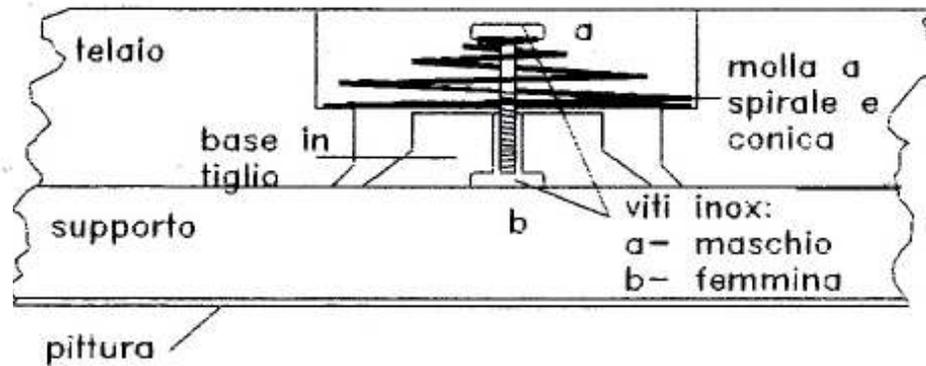
ULTERIORE EVOLUZIONE: →

ANCORAGGIO AL SUPPORTO CON  
INSERIMENTO DI MOLLA ELICOIDALE  
(OPD CON CIRO CASTELLI)

vista dall'alto



vista frontale



vista laterale

OTTIMO ESEMPIO DI MOTO ARMONICO SMORZATO

# Elasticità dei corpi: trazione e compressione

## Esempio

Si vuole tendere un cuoio dipinto per restaurarlo. Il suo spessore è di 2 mm e la superficie di 40 cm x 20 cm. Sapendo che per quel tipo di cuoio il modulo di Young vale  $E = 0,5 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$  e che la rottura avviene in seguito ad un allungamento di  $\Delta L/L = 0.0005$ , qual è la massima forza che possiamo applicare sul lato basso della pelle in modo da non superare il carico di rottura? Cosa accadrebbe se il modulo di Young fosse di  $E = 5 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ ?

Il questo caso si ha:

$$\frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta L}{L} = 0,5 \cdot 10^9 \cdot 0,0005 = 2,5 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

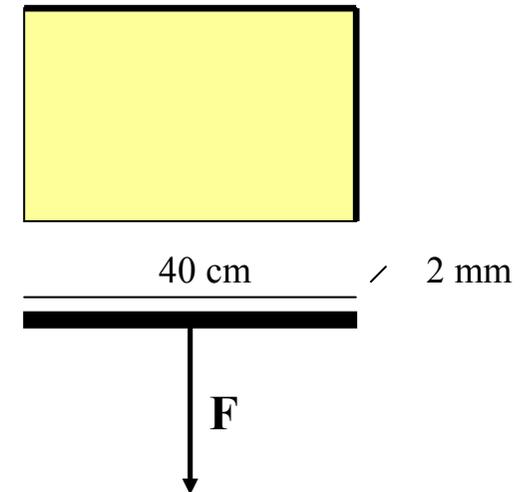
L'area della pelle in tensione è:

$$A = 0,4 \cdot 0,002 = 0,0008 \text{ m}^2$$

La forza massima applicabile è quindi:

$$F = 2,5 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^{-4} = 200 \text{ N}$$

Rifacendo i conti con  $E = 5 \text{ GPa}$ :  $F = 2000 \text{ N}$



Quindi il modulo di Young ci fornisce una stima della resistenza del materiale

### Il processo di restauro conservativo

Il primo obiettivo del processo è l'ammorbidimento e l'idratazione della pergamena danneggiata per restituire flessibilità alle pagine e sciogliere la sostanza adesiva formata con il danneggiamento del collagene. Ciò viene conseguito esponendo il manoscritto a vapori di acqua, alcol etilico e alcol n-butilico per un tempo che può variare dalle poche ore ad alcuni giorni a seconda delle sue caratteristiche (dimensioni, gravità del danno, ecc.) sino a consentire la separazione delle pagine [5], [6].

L'elevato grado di ammorbidimento della pergamena è il risultato dell'azione combinata dei vapori adsorbiti di acqua e alcoli (l'alcol n-butilico ne prolunga la durata). Essi ammorbidiscono la sostanza adesiva formata e la matrice del derma che fissa le fibre di collagene e favoriscono la riorganizzazione strutturale tipica delle fibre di collagene. Il trattamento della pergamena con soluzione idroalcolica di urea [8] e cloruro sodico a basse concentrazioni (1-2% p.) si è dimostrato efficace per aumentarne l'elasticità e non provoca effetti collaterali indesiderati: le fibre tendono infatti a riacquistare più efficacemente le proprietà strutturali e di elasticità originali.

Pertanto, prima di immergere per breve tempo in detta soluzione le pagine separate nella fase di ammorbidimento, su di esse vengono eseguite prove di solubilità con la soluzione idroalcolica di urea e cloruro sodico degli inchiostri e dei pigmenti presenti. In caso di esito positivo, si provvede al fissaggio degli inchiostri e dei pigmenti mediante applicazione a pennello di un fissativo idoneo.

Dopo lavaggio con una soluzione idroalcolica pura, le pagine vengono tese su telai o su tavole magnetiche e lasciate asciugare in aria ambiente. L'eventuale consolidamento delle pagine dopo asciugatura con velature parziali costituisce normale prassi dei restauratori e conclude le operazioni di restauro conservativo.

## Esempio

Per una pergamena del XVI secolo di capra danneggiata da fuoco (provenienza BNU di Torino) si sono trovati:

### Prima del trattamento

Lato pelo  $E = (0,34 \pm 0,2) 10^9 \text{ N/m}^2$

Lato carne  $E = (0,78 \pm 0,4) 10^9 \text{ N/m}^2$

### Dopo il trattamento

Lato pelo  $E = (0,80 \pm 0,5) 10^9 \text{ N/m}^2$

Lato carne  $E = (3,44 \pm 0,8) 10^9 \text{ N/m}^2$

Alessandro Facchini  
Carlo Enrico Bottani

## Caratterizzazione e processo di restauro di pergamene antiche

### Characterisation and Conservative Restoring Process of Ancient Parchments

Le più antiche testimonianze di scrittura su pelli risalgono alla quarta dinastia egizia (2700 a.C.) ed è con l'adozione da parte dei popoli assiri (800 a.C.) dell'aramaico, praticamente impossibile da incidere su tavolette di argilla, che viene introdotto l'uso della pergamena [1]. I metodi di lavorazione, diversi da quelli del cuoio e sostanzialmente basati sulla depilazione, tensione su telai e successive bagnature, raschiature e asciugature di pelli varie e più diffusamente di ovini, sono noti dall'antichità e sono rimasti praticamente inalterati nel tempo.

La sostanza base della pergamena è il derma (l'epidermide e l'ipoderma sono stati allontanati nella lavorazione), costituito da un fitto intreccio di fibre di collagene fissate da una matrice a base di glicoproteine e proteoglicani che agisce da gel reversibile. Le proprietà variano nello stesso foglio di pergamena (dorso, ventre, ascelle, ecc.) e a seconda dell'età e dell'alimentazione dell'animale dalla pelle del quale essa è stata ricavata nonché dalle condizioni ambientali in cui l'animale è vissuto. Ciò spiega le difficoltà che si incontrano nell'individuare proprietà misurabili della pergamena, di validità generale e sufficienti per caratterizzarla, e quindi idonee per validare un possibile processo di restauro conservativo.

Per raggiungere questo scopo il Dipartimento di Ingegneria Nucleare ha avviato nel 1997 una rete di indagini atte a:

a) sviluppare a livello multiscala l'esame delle

A.Komero

## Esempio

Il modulo di Young è tra i vari parametri che sono misurati per determinare la resistenza di una pergamena.

1. Manoscritto membranaceo del XV secolo danneggiato da fuoco. (Per gentile concessione della Biblioteca Nazionale Universitaria di Torino)

Fire-damaged parchment manuscript of the XV century. (kindly authorised by Biblioteca Nazionale Universitaria di Torino)

2. Pagina di un manoscritto membranaceo del XV secolo danneggiato da fuoco. (Per gentile concessione della Biblioteca Nazionale Universitaria di Torino)

Page of a fire-damaged parchment manuscript of the XV century. (kindly authorized by Biblioteca Nazionale Universitaria di Torino)

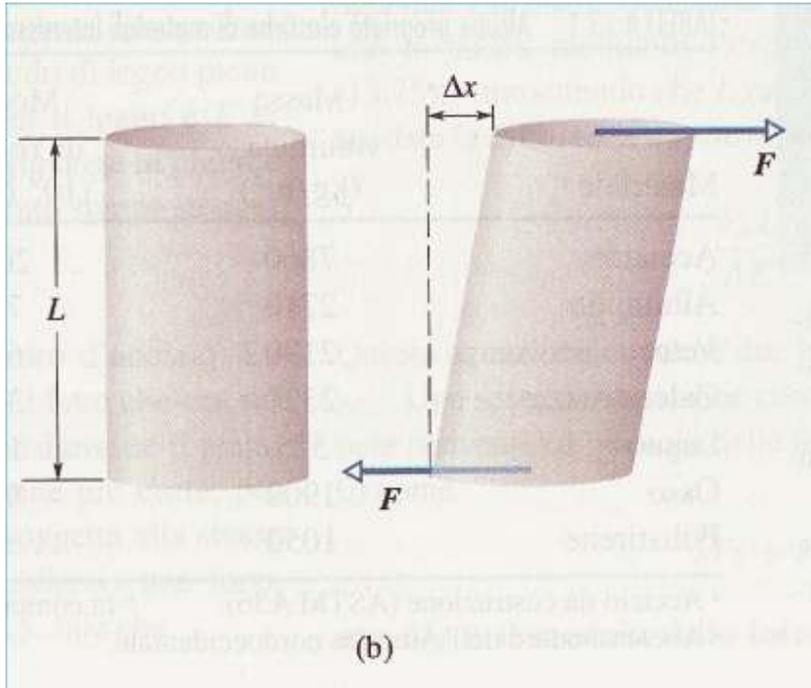


Numero 8 - aprile 2004

Beni Culturali e Politecnico di Milano

Cultural Heritage and the Politecnico di Milano

## Elasticità dei corpi: taglio



Anche in questo caso lo **sforzo** è definito come una forza per unità di superficie ( $F/A$ ), ma il vettore forza è parallelo al piano della sezione invece che perpendicolare ad esso.

