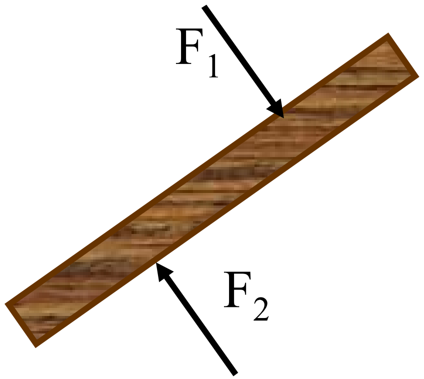
Dinamica III
Equilibrio statico di un corpo esteso

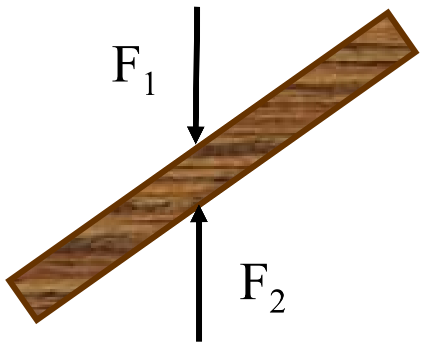
La **statica** è quella parte della dinamica in cui essendo la risultante delle forze nulla non c'è variazione di moto e un sistema in quiete rimane tale.

Se **una particella** è in equilibrio statico, cioè se è ferma e resta ferma, la forza risultante che agisce su di essa deve essere nulla.

Nel caso di **un corpo esteso**, per esempio una bacchetta, la condizione che la **forza risultante sia nulla è necessaria, ma non sufficiente, perché il corpo può ruotare anche se forza *risultante* che agisce su di esso è nulla**.



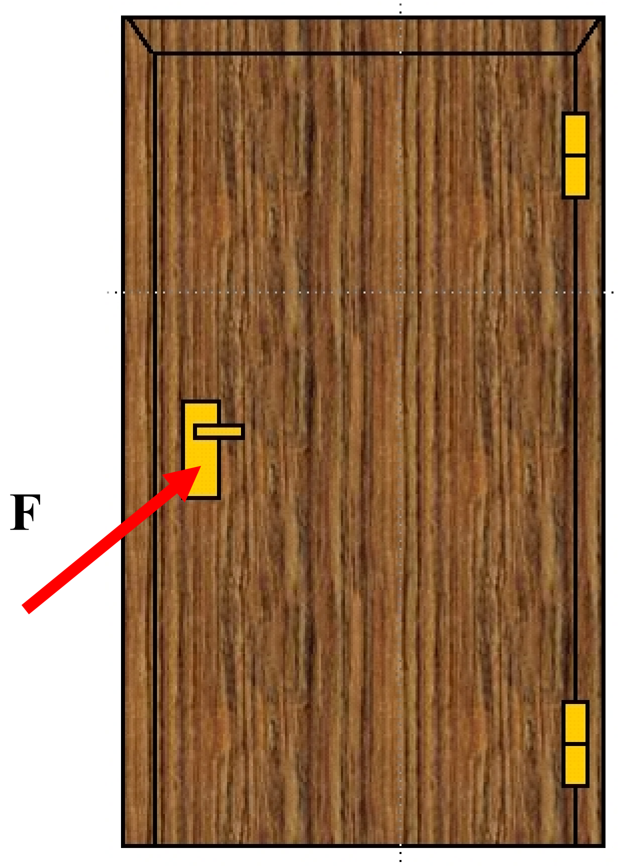
(a) Le due forze F_1 e F_2 sono uguali ed opposte, ma la bacchetta non è in equilibrio statico, perché queste forze tendono a farla ruotare in senso orario.



(b) In questo caso, le due forze hanno la stessa retta d'azione e quindi non provocano la rotazione della bacchetta.

Equilibrio statico di un corpo esteso

Per i corpi estesi, oltre al modulo e alla direzione orientata della forza, è quindi importante anche il **punto di applicazione**.

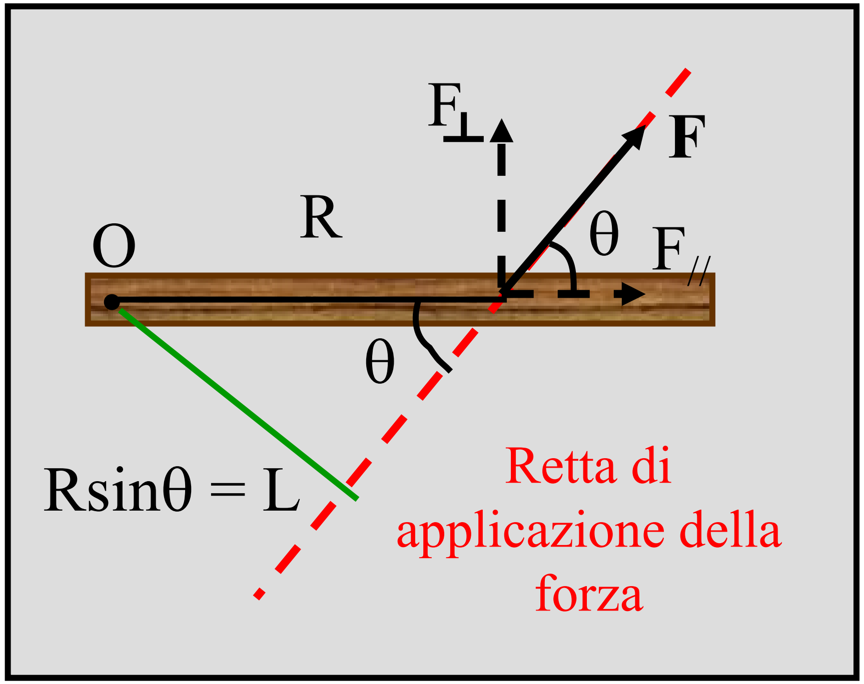


Esempio: Per aprire una pesante porta si spinge in un punto il più lontano possibile dai cardini. Nessuna forza, per quanto intensa, riuscirà ad aprirla se esercitata in un punto appartenente alla retta passante per i cardini.

Momento di una forza

La grandezza che misura l'efficacia di una forza nel produrre la rotazione è chiamata **momento della forza M.** Il momento di una forza può essere orario oppure antiorario, a seconda del senso di rotazione che tende a produrre: in tal caso viene considerato rispettivamente negativo (rotazione oraria) o positivo (rotazione antioraria).

Nell'esempio illustrato in figura, il momento della forza **F** è dato da:



$$M = F_\perp R = (F\sin\theta)R = F(R\sin\theta) = FL$$

R è la distanza tra il punto di applicazione della forza e il punto O, in cui la sbarra è fissata.

L è il braccio della forza.

Il momento è dato dal prodotto della forza per il braccio.

Condizioni per l'equilibrio

Perché un corpo sia in equilibrio statico, il momento risultante in senso orario delle forze, calcolato rispetto ad un punto qualsiasi, deve essere uguale al momento risultante in senso antiorario calcolato rispetto allo stesso punto

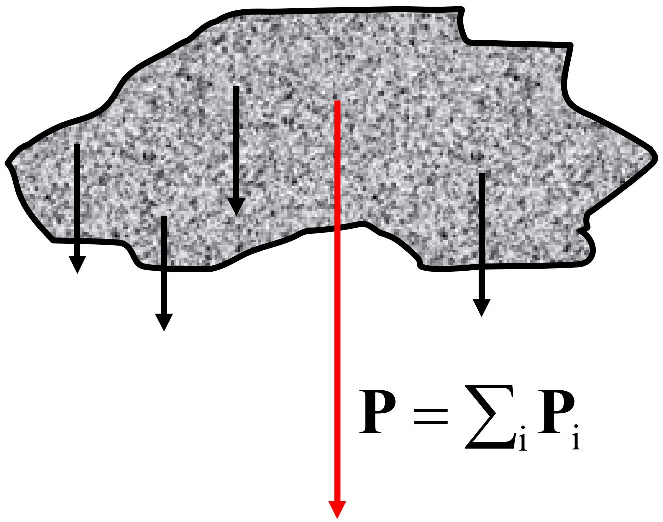
Se chiamiamo positivi i momenti delle forze in senso antiorario e negativi quelli in senso orario, questa condizione equivale a dire che la somma algebrica dei momenti delle forze rispetto a un punto qualsiasi deve essere nulla.

$$\sum \mathbf{F} = 0$$

$$\sum \mathbf{M} = 0$$

CONDIZIONI PER L'EQUILIBRIO STATICO DI UN CORPO ESTESO

Centro di gravità

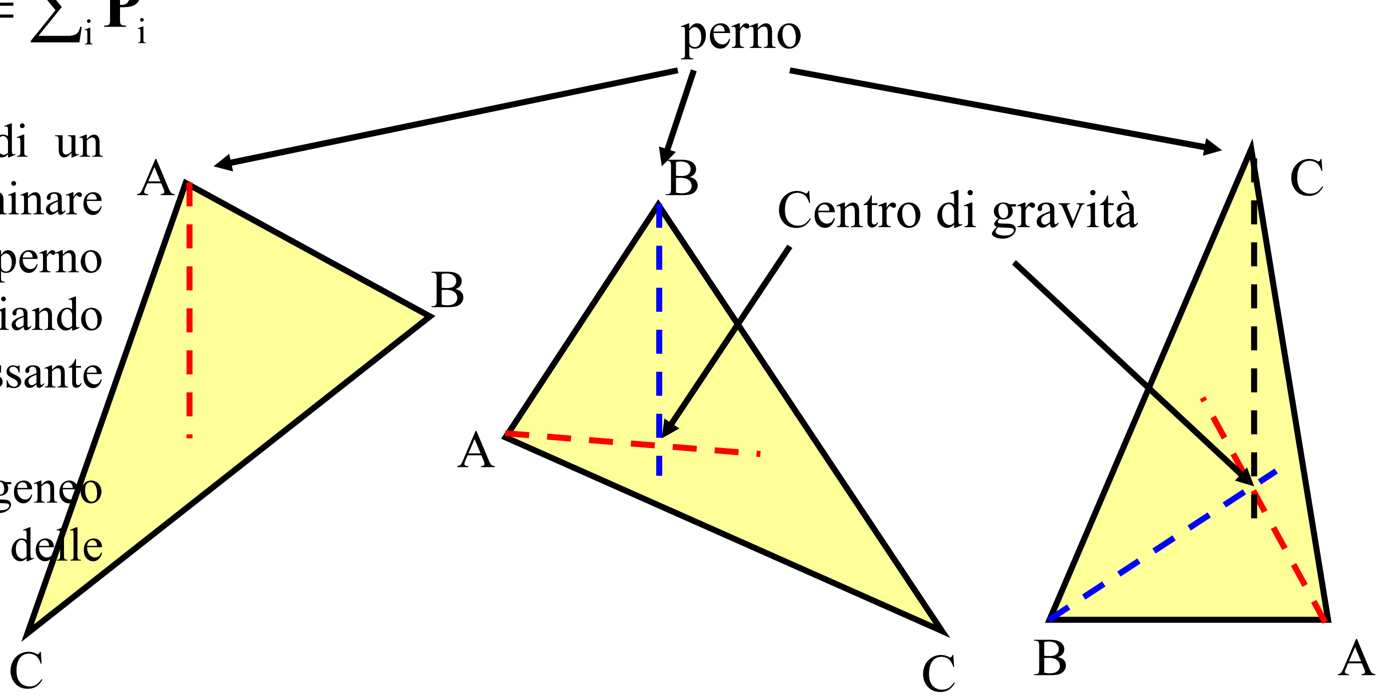


I pesi $\mathbf{P}_i$ di tutte le particelle che costituiscono un corpo possono essere sostituiti con il peso totale $\mathbf{P}$ del corpo, **applicato nel centro di gravità**, che è il punto rispetto al quale il momento risultante delle forze $\mathbf{P}_i$ è nullo.

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{P}_i$$

Il centro di gravità di un corpo si può determinare sospendendolo ad un perno in punti diversi e tracciando la retta verticale passante per il perno.

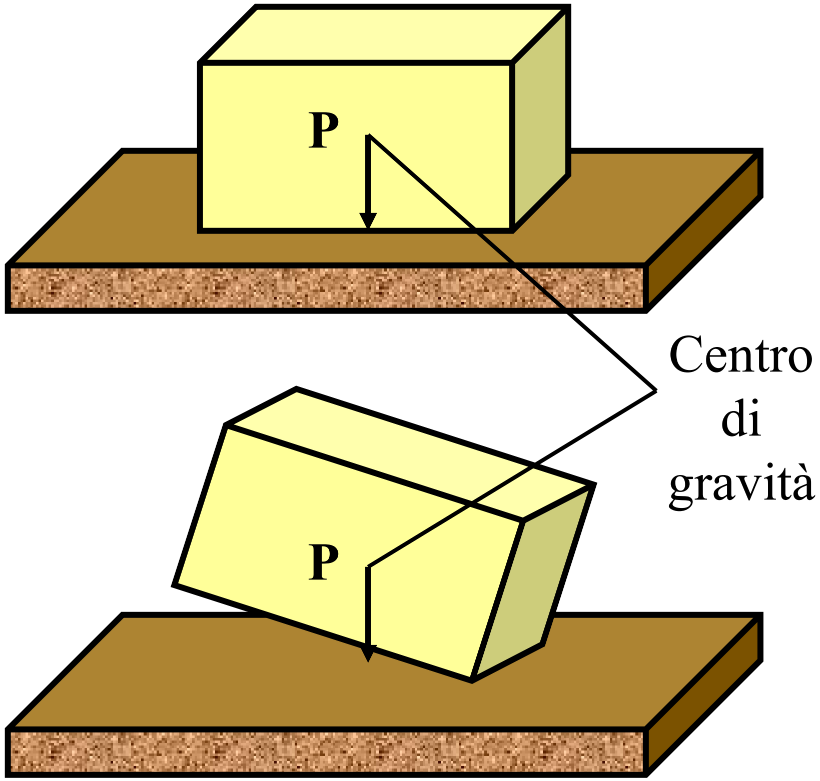
In un triangolo omogeneo è il punto di incontro delle mediane