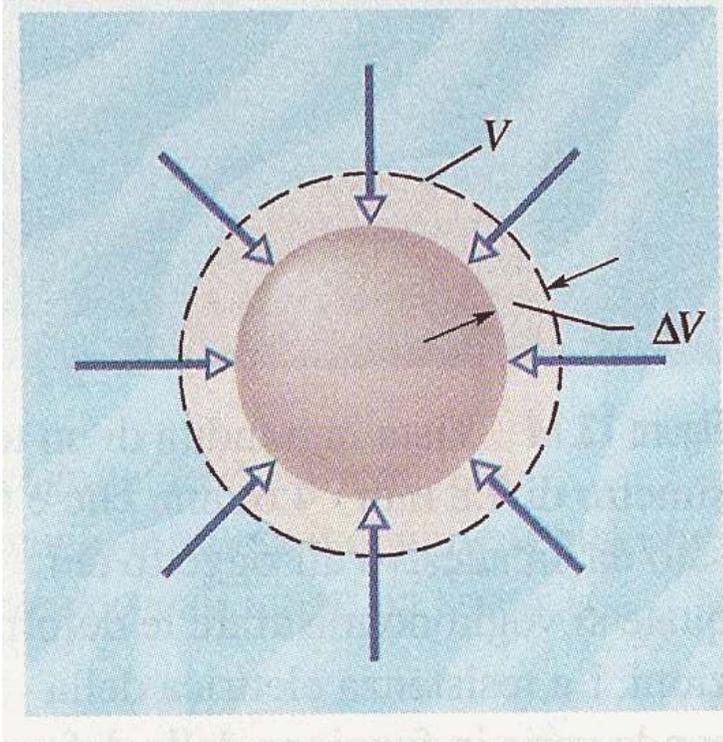
La **deformazione** è espressa dalla quantità adimensionale  $\Delta x/L$ .

Il modulo è chiamato **modulo di taglio** o **di scorrimento** ed è rappresentato nel linguaggio tecnico-scientifico dal simbolo  $G$ . Per cui:

$$\frac{F}{A} = G \cdot \frac{\Delta x}{L}$$

Gli sforzi di taglio costituiscono un fattore determinante per esempio nella rotazione degli alberi di trasmissione sotto carico e nelle fratture ossee

## Elasticità dei corpi: compressione idraulica uniforme



Anche in questo caso lo **sforzo** è definito come una forza per unità di superficie ( $F/A$ ) e coincide con la pressione ( $p = F/A$ ) esercitata dal fluido sull'oggetto (la pressione non è altro che la forza diviso la superficie su cui è applicata)

La **deformazione** è espressa dalla quantità adimensionale  $\Delta V/V$  essendo  $V$  il volume di partenza e  $\Delta V$  la variazione di volume quando si esercita la pressione sull'oggetto.

Il modulo è chiamato **modulo di comprimibilità** o **di compressione** ed è rappresentato nel linguaggio tecnico-scientifico dal simbolo  $B$ . Per cui:

$$\frac{F}{A} = B \cdot \frac{\Delta V}{V} \quad \Rightarrow \quad p = B \cdot \frac{\Delta V}{V}$$

# Elasticità dei corpi: trazione e compressione

## Esempio

Si vuole tendere un cuoio dipinto per restaurarlo. Il suo spessore è di 2 mm e la superficie di 40 cm x 20 cm. Sapendo che per quel tipo di cuoio il modulo di Young vale  $E = 0,5 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$  e che la rottura avviene in seguito ad un allungamento di  $\Delta L/L = 0,0005$ , qual è la massima forza che possiamo applicare sul lato basso della pelle in modo da non superare il carico di rottura? Cosa accadrebbe se il modulo di Young fosse di  $E = 5 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ ?

Il questo caso si ha:

$$\frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta L}{L} = 0,5 \cdot 10^9 \cdot 0,0005 = 2,5 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

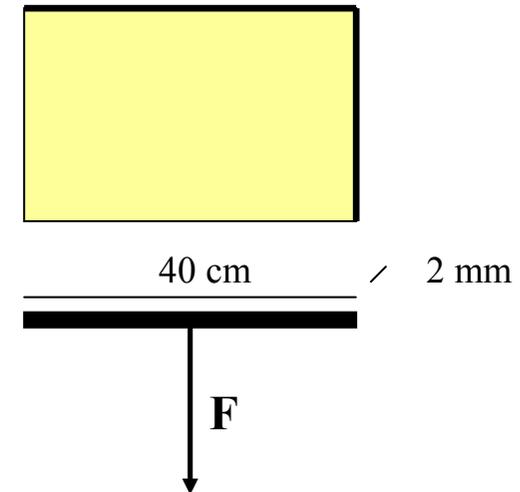
L'area della pelle in tensione è:

$$A = 0,4 \cdot 0,002 = 0,0008 \text{ m}^2$$

La forza massima applicabile è quindi:

$$F = 2,5 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^{-4} = 200 \text{ N}$$

Rifacendo i conti con  $E = 5 \text{ GPa}$ :  $F = 2000 \text{ N}$



Quindi il modulo di Young ci fornisce una stima della resistenza del materiale

### Il processo di restauro conservativo

Il primo obiettivo del processo è l'ammorbidimento e l'idratazione della pergamena danneggiata per restituire flessibilità alle pagine e sciogliere la sostanza adesiva formata con il danneggiamento del collagene. Ciò viene conseguito esponendo il manoscritto a vapori di acqua, alcol etilico e alcol n-butilico per un tempo che può variare dalle poche ore ad alcuni giorni a seconda delle sue caratteristiche (dimensioni, gravità del danno, ecc.) sino a consentire la separazione delle pagine [5], [6].

L'elevato grado di ammorbidimento della pergamena è il risultato dell'azione combinata dei vapori adsorbiti di acqua e alcoli (l'alcol n-butilico ne prolunga la durata). Essi ammorbidiscono la sostanza adesiva formata e la matrice del derma che fissa le fibre di collagene e favoriscono la riorganizzazione strutturale tipica delle fibre di collagene. Il trattamento della pergamena con soluzione idroalcolica di urea [8] e cloruro sodico a basse concentrazioni (1-2% p.) si è dimostrato efficace per aumentarne l'elasticità e non provoca effetti collaterali indesiderati: le fibre tendono infatti a riacquistare più efficacemente le proprietà strutturali e di elasticità originali.

Pertanto, prima di immergere per breve tempo in detta soluzione le pagine separate nella fase di ammorbidimento, su di esse vengono eseguite prove di solubilità con la soluzione idroalcolica di urea e cloruro sodico degli inchiostri e dei pigmenti presenti. In caso di esito positivo, si provvede al fissaggio degli inchiostri e dei pigmenti mediante applicazione a pennello di un fissativo idoneo.

Dopo lavaggio con una soluzione idroalcolica pura, le pagine vengono tese su telai o su tavole magnetiche e lasciate asciugare in aria ambiente. L'eventuale consolidamento delle pagine dopo asciugatura con velature parziali costituisce normale prassi dei restauratori e conclude le operazioni di restauro conservativo.

## Esempio

Per una pergamena di capra del XVI secolo danneggiata da fuoco (provenienza BNU di Torino) si sono trovati:

### Prima del trattamento

Lato pelo	$E = (0,34 \pm 0,2) 10^9 \text{ N/m}^2$
-----------	---

Lato carne	$E = (0,78 \pm 0,4) 10^9 \text{ N/m}^2$
------------	---

### Dopo il trattamento

Lato pelo	$E = (0,80 \pm 0,5) 10^9 \text{ N/m}^2$
-----------	---

Lato carne	$E = (3,44 \pm 0,8) 10^9 \text{ N/m}^2$
------------	---

## Caratterizzazione e processo di restauro di pergamene antiche

### Characterisation and Conservative Restoring Process of Ancient Parchments

Le più antiche testimonianze di scrittura su pelli risalgono alla quarta dinastia egizia (2700 a.C.) ed è con l'adozione da parte dei popoli assiri (800 a.C.) dell'aramaico, praticamente impossibile da incidere su tavolette di argilla, che viene introdotto l'uso della pergamena [1]. I metodi di lavorazione, diversi da quelli del cuoio e sostanzialmente basati sulla depilazione, tensione su telai e successive bagnature, raschiature e asciugature di pelli varie e più diffusamente di ovini, sono noti dall'antichità e sono rimasti praticamente inalterati nel tempo.

La sostanza base della pergamena è il derma (l'epidermide e l'ipoderma sono stati allontanati nella lavorazione), costituito da un fitto intreccio di fibre di collagene fissate da una matrice a base di glicoproteine e proteoglicani che agisce da gel reversibile. Le proprietà variano nello stesso foglio di pergamena (dorso, ventre, ascelle, ecc.) e a seconda dell'età e dell'alimentazione dell'animale dalla pelle del quale essa è stata ricavata nonché dalle condizioni ambientali in cui l'animale è vissuto. Ciò spiega le difficoltà che si incontrano nell'individuare proprietà misurabili della pergamena, di validità generale e sufficienti per caratterizzarla, e quindi idonee per validare un possibile processo di restauro conservativo.

Per raggiungere questo scopo il Dipartimento di Ingegneria Nucleare ha avviato nel 1997 una rete di indagini atte a:

a) sviluppare a livello multiscala l'esame delle

A.Komero

## Esempio

Il modulo di Young è tra i vari parametri che sono misurati per determinare la resistenza di una pergamena.

1. Manoscritto membranaceo del XV secolo danneggiato da fuoco. (Per gentile concessione della Biblioteca Nazionale Universitaria di Torino)

Fire-damaged parchment manuscript of the XV century. (kindly authorised by Biblioteca Nazionale Universitaria di Torino)

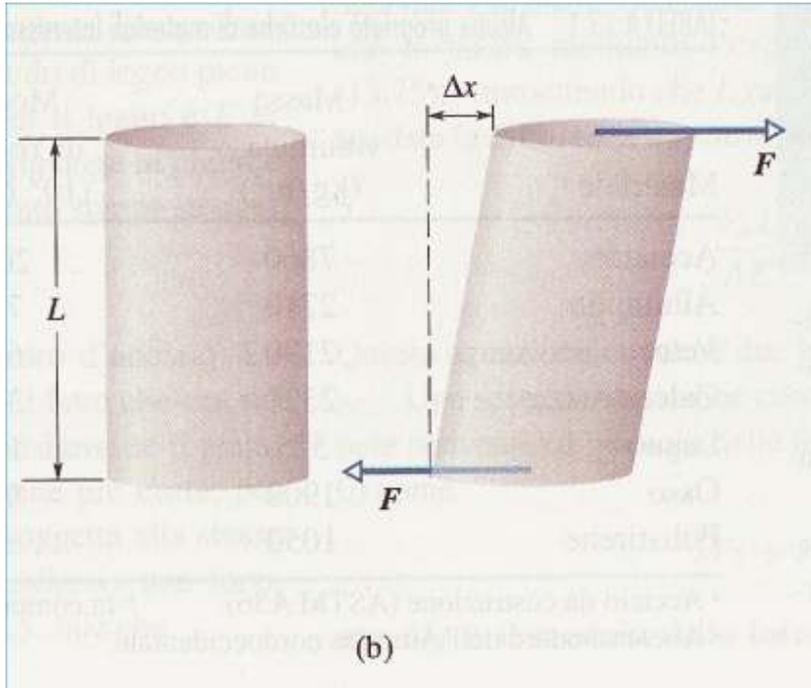
2. Pagina di un manoscritto membranaceo del XV secolo danneggiato da fuoco. (Per gentile concessione della Biblioteca Nazionale Universitaria di Torino)

Page of a fire-damaged parchment manuscript of the XV century. (kindly authorized by Biblioteca Nazionale Universitaria di Torino)



Numero 8 - aprile 2004  
Beni Culturali e Politecnico di Milano  
Cultural Heritage and the Politecnico di Milano

## Elasticità dei corpi: taglio



Anche in questo caso lo **sforzo** è definito come una forza per unità di superficie ( $F/A$ ), ma il vettore forza è parallelo al piano della sezione invece che perpendicolare ad esso.

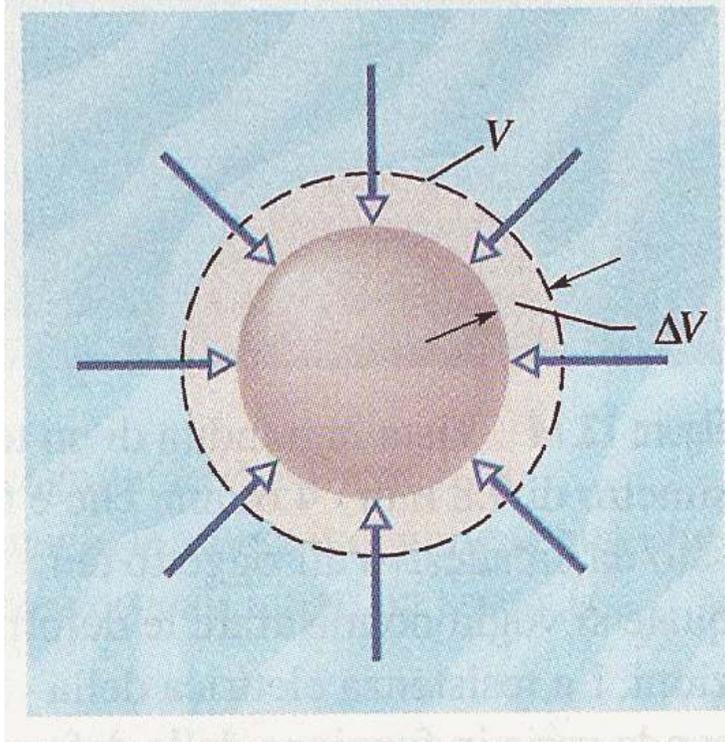
La **deformazione** è espressa dalla quantità adimensionale  $\Delta x/L$ .

Il modulo è chiamato **modulo di taglio** o **di scorrimento** ed è rappresentato nel linguaggio tecnico-scientifico dal simbolo  $G$ . Per cui:

$$\frac{F}{A} = G \cdot \frac{\Delta x}{L}$$

Gli sforzi di taglio costituiscono un fattore determinante per esempio nella rotazione degli alberi di trasmissione sotto carico e nelle fratture ossee

## Elasticità dei corpi: compressione idraulica uniforme



Anche in questo caso lo **sforzo** è definito come una forza per unità di superficie ( $F/A$ ) e coincide con la pressione ( $p = F/A$ ) esercitata dal fluido sull'oggetto (la pressione non è altro che la forza diviso la superficie su cui è applicata)

La **deformazione** è espressa dalla quantità adimensionale  $\Delta V/V$  essendo  $V$  il volume di partenza e  $\Delta V$  la variazione di volume quando si esercita la pressione sull'oggetto.

Il modulo è chiamato **modulo di comprimibilità** o **di compressione** ed è rappresentato nel linguaggio tecnico-scientifico dal simbolo  $B$ . Per cui:

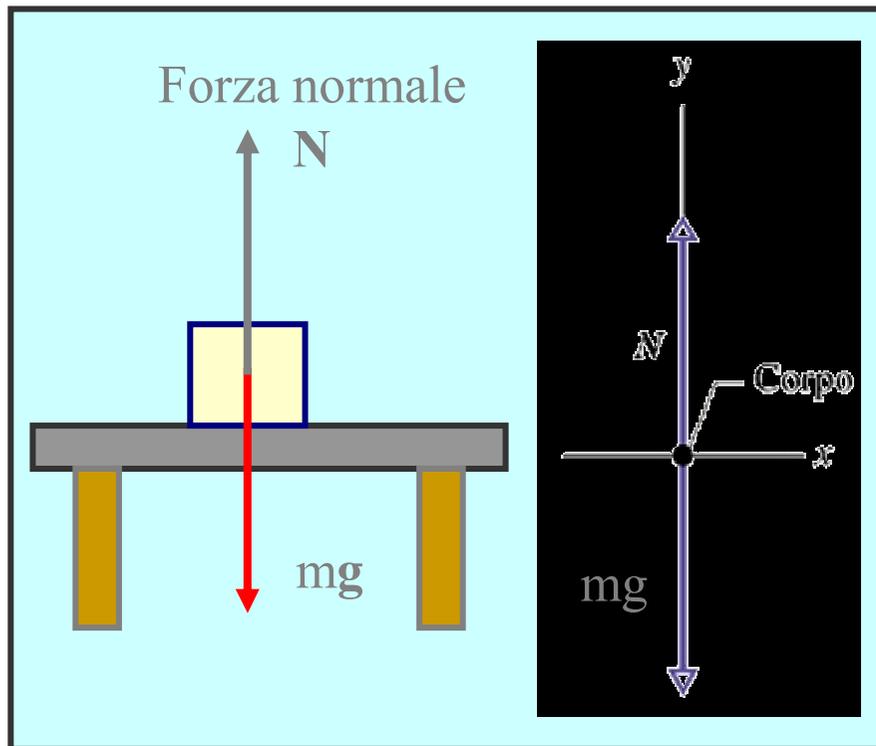
$$\frac{F}{A} = B \cdot \frac{\Delta V}{V} \quad \Rightarrow \quad p = B \cdot \frac{\Delta V}{V}$$

# Reazioni vincolari

Supponiamo di avere un oggetto appoggiato su un piano. L'oggetto **non** subisce nessuna **accelerazione in direzione perpendicolare al piano**.

Su di esso **agisce la forza peso**, se noi premiamo sull'oggetto dall'alto verso il basso, entro certi limiti, **l'oggetto non si muove**. Il **secondo principio della dinamica** ci dice che deve **esistere** una **forza N** tale che in questo caso particolare soddisfa l'espressione:

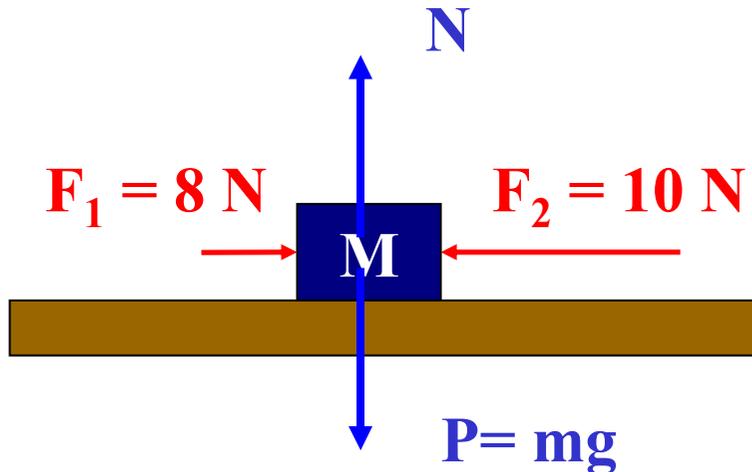
$$N + mg = ma = 0 \rightarrow N = -mg$$



Questa forza, detta **reazione vincolare**, è **sempre ortogonale al vincolo** (cioè all'oggetto che costituisce impedimento al moto); **se l'accelerazione nella direzione ortogonale al vincolo è nulla**, allora **N** ha modulo tale da **annullare le componenti delle altre forze aventi la stessa direzione**.