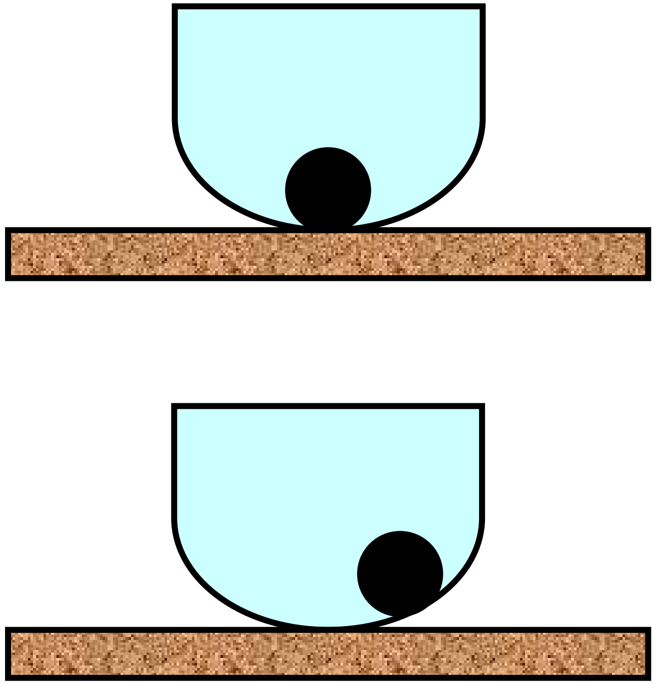


Equilibrio stabile

L'equilibrio di un corpo può essere di tre tipi: stabile, instabile o indifferente.

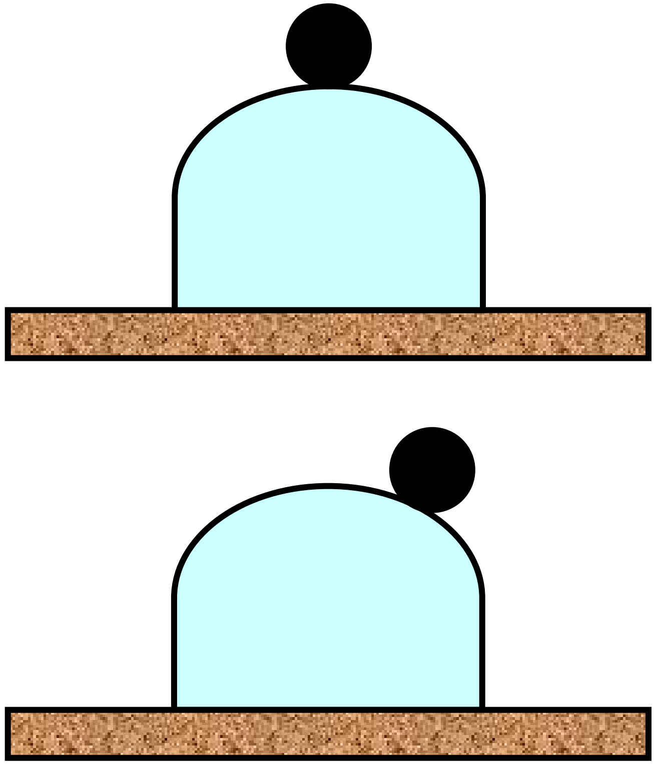
L'equilibrio **stabile** si ha se le forze o i momenti di forza risultanti che insorgono a causa di un piccolo spostamento del corpo spingono il corpo a tornare verso la sua posizione di equilibrio.

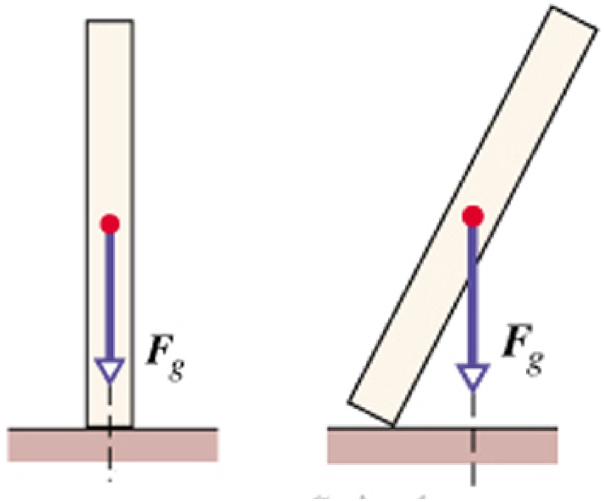




Equilibrio instabile

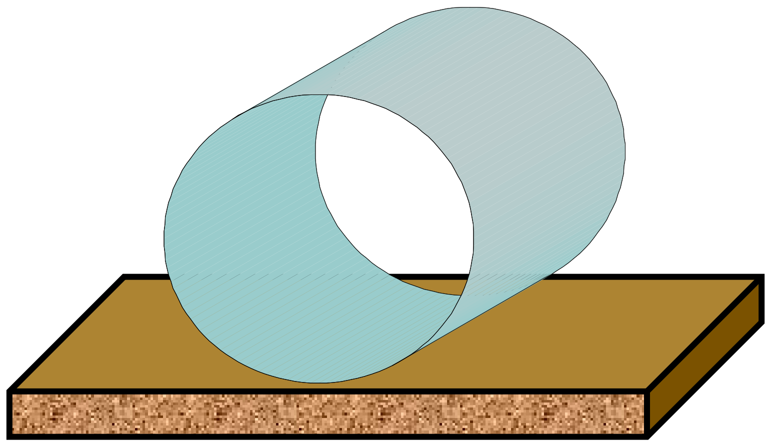
L'equilibrio **instabile** si ha se le forze o i momenti di forza risultanti che insorgono a causa di un piccolo spostamento del corpo spingono il corpo lontano dalla sua posizione iniziale.





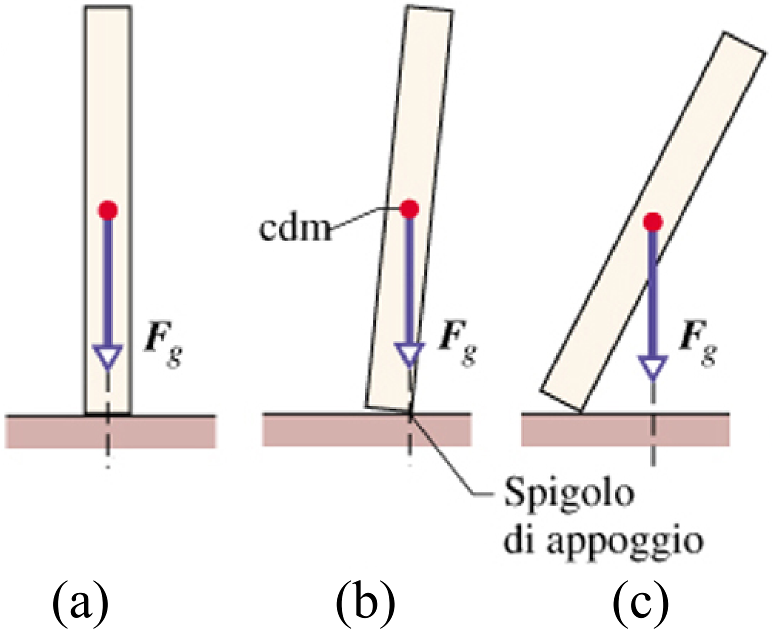
Equilibrio indifferente

L'equilibrio **indifferente** si ha quando, in seguito ad un piccolo spostamento del corpo, non vi sono forze o momenti di forza risultanti che tendano a riportarlo verso la sua posizione iniziale o ad allontanarlo da essa.

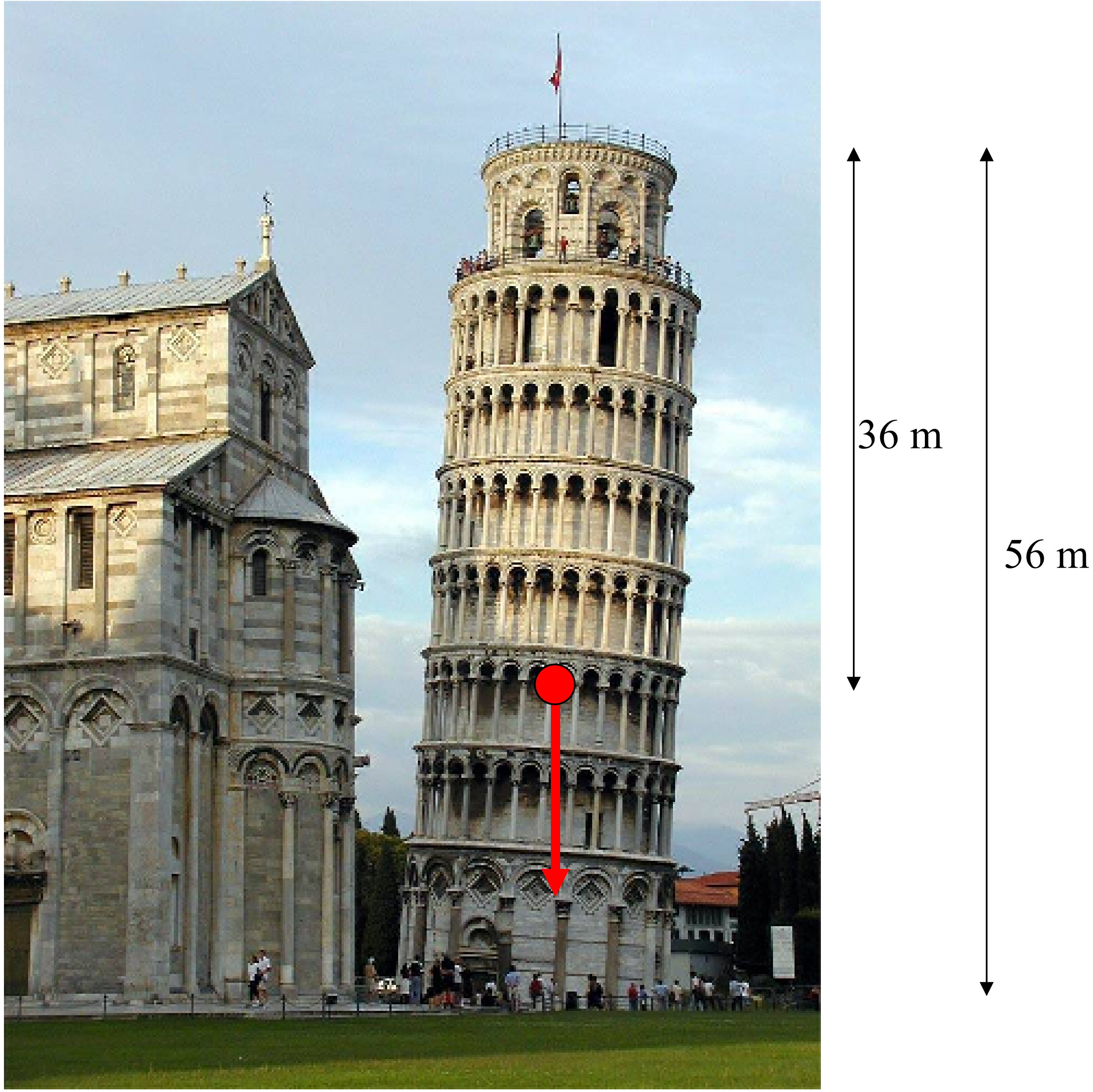


Se si ruota leggermente il cilindro, esso è di nuovo in equilibrio.

Stabilità e centro di gravità



La stabilità dell'equilibrio è relativa. Se la bacchetta in (a) viene ruotata poco, come in (b), essa ritorna nella sua posizione di equilibrio iniziale, purché la proiezione verticale del centro di gravità si trovi entro la base di appoggio. Se la rotazione è maggiore, come in (c), la proiezione verticale del centro di gravità è al di fuori della base d'appoggio e la bacchetta cade.


36 m
56 m

Macchine semplici

Una macchina semplice è un dispositivo che ha lo scopo di trasformare una **piccola forza in entrata in una grande forza in uscita,** facendo sì che lo **spostamento del punto di applicazione della forza in entrata sia molto maggiore di quello della forza in uscita.**

Esempi di macchine semplici sono **le leve, i piani inclinati e i sistemi di carrucole.**

Il **vantaggio A** di una macchina semplice è definito come **il rapporto tra la forza in uscita e la forza in entrata**.

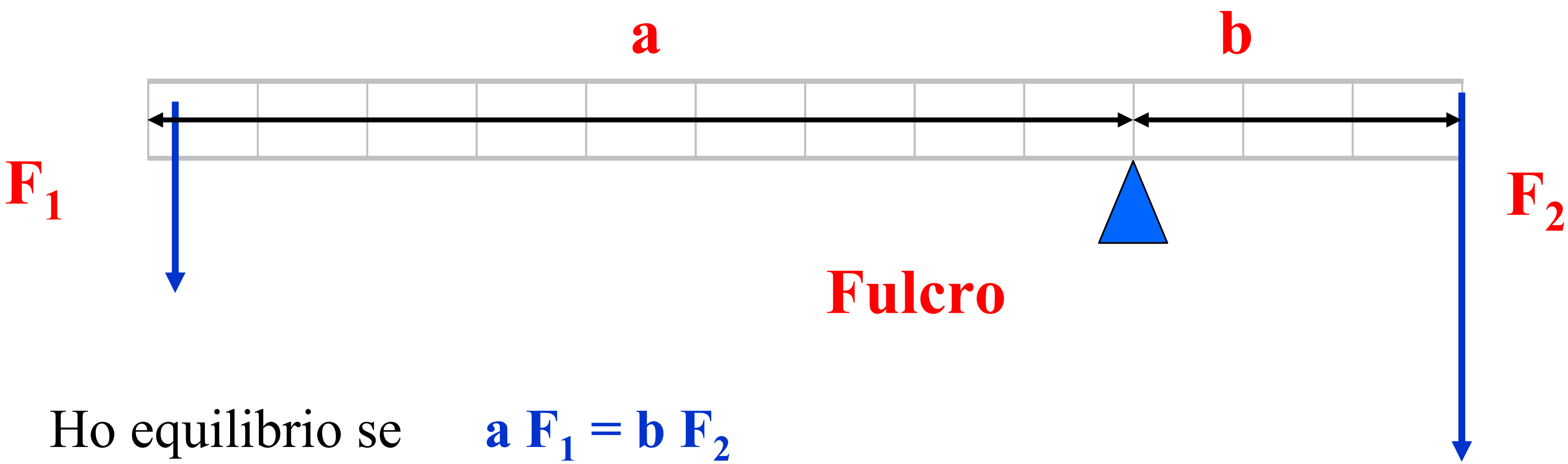
$$A = \frac{\text{forza in uscita}}{\text{forza in entrata}}$$

A volte ha solo lo scopo di rendere **più facile** l'applicazione della forza e di potere utilizzare il nostro peso come forza . Ad esempio carrucola per alzare i pesi, piano inclinato,etc

Esempio di leva

Le leve sono vantaggiose quando F_1 **è minore di F_2** perchè il braccio F_1 è maggiore del braccio di F_2. Serve per sollevare pesi.