## Dinamica: secondo principio

Nell'esempio di prima



Oltre a  $F_1$  ed  $F_2$  sul corpo agisce la forza peso  $P=mg$ . Ma il corpo non si muove lungo la verticale quindi deve esserci forza che equilibra  $\rightarrow$   $N$  reazione del piano perpendicolare al vincolo

lungo asse  $y \rightarrow N = mg$

$$\sum_i F_{i,x} = F_1 - F_2 = 8 - 10 = -2\text{N}$$

Il corpo accelera verso sinistra con un moto uniformemente accelerato e accelerazione pari a (è come se si esercitasse **solo** una forza di 2 N verso sinistra):

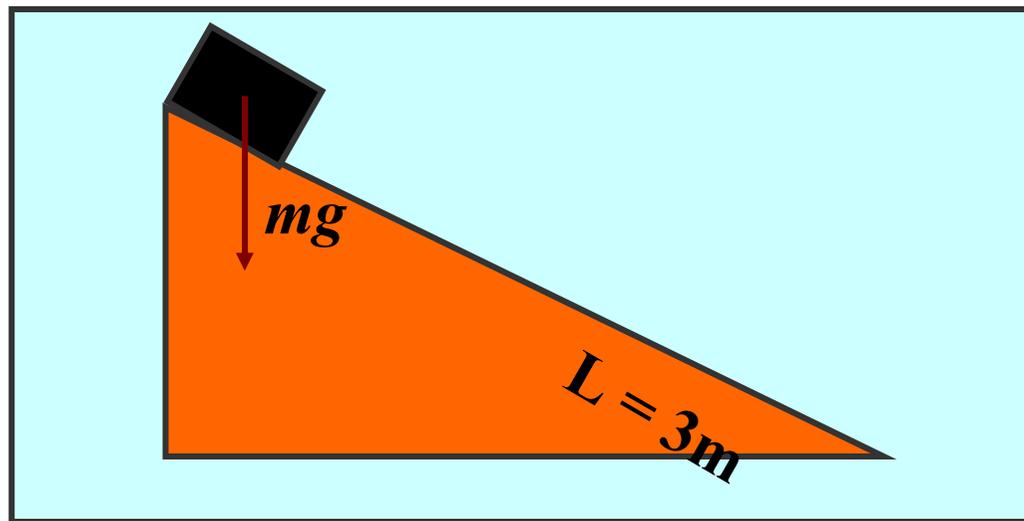
$$a = \frac{F}{m} = \frac{-2}{4} = -0,5 \frac{m}{s^2}$$

Il segno - indica che il moto è verso sinistra

# Il piano inclinato

Una cassa di mele di massa  $m = 30$  kg scivola lungo un pianale inclinato di  $30^\circ$  rispetto al suolo. Quanto tempo impiega la cassa per raggiungere la base del pianale se questo è lungo  $3$  m? Con quale velocità la cassa raggiunge il suolo, se la velocità iniziale è nulla?

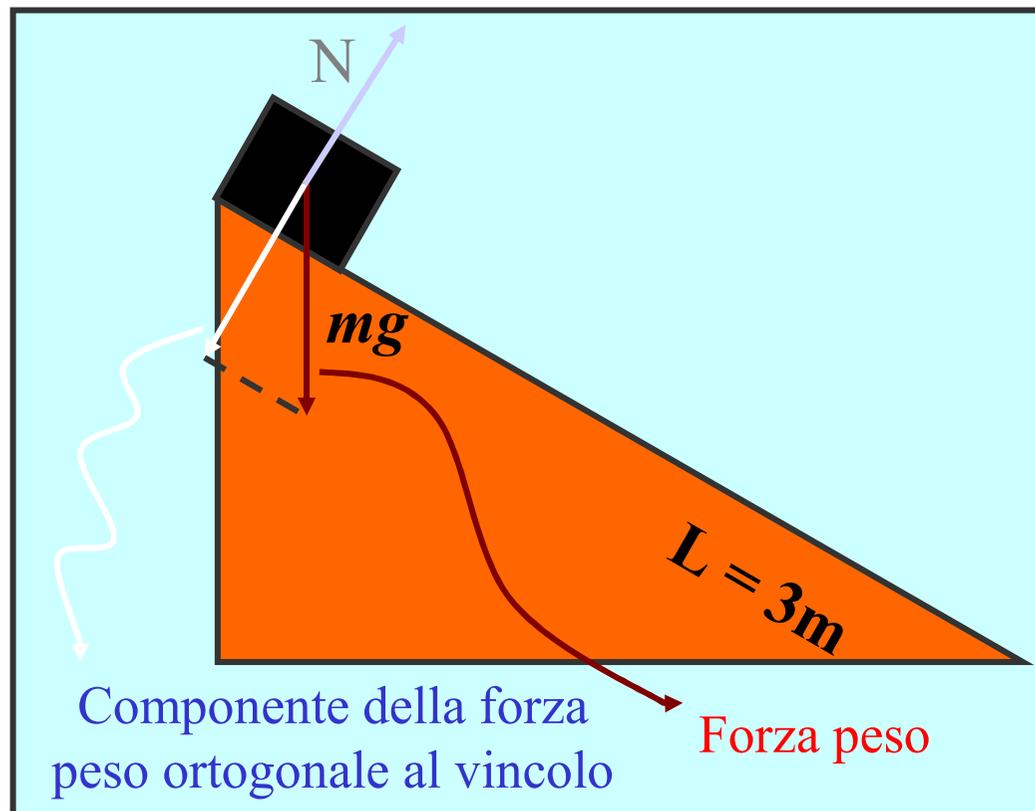
E' importante **disegnare su un grafico** la situazione descritta nel testo e **tracciare tutte le forze con direzione e verso corretti**  
Forze agenti sono: forza **peso** e **reazione vincolare**.



# Diagramma delle forze

Il piano inclinato si comporta come un vincolo per il moto della cassa. Esso esercita quindi una **forza di reazione ortogonale al piano stesso**.

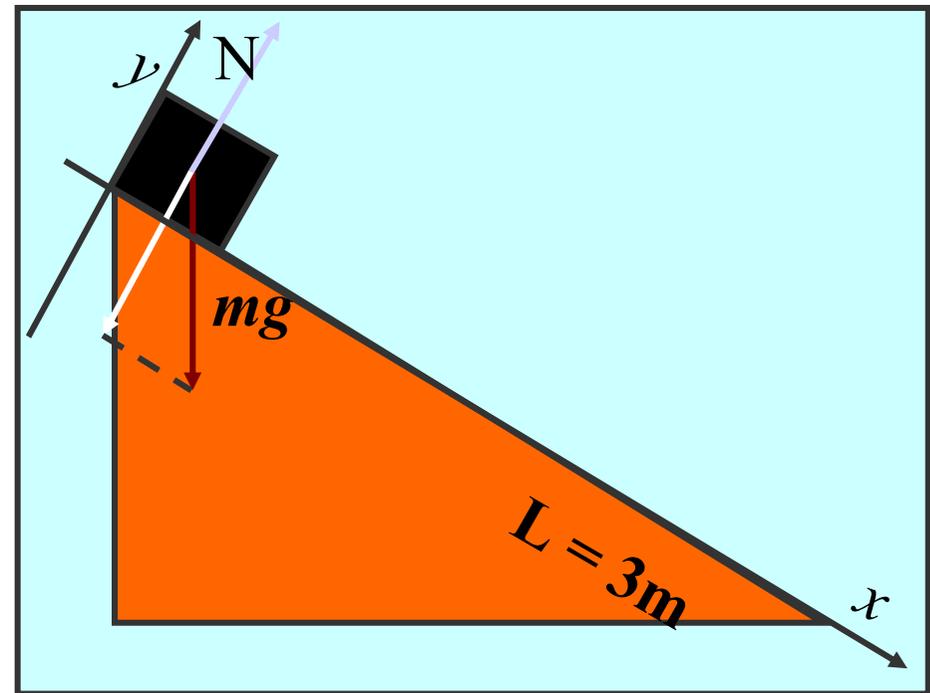
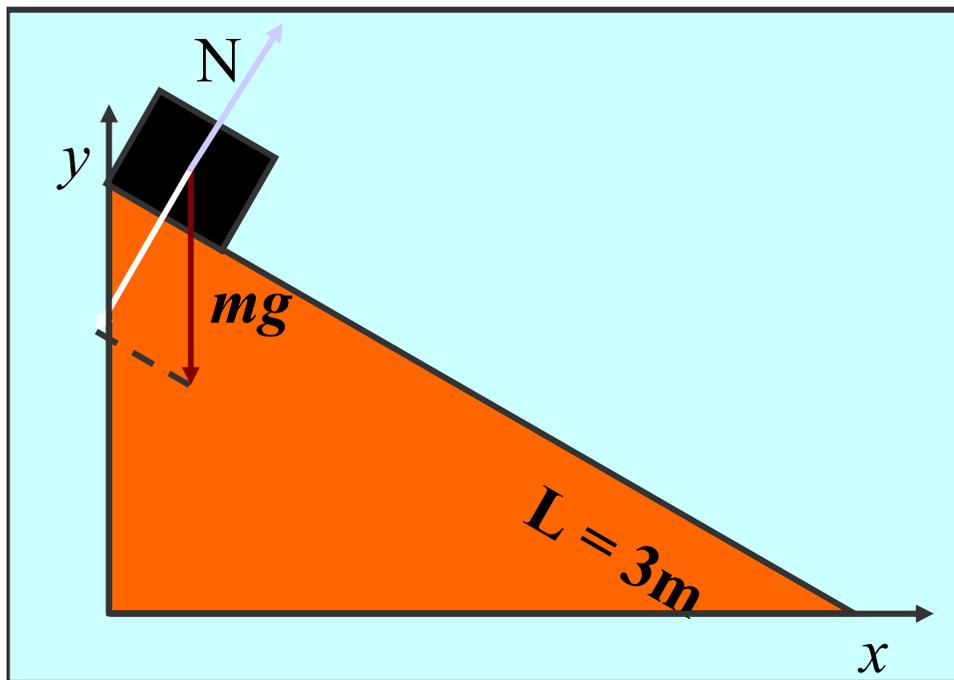
Il modulo della reazione vincolare  $N$  è tale da compensare la componente della forza peso **ortogonale al piano**.



# Sistema di riferimento

Dobbiamo **scegliere un sistema di riferimento** nel quale descrivere il moto della cassa. Il **moto** si svolge **tutto in un piano**. Quindi si usano coordinate cartesiane **x** e **y**.