Esempio: altalena su cui stanno persone con masse diverse. La più leggera si siede più lontano



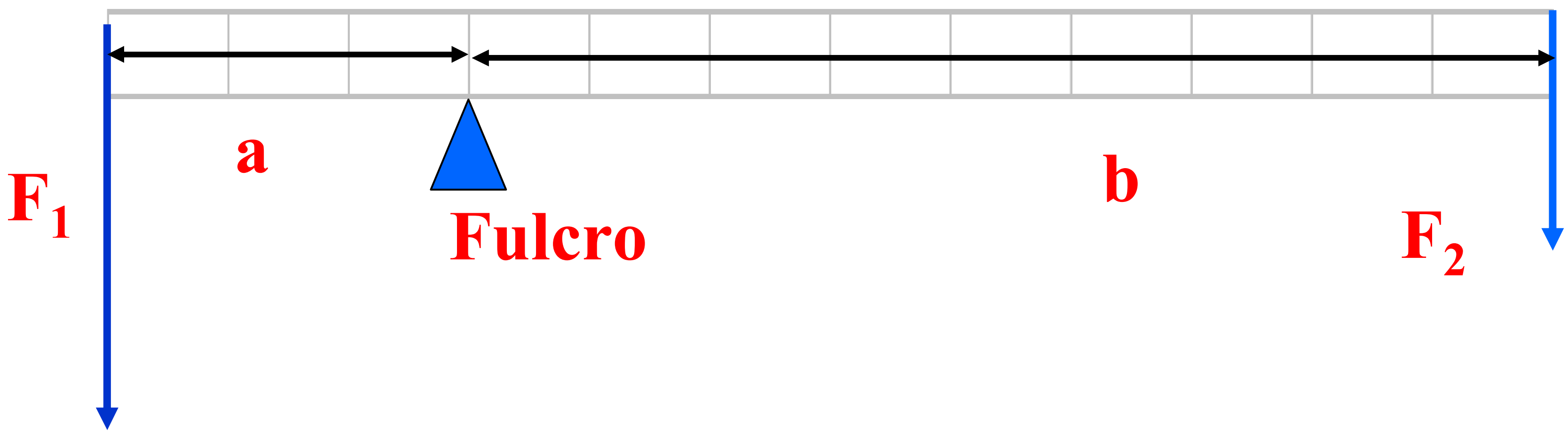
Ho equilibrio se $\mathbf{a\,F_1 = b\,F_2}$

Leve svantaggiose

Le leve sono svantaggiose quando la **F_1 è maggiore di F_2** perchè il braccio di **F_1 è** minore **di quello di F_2.**

Può essere utile bambino (F2 puo sollevare il padre F1)

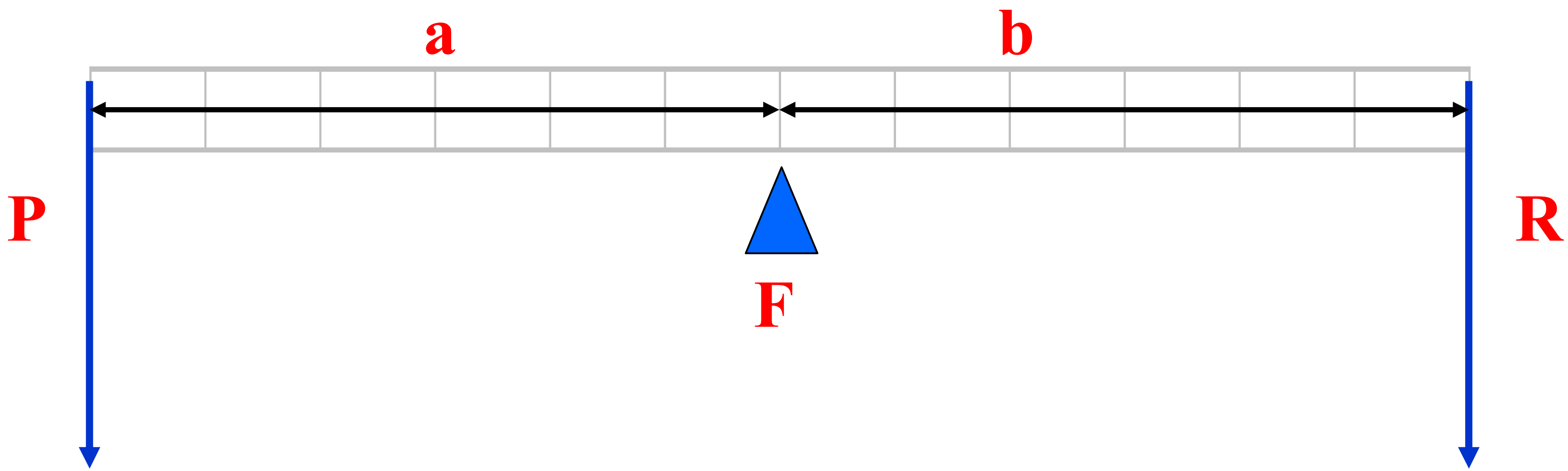
Oppure posso sollevare oggetti lontani che non riesco a prendere in altro modo



Leve indifferenti

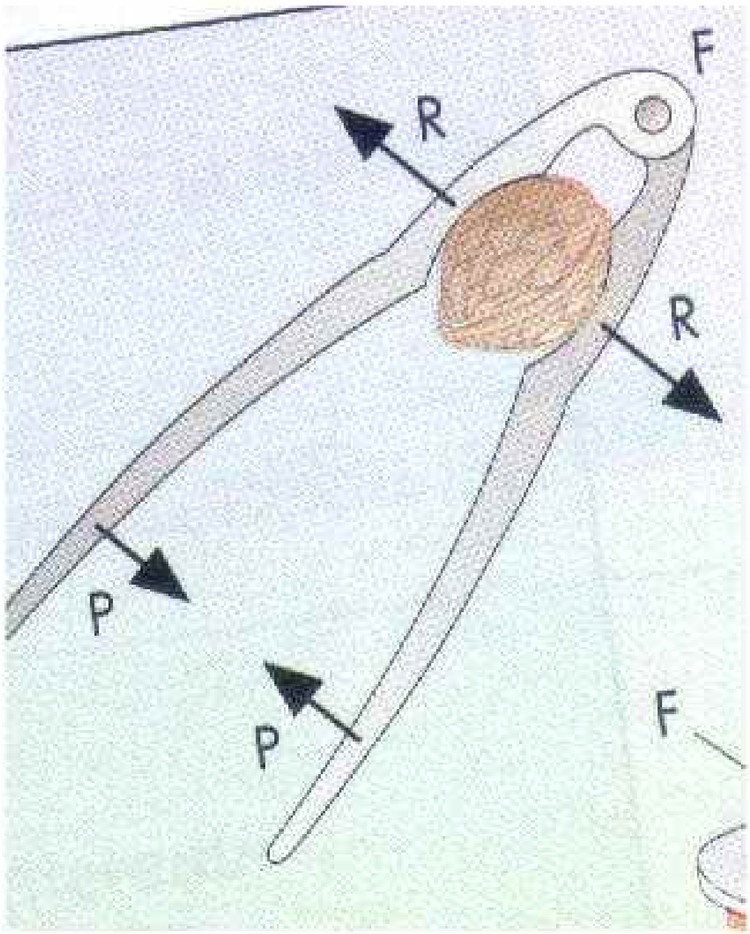
Le leve sono indifferenti quando la **P è uguale ad R** perchè il braccio della potenza è uguale al braccio della resistenza.

Es: Bilancia a braccia eguali



Ho equilibrio se **a P = b R**

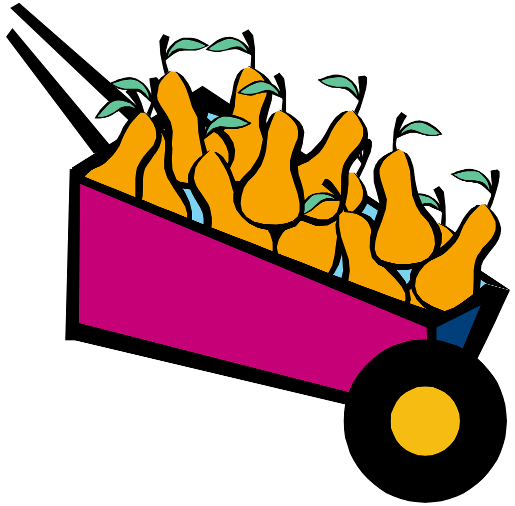
Leve di secondo genere



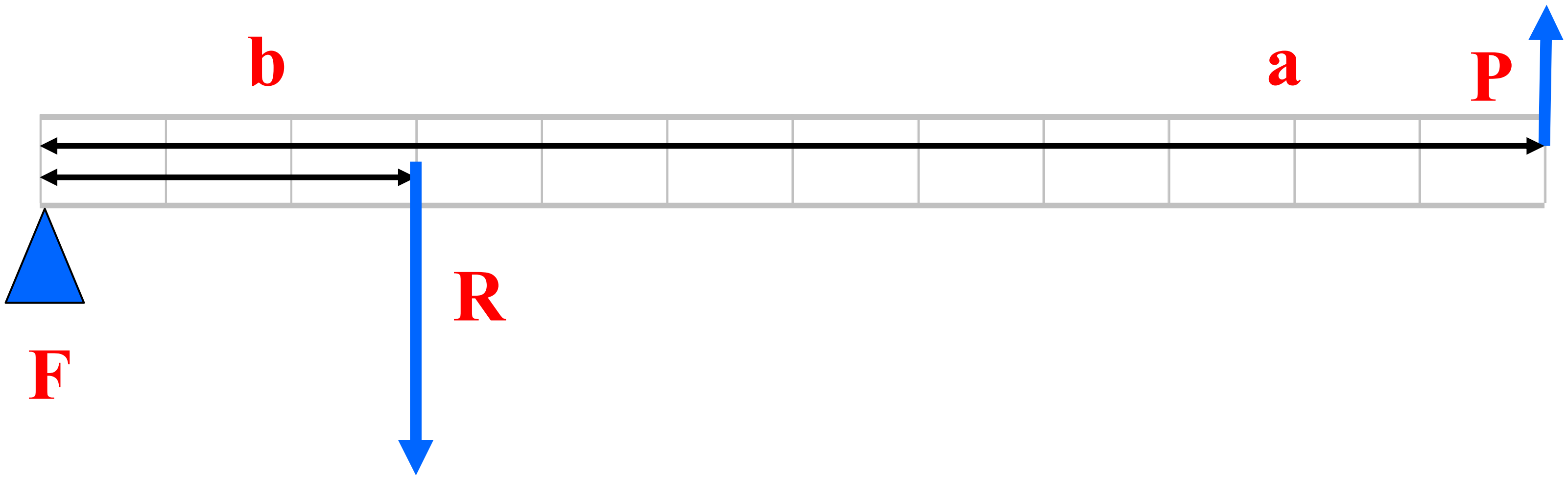
- Hanno il fulcro all'estremità.
- Hanno la resistenza fra il fulcro e la potenza.
- Sono sempre vantaggiose.
- a > b quindi P < R.

Leve di secondo genere

- Esempi: lo schiaccianoci, la carriola, il trolley, il piede.

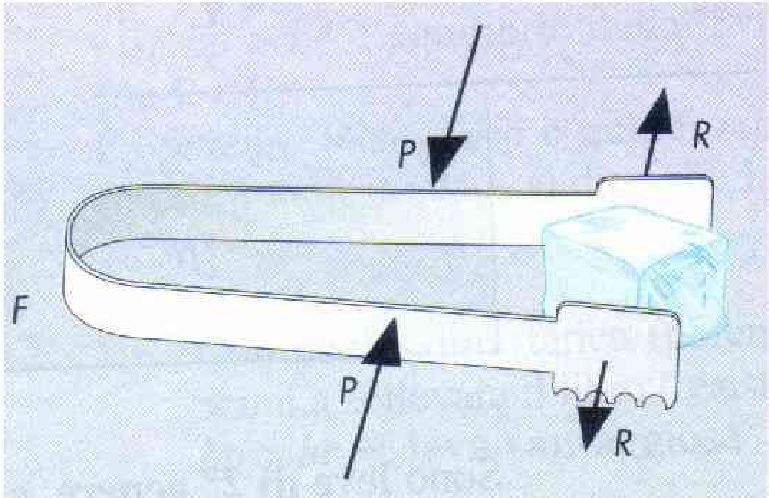


Ho equilibrio se **a P = b R**

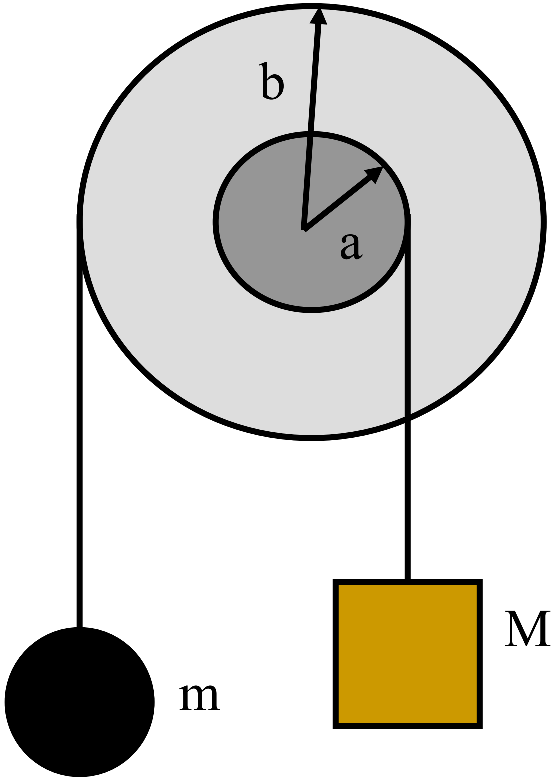


Leve di terzo genere

- Queste leve sono sempre svantaggiose, ma sono molto usate perché permettono di afferrare e manipolare con precisione oggetti anche molto piccoli (utile per i beni culturali)
- Hanno la potenza fra il fulcro e la resistenza.
- Esempi: gli aghi, la canna da pesca, il braccio, le molle per il camino, le pinze per il ghiaccio...