Ci sono due scelte per gli assi. La **prima** è quella di prendere l'asse delle **x** **parallelo al terreno**. La **seconda** **x** parallelo a piano e **y** ortogonale ad esso

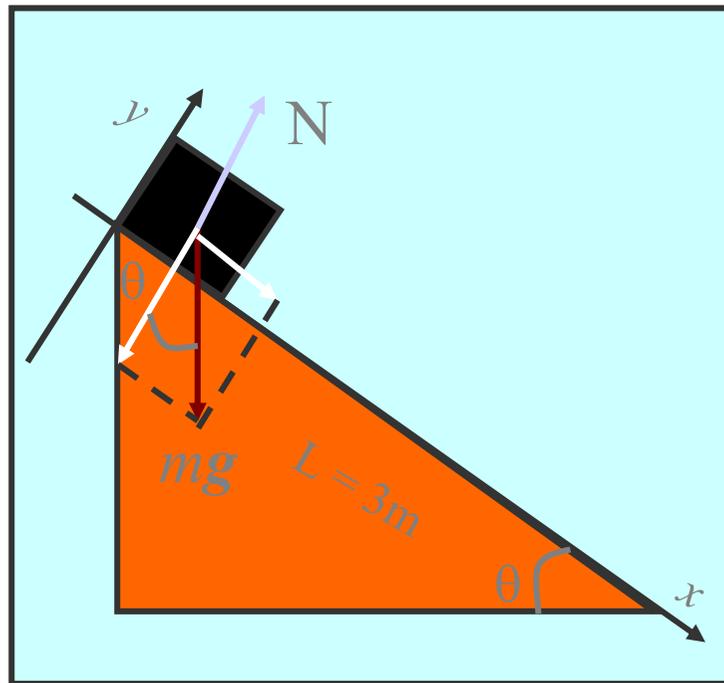


# Equazione del moto

Quale delle due scelte è la migliore? In entrambi i casi una delle due forze andrà scomposta lungo gli assi. Scelgo la più semplice

il piano **inclinato agisce da vincolo** → l'accelerazione in direzione **ortogonale** ad esso è **nulla** → sistema di riferimento con **l'asse x parallelo al piano inclinato** → l'equazione del moto è **semplificata**.

**l'equazione del moto** per la cassa è un'equazione **vettoriale**. Scriviamo le due equazioni lungo x e y



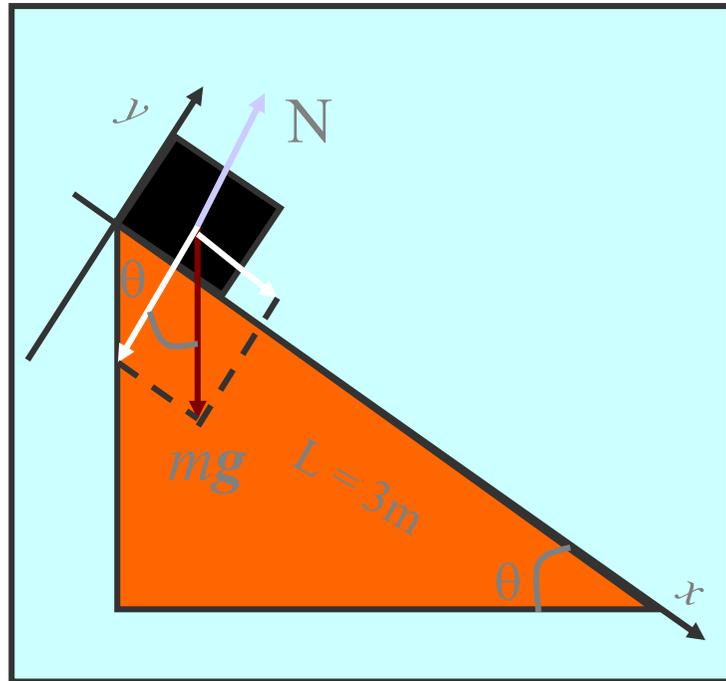
$$\sum_i \mathbf{F}_i = m\mathbf{a} \Rightarrow \begin{cases} mg \sin \theta = ma_x \\ -mg \cos \theta + N = ma_y \end{cases}$$

L'**accelerazione** lungo l'asse **y** è **nulla** per la presenza del vincolo. Pertanto:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = m\mathbf{a} \Rightarrow \begin{cases} mg \sin \theta = ma_x \\ -mg \cos \theta + N = 0 \end{cases}$$

# Legge oraria

ci sono **due incognite**, il modulo **N** della reazione vincolare e l'accelerazione lungo x,  $a_x$ ) e due equazioni indipendenti tra loro  $\rightarrow$  problema ha soluzione.



La prima equazione ci dà  
l'accelerazione:

$$mg \sin \theta = ma_x$$

$$a_x = g \sin \theta$$

La seconda fornisce il modulo  
della **reazione vincolare**:

$$N = mg \cos \theta$$

# Soluzione

L'accelerazione  $a_x$  è costante. Il moto lungo il piano inclinato è quindi **uniformemente accelerato**. Abbiamo già analizzato questo moto in cinematica, e quindi conosciamo già la **legge oraria corrispondente**:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_x(t - t_0)^2$$

Se scegliamo l'**origine** del nostro **sistema di assi** nel punto di **partenza della cassa** e fissiamo l'origine dei tempi in  $t_0 = 0$ , l'espressione diventa:

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

Ricordando la condizione iniziale sulla velocità (il testo del problema ci dice che la velocità iniziale  **$v_0$  è nulla**) otteniamo:

$$x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2$$

Interessa tempo impiegato dalla cassa a percorrere la lunghezza L del pianale.

$$L = \frac{1}{2} a_x t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2L}{a_x}} = \sqrt{\frac{2L}{g \sin \theta}}$$

Sostituendo i dati numerici:

$$t = \sqrt{2L/g \sin \theta} = \sqrt{(2 \cdot 3m)/(9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 0,5)} = 1,11s$$

**La velocità con la quale la cassa raggiunge il fondo del piano inclinato è un vettore parallelo all'asse x e con verso positivo. Il modulo può essere calcolato dalla relazione:**

$$v_x(t) = v_0 + a_x(t - t_0) = a_x t$$

Sostituendo l'espressione per il tempo impiegato per percorrere il pianale, otteniamo:

$$v(t) = a_x \sqrt{\frac{2L}{g \sin \theta}} = g \sin \theta \sqrt{\frac{2L}{g \sin \theta}} = \sqrt{2gL \sin \theta} = \sqrt{2gh}$$

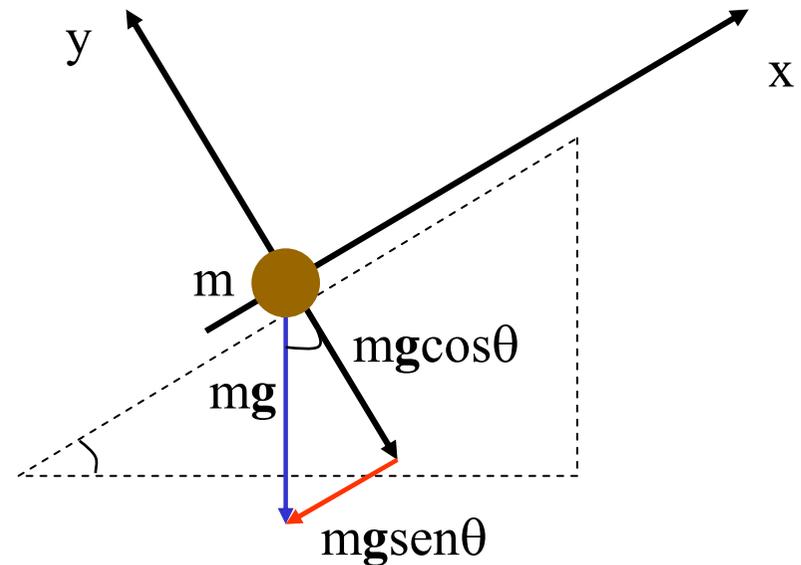
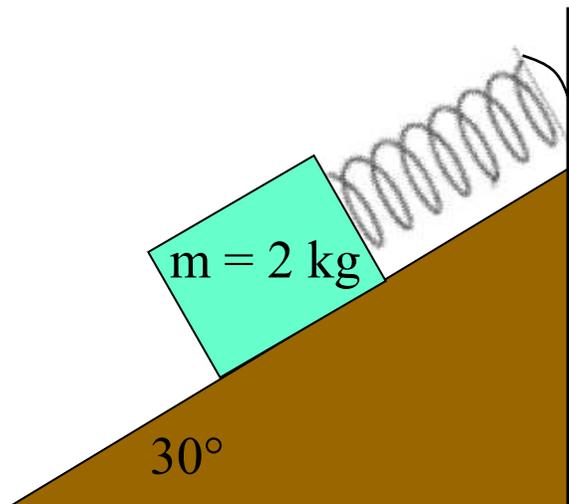
Sostituendo i dati numerici:

$$v = \sqrt{2gL \sin \theta} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,5 \cdot 3 \text{ m}} = 5,4 \text{ m/s}$$

# Esercizio

Una scatola di 2 kg è ferma su un piano privo di attrito, inclinato di un angolo di  $30^\circ$ , sospesa ad una molla. La molla si allunga di 3 cm.

- (a) Trovare la costante elastica della molla.
- (b) Se si sposta la scatola verso il basso lungo il piano inclinato, allontanandola di 5 cm dalla posizione di equilibrio, e poi la si lascia andare, quale sarà la sua accelerazione iniziale?



La forza peso si può scomporre nelle sue componenti x e y:

x  $mg \sin 30^\circ$

y  $mg \cos 30^\circ \longrightarrow$  Uguaglia la reazione vincolare del piano.