Un esempio di macchina semplice

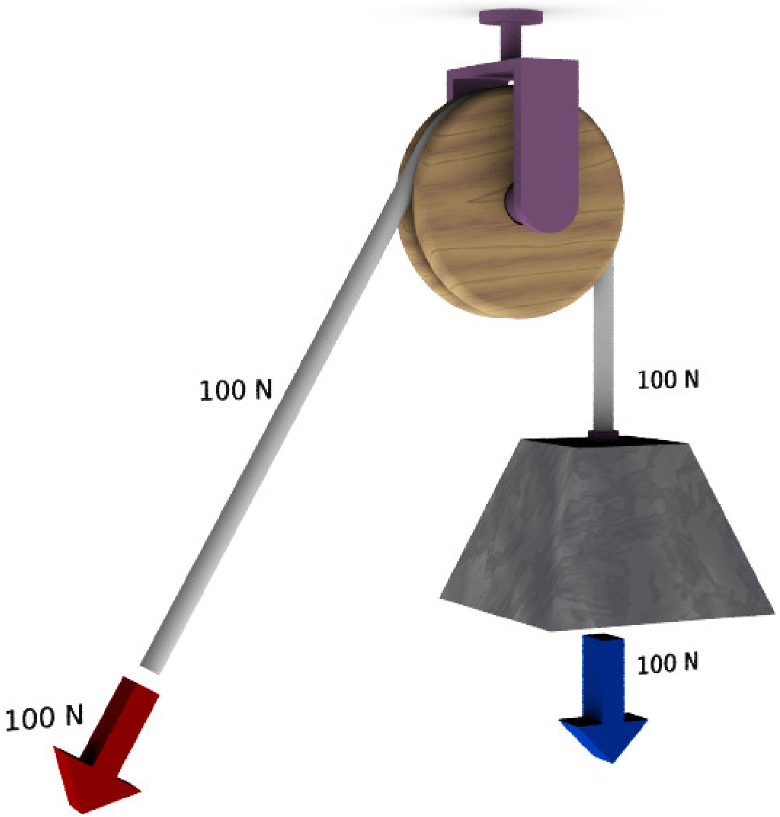


Determinare la massa m che equilibri M.
a = raggio interno = 1 cm
b = raggio esterno = 6 cm
M = 12 kg

Resistenza: $R = M \cdot g = 12 \cdot 9{,}8 = 117{,}6$ N

Rispetto al fulcro (il centro della ruota), il momento della forza resistente è:
$M_R = R \cdot a = M \cdot g \cdot a = 1{,}176 \text{ N} \cdot \text{m}$
Rispetto al fulcro, il momento della potenza è:
$M_P = F \cdot b$
Nelle condizioni di equilibrio:
$M_P = M_R$, quindi: $F = R \cdot (a/b) = 19{,}6$ N
F = mg, quindi m = 2 kg.

La carrucola



Nella carrucola fissa, l'asse della puleggia è fisso, e la ruota ha la sola funzione di deviare la **forza** applicata ad una estremità della fune. L'altra estremità è collegata al carico.

Il rapporto tra la forza attiva e la forza resistente all'equilibrio è pari ad uno.

La carrucola

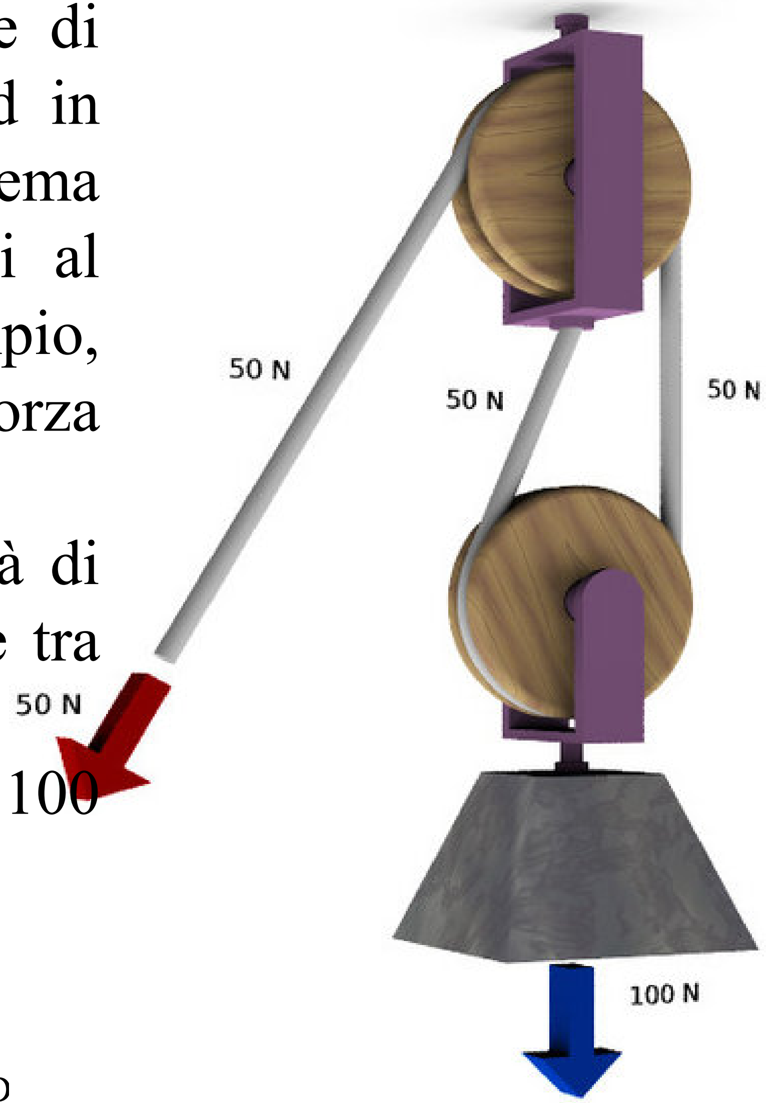
Una carrucola composta è un insieme di due o più carrucole, in parte fisse ed in parte mobili. Il vantaggio di questo sistema è di avere un rapporto di forze pari al numero di carrucole presenti. Per esempio, se ho due ruote, il rapporto tra la forza sollevata e la forza applicata è di 2 a 1.

Lo stesso rapporto si ha tra la velocità di trazione e la velocità di sollevamentoe tra gli spazi percorsi

Il Lavoro fatto per sollevare il peso di 100 N di 1 m è

$50\text{N} \cdot 2\text{m} = 100\ \text{J}$

(devo tirare il doppio di corda)



Esempio: David di Michelangelo

Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

Journal of Cultural Heritage 7 (2006) 273–285

Journal of Cultural Heritage

http://france.elsevier.com/direct/CULHER/

Original article

Diagnostic analysis of the lesions and stability of Michelangelo's David

A. Borri, A. Grazini*

Civil and Environmental Engineering Department, School of Engineering, University of Perugia, Via Duranti, 93-06125 Perugia, Italy

Received 1 December 2005; accepted 28 June 2006

Abstract

This work presents an account of the results of diagnostic analyses on the lesions that were first detected in Michelangelo's *David* in the mid-1800s. After summarizing the events that may have affected the statue's stability and the state of deformation, the authors present the results of the Finite Elements Method (FEM) tests conducted on the digital model of the statue's surface. The analysis of these results made it possible to identify the static conditions that generated the cracks in the lower part of the left leg and in the tree trunk of the *David*. Lastly, the current situation was analyzed from the perspective of both deformation and stresses, evaluating the statue's stability also as regards its structural response to the seismic activity at the level expected for the Florence area.