Uguaglia la forza elastica di richiamo della molla.

$$F_{el} = k \Delta x = mg \sin 30^\circ \Rightarrow k = \frac{mg \sin 30^\circ}{\Delta x} = \frac{2 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,5}{0,03 \text{ m}} = 327 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Se si sposta il corpo nella direzione negativa dell'asse x, la molla eserciterà sul corpo una forza di richiamo, nella direzione positiva dell'asse x che si somma alla componente della forza peso e per la legge di Newton da

$$k \Delta x_1 - mg \sin 30^\circ = ma \Rightarrow a = \frac{k \Delta x_1}{m} - g \sin 30^\circ = \frac{327 \cdot 0,05}{2} - 9,8 \cdot \frac{1}{2} = 3,27 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

# Attrito

Quando cerchiamo di muovere un oggetto che si trova a contatto con una superficie ci accorgiamo che **l'effetto della forza non è immediato**: se l'oggetto è *pesante* dobbiamo prima “*smuoverlo*” dalla sua posizione originale. Quando l'oggetto si mette in movimento, l'esperienza ci insegna che:

- la **forza che dobbiamo applicare per mantenere in moto l'oggetto è minore di quella necessaria per smuoverlo**;
- se smettiamo di applicare una forza, **l'oggetto si ferma**.

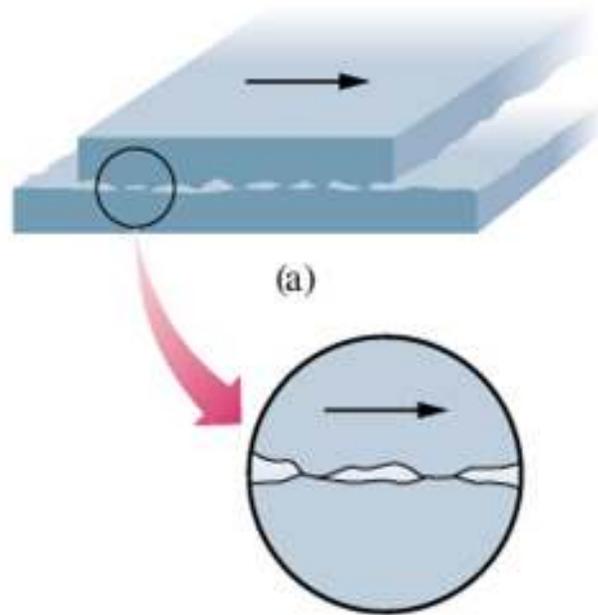
Queste osservazioni sarebbero in contraddizione con il secondo principio, a meno che non attribuiamo questi effetti a delle **forze che si generano nel contatto fra l'oggetto da muovere e la superficie** su cui questo è appoggiato o il mezzo in cui esso si muove.

Queste **forze** che si oppongono al moto di un oggetto si chiamano **ATTRITI**.

Ci sono **varie forme di attrito**, che vengono per lo più individuate e classificate in base alle diverse situazioni dinamiche in cui si trova l'oggetto.

# Attrito

Se sul pavimento è appoggiata una grande cassa e la si spinge con una piccola forza orizzontale  $F$ , è possibile che la cassa non si muova affatto. La ragione è che il pavimento esercita una **forza di attrito statico**  $f_s$ , che equilibra la forza  $F$ . Questa forza di attrito è dovuta ai legami tra le molecole della cassa e quelle del pavimento in quei punti in cui le superfici sono in contatto molto stretto.



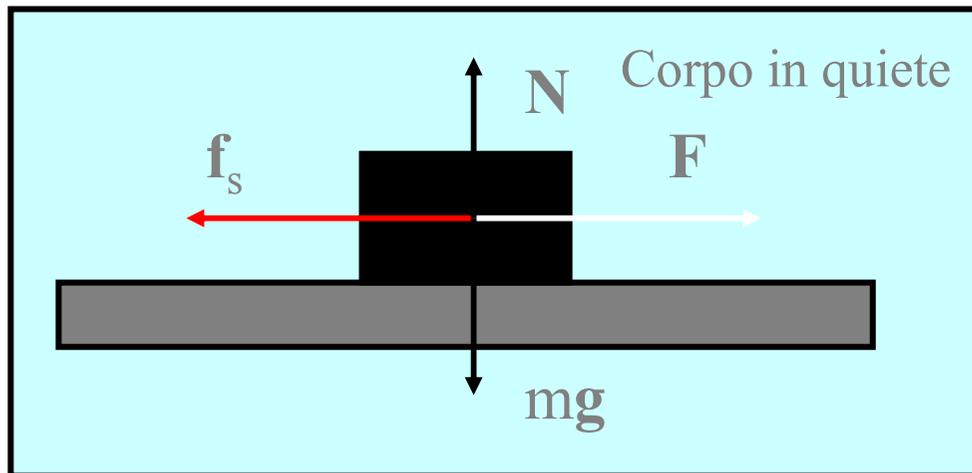
La **forza di attrito statico** può variare da zero ad una **forza massima**  $f_{smax}$ , a seconda della forza con cui si spinge; **se la forza  $F$  è sufficientemente intensa, la cassa striscia sul pavimento.**

**Mentre la cassa striscia si creano e si rompono continuamente legami molecolari** e si creano piccoli frammenti delle superfici: il risultato è una **forza di attrito dinamico** (o attrito cinetico)  $f_d$  che si oppone al moto. Perché la cassa continui a strisciare con velocità costante occorre esercitare una forza uguale ed opposta alla forza di attrito dinamico.

# Attrito statico

Il modulo della forza di attrito statico può variare fra zero e un valore massimo che è **proporzionale alla reazione vincolare normale al piano su cui è appoggiato il corpo**. Direzione e verso sono indicati in figura.

$$\left. \begin{array}{l} |\mathbf{f}_s| \leq |\mathbf{f}_{s\max}| \\ |\mathbf{f}_{s\max}| = \mu_s N \end{array} \right\} \rightarrow |\mathbf{f}_s| \leq \mu_s N$$



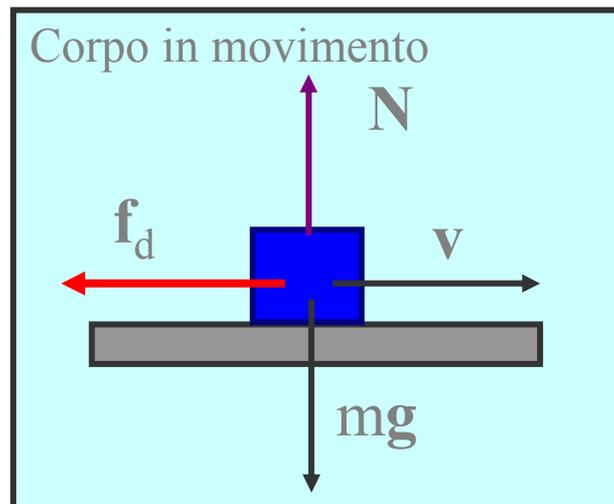
**Il coefficiente adimensionale  $\mu_s$  è detto coefficiente di attrito statico.**

# Attrito dinamico

La forza di attrito dinamico ha sempre direzione uguale a quella della velocità dell'oggetto, verso contrario e modulo proporzionale alla reazione vincolare normale al piano su cui si muove l'oggetto:

$$|\mathbf{f}_d| = \mu_d N$$

**Il coefficiente adimensionale  $\mu_d$  e' detto coefficiente di attrito dinamico.**



Sperimentalmente è stato trovato che:

- $\mu_d$  è minore  $\mu_s$ ;
- per velocità comprese tra circa 1cm/s e parecchi metri al secondo  $\mu_d$  è praticamente costante;
- $\mu_d$  (come  $\mu_s$ ) dipende dalla natura delle superfici, ma è indipendente dall'area (macroscopica) di contatto.

# Coefficienti di attrito

Il coefficiente di **attrito statico** è in generale **maggiore** del coefficiente di **attrito dinamico**. Alcuni esempi:

Superfici	$\mu_s$	$\mu_d$
Legno su pietra	0.7	0.3
Gomma su cemento asciutto	0.65	0.5
Gomma su cemento bagnato	0.4	0.35
Gomma su ghiaccio	0.2	0.15
Acciaio su acciaio asciutto	0.15	0.12

Questi numeri sono indicativi, infatti i coefficienti di attrito **dipendono** molto dallo **stato delle superfici, dalla temperatura, dall'umidità, ecc..** **Vengono valutati sperimentalmente**

# Gli attriti sono uguali a tutte le altre forze?

Abbiamo visto che gli attriti dove presenti vanno considerati forze da includere nell'equazione del moto come tutte le altre. Tuttavia c'è una differenza sostanziale tra gli attriti e le altre forze che va sottolineata:

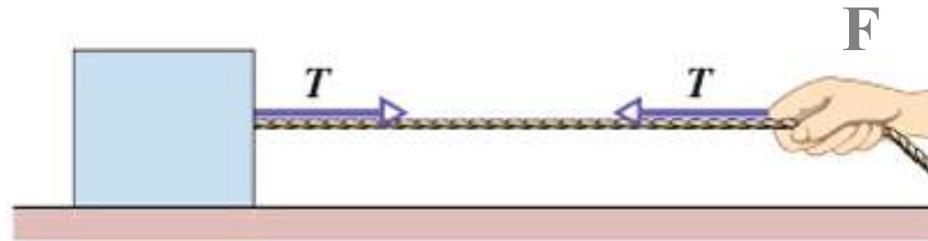
**Gli attriti sono forze che si esercitano solo in presenza di moto (o tentativo di moto)**

Se appoggio un blocco su una superficie piana che abbia un certo coefficiente di attrito e **non spingo** il blocco parallelamente alla superficie, **non** ho presenza di forza di attrito (mentre, ad esempio, agiscono la forza peso e la reazione vincolare del piano).

**Gli attriti non sono in grado di generare moto, ma solo di opporvisi**

# Funi e carrucole

**Funi e carrucole** sono dispositivi che permettono di **trasmettere l'azione di una forza applicata** in un dato **punto ad un punto diverso**. In generale questi dispositivi hanno caratteristiche e limiti fisici ben definiti. Tuttavia, in molti casi, possiamo descrivere con buona approssimazione il loro funzionamento facendo alcune ipotesi.



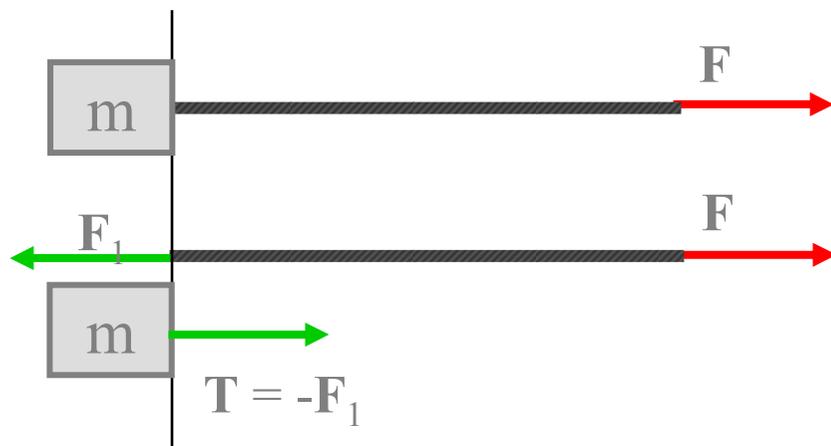
## Funi:

Consideriamo funi di **massa trascurabile** ( $m = 0$ ) e **inestensibili** ( $L = \text{costante}$ ). Quest'ultima caratteristica implica che **se applico una forza  $F$**  a un estremo di una fune tesa, questa **risponde con una forza** (chiamata **tensione  $T$** ) che si trasmette lungo la fune in modo tale che ogni punto della corda abbia accelerazione nulla relativamente a tutti gli altri  $\Rightarrow$  **l'accelerazione degli estremi della corda è la stessa**.

# Funi e carrucole

Consideriamo un corpo di massa  $m$  attaccato ad una corda.

- Tiriamo la corda con la forza  $\mathbf{F}$ .
- Chiamiamo  $\mathbf{F}_1$  la forza che il corpo di massa  $m$  esercita sulla corda.
- Per la terza legge di Newton, la forza che la corda esercita sul corpo sarà  $\mathbf{T} = -\mathbf{F}_1$ .



**Corda ideale:**  $m = 0$ ,  
 $L = \text{costante}$

Applichiamo la seconda legge di Newton **alla corda**::

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

In condizioni statiche:

$$\mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_1 = -\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{F}$$

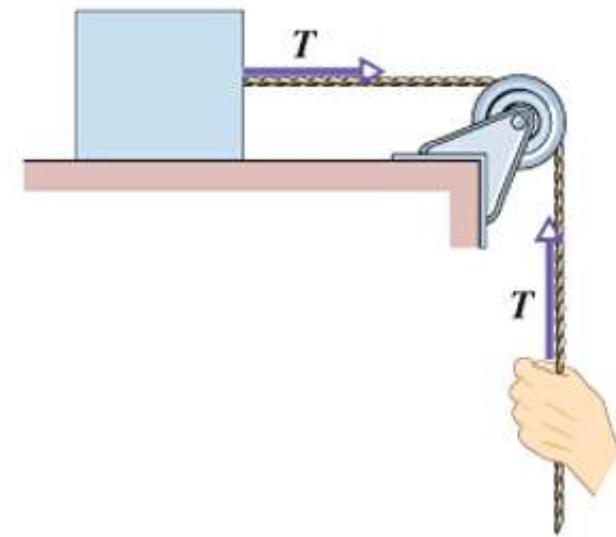
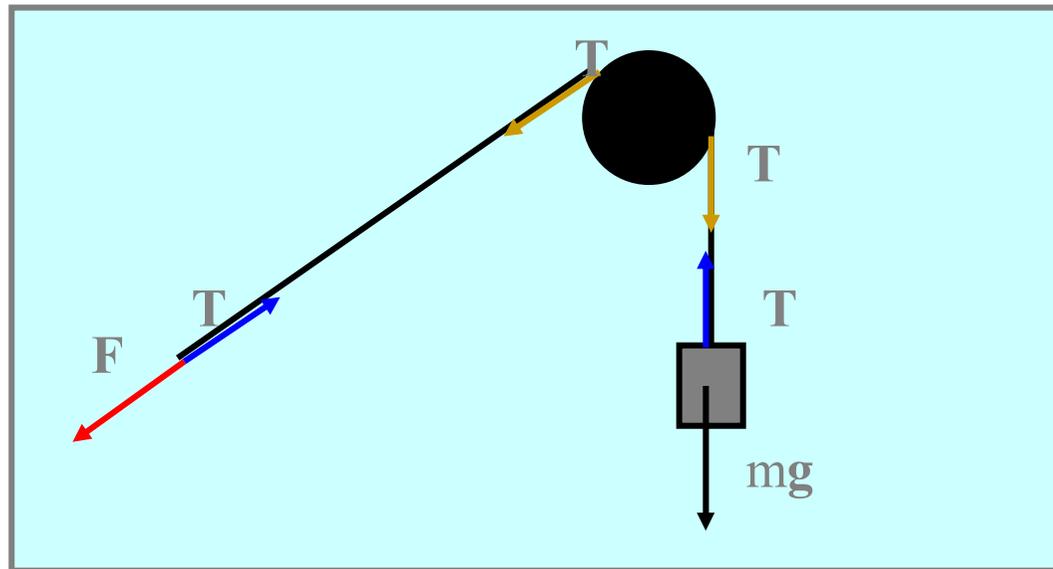
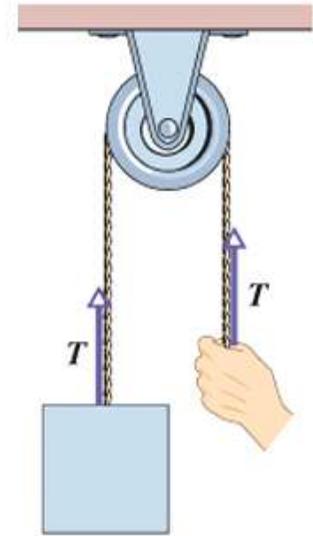
In condizioni dinamiche si arriva allo stesso risultato se la massa della corda è nulla

$$m = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_1 = -\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{F}$$

# Funi e carrucole

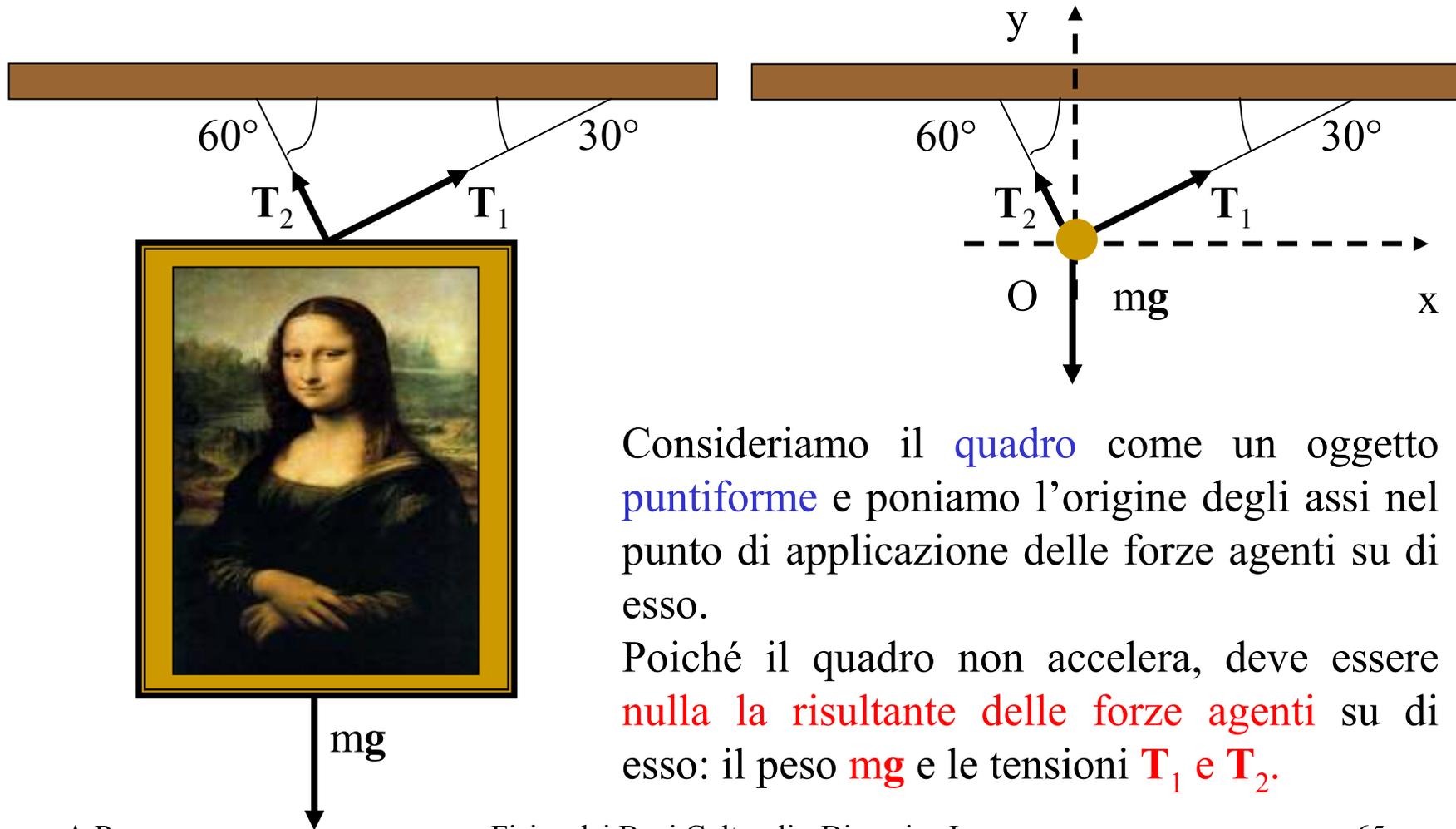
## Carrucole

L'effetto di una carrucola ideale è quello di fare **cambiare direzione a una forza che viene trasmessa**, per esempio, per mezzo di una **fune**. L'approssimazione che faremo è che la carrucola sia priva di massa e che le sue **dimensioni** siano trascurabili (per non includere gli effetti dovuti alla rotazione).



# Esercizio

Un quadro la cui forza peso è pari a  $8\text{ N}$  è sostenuto da due fili aventi tensioni  $T_1$  e  $T_2$ . Conoscendo gli angoli  $\theta_1$  e  $\theta_2$  (vedi figura), si trovi la tensione dei fili.