Keywords: Michelangelo's David; Carrara marble; FEM analysis; Seismic analysis

Esempio: David di Michelangelo

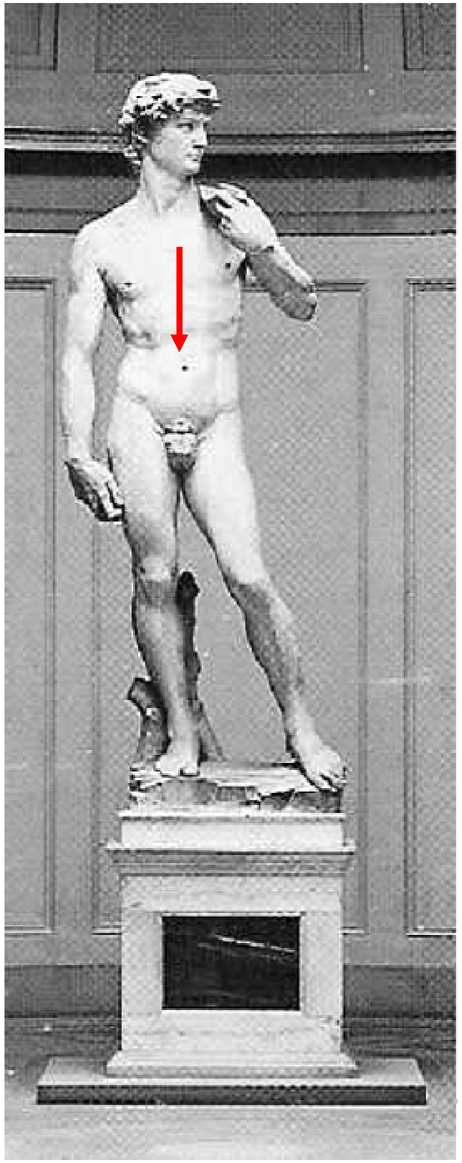


Fig. 1. Michelangelo's *David*

Il centro di massa (Gt) non si trova in corrispondenza del centro di massa del basamento (Gb), ma spostato verso la gamba destra.

Il peso grava quindi maggiormente su tale gamba (quella con il tronco d'albero).

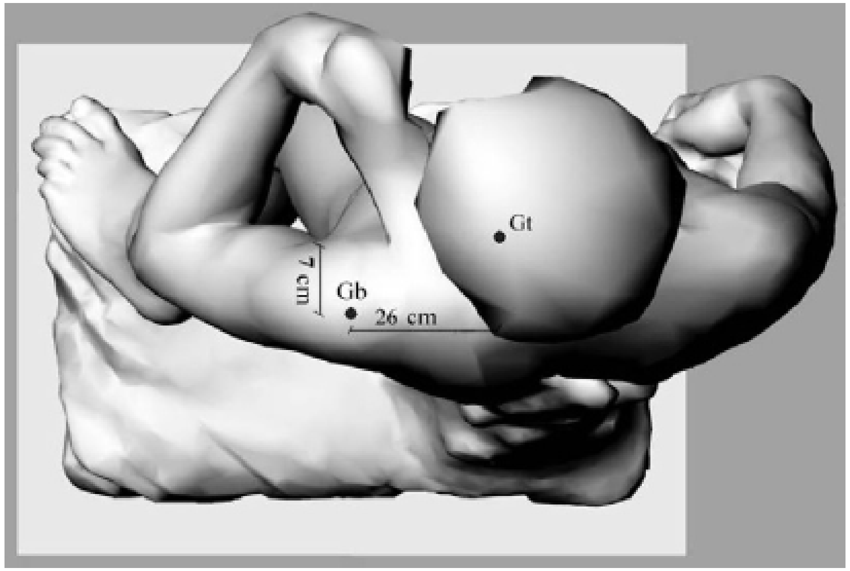


Fig. 3. Projection of the center of gravity of the masses (Gt) under maximum load (statue + cast + base). Note the eccentricity with respect to the center of gravity (Gb) of the supporting base on the ground.

Esempio: David di Michelangelo

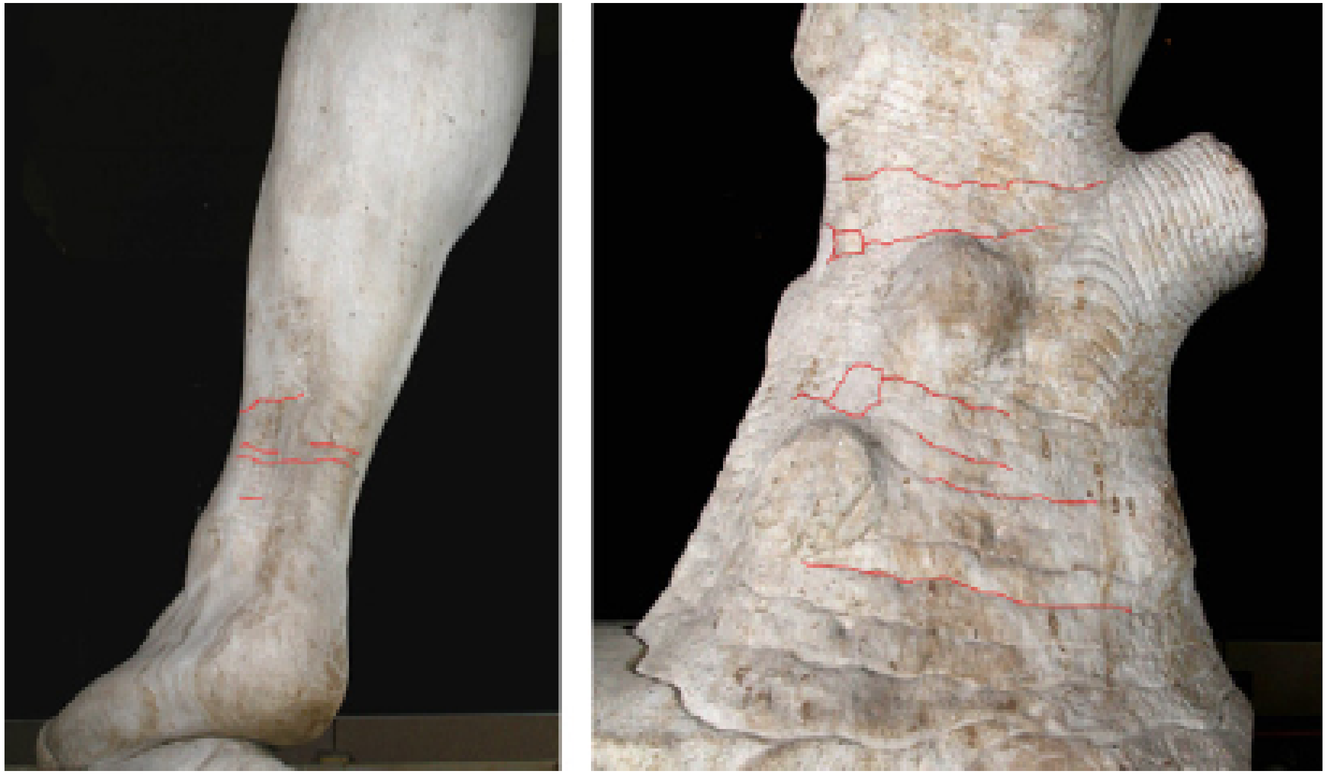