Consideriamo il **quadro** come un oggetto **puntiforme** e poniamo l'origine degli assi nel punto di applicazione delle forze agenti su di esso.

Poiché il quadro non accelera, deve essere **nulla la risultante delle forze agenti** su di esso: il peso  **$mg$**  e le tensioni  **$T_1$  e  $T_2$** .

$$\sum \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \sum \mathbf{F}_x = 0 \quad \text{e} \quad \sum \mathbf{F}_y = 0$$

Le componenti orizzontali delle forze devono equilibrarsi tra loro, così come le componenti verticali.

La componente x di  $T_2$  è nel verso negativo dell'asse x e la forza peso è diretta verso il basso.

$$\mathbf{T}_{1x} + \mathbf{T}_{2x} = 0 \Rightarrow T_{1x} - T_{2x} = T_1 \cos 30^\circ - T_2 \cos 60^\circ = 0$$

$$\mathbf{T}_{1y} + \mathbf{T}_{2y} + \mathbf{P} = 0 \Rightarrow T_{1y} + T_{2y} - mg = T_1 \sin 30^\circ + T_2 \sin 60^\circ - mg = 0$$

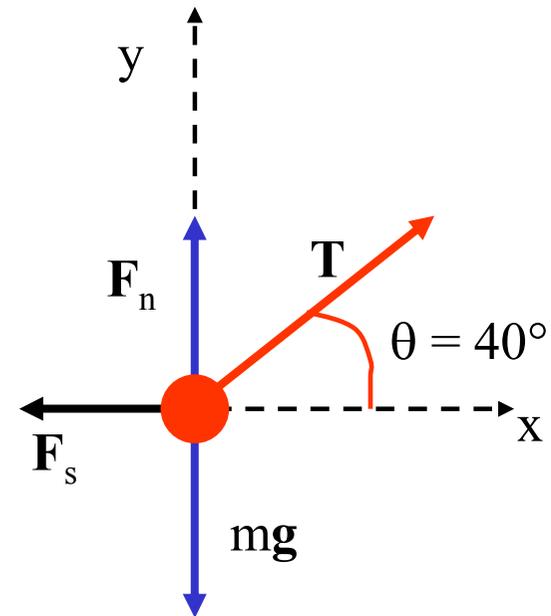
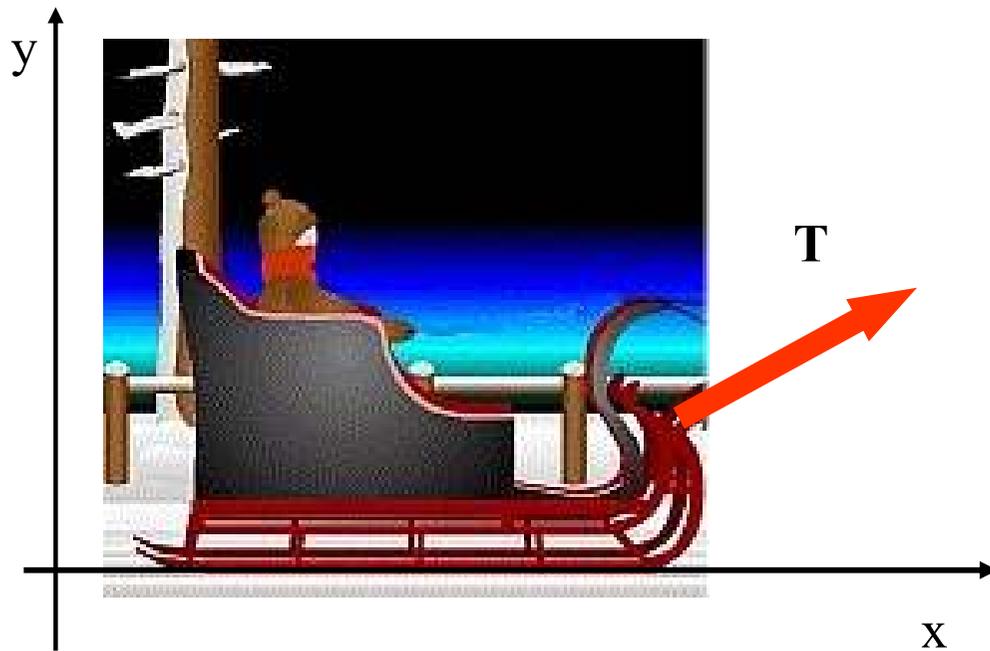
dove  $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 = \sin 60^\circ$ ,  $\sin 30^\circ = 1/2 = \cos 60^\circ$

$$\left. \begin{array}{l} T_1 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{T_2}{2} \Rightarrow T_2 = \sqrt{3} T_1 \\ T_1 \left( \frac{1}{2} \right) + T_2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = mg \end{array} \right\} \Rightarrow T_1 \left( \frac{1}{2} \right) + T_1 \left( \frac{3}{2} \right) = mg \Rightarrow T_1 = \frac{1}{2} mg = 4\text{N}$$

$$T_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} mg = 6,93\text{N}$$

# Esercizio

Un uomo tira una slitta su cui sono seduti i suoi bambini. La massa totale della slitta e dei bambini è 60 kg. I coefficienti di attrito statico e cinetico sono  $\mu_s = 0.2$  e  $\mu_d = 0.15$ . La slitta è tirata con una corda che forma un angolo di  $40^\circ$  con l'orizzontale. Si trovi la forza di attrito e l'accelerazione dei bambini e della slitta se la **tensione nella corda è: (a) 100 N; (b) 160 N.**



$F_n$  è la reazione vincolare.  
 $F_s$  è la forza di attrito statico.

La tensione  $T$  può essere scomposta nelle sue **componenti cartesiane**, di modulo  $T_x$  e  $T_y$ :

$$T_x = |\mathbf{T}| \cos\theta = (100 \cdot \cos 40^\circ) \text{ N} = 77 \text{ N}$$

$$T_y = |\mathbf{T}| \sin\theta = (100 \cdot \sin 40^\circ) \text{ N} = 64 \text{ N}$$

Non c'è accelerazione verticale, quindi la somma delle forze nella direzione  $y$  agenti sul sistema slitta + bambini deve essere nulla.

$$F_n - mg + T_y = 0 \rightarrow F_n = mg - T_y = (60 \cdot 9,8 - 64) \text{ N} = 524 \text{ N}$$

La massima forza di attrito statico è pertanto:

$$f_{s,max} = \mu_s F_n = (0,2 \cdot 524) \text{ N} = 104,8 \text{ N}$$

Tale valore va confrontato con la componente orizzontale  $T_x$  della tensione:

$$f_{s,max} > T_x$$

**quindi la slitta non si muove.**

Se  $T$  è 160 N vale sempre la condizione che somma delle forze nella direzione  $y$  agenti sul sistema slitta + bambini deve essere nulla. Sostituendo ho che

$$F_n - mg + T_y = 0 \rightarrow F_n = mg - T_y = (60 \cdot 9,8 - 102) N = 486 N$$

La massima forza di attrito statico è pertanto:

$$f_{s,max} = \mu_s F_n = (0,2 \cdot 486) N = 97,2 N$$

Tale valore va confrontato con la componente orizzontale  $T_x$  della tensione:

$$f_{s,max} < T_x$$

quindi **la slitta si muove**. Una volta che la slitta si muove, la forza d'attrito sarà dovuta all'attrito dinamico:

$$f_d = \mu_d F_n = (0,15 \cdot 486) N = 73 N$$

La forza risultante nella direzione  $x$  è quindi:

$$T_x - f_d = (103 - 73) N = 30 N$$

e l'accelerazione:

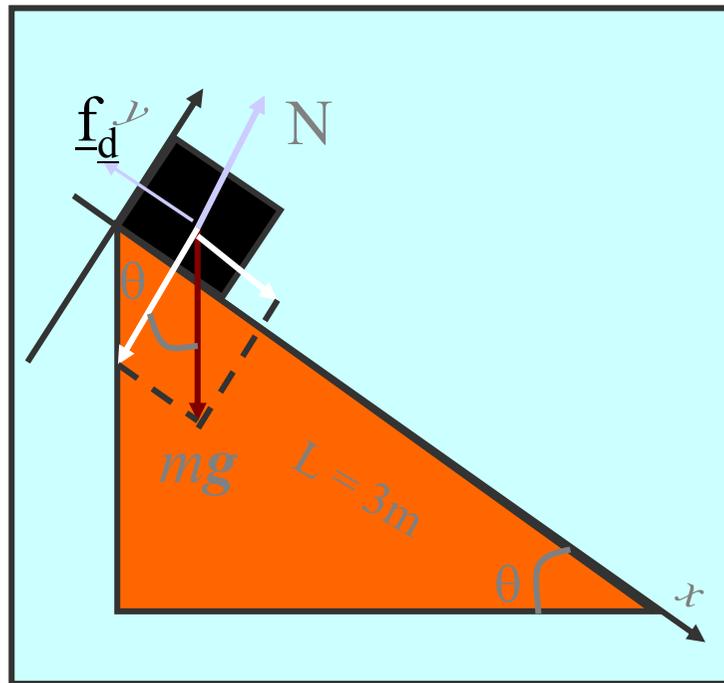
$$a = \frac{30 N}{60 kg} = 0,5 \frac{m}{s^2}$$

# Piano inclinato con attrito

Stesso problema di prima a cui si aggiunge la forza di attrito dinamico  $f_d$  che ha direzione opposta al moto lungo il pianale

Scriviamo le due equazioni lungo x e y. Lungo y è uguale a prima

L'**accelerazione** lungo l'asse **y** deve essere **nulla** come prima per la presenza del vincolo. Pertanto:



$$\Sigma_i F_i = ma \Rightarrow \begin{cases} mg \sin \theta - f_d = ma_x \\ -mg \cos \theta + N = 0 \end{cases}$$

$$mg \sin \theta - \mu_d mg \cos \theta = ma_x$$

$$a_x = g(\sin \theta - \mu_d \cos \theta)$$

L'**accelerazione** è costante, ma minore che nel caso senza attrito. Può diventare nulla per opportuni valori di  $\theta$  e di  $\mu_d$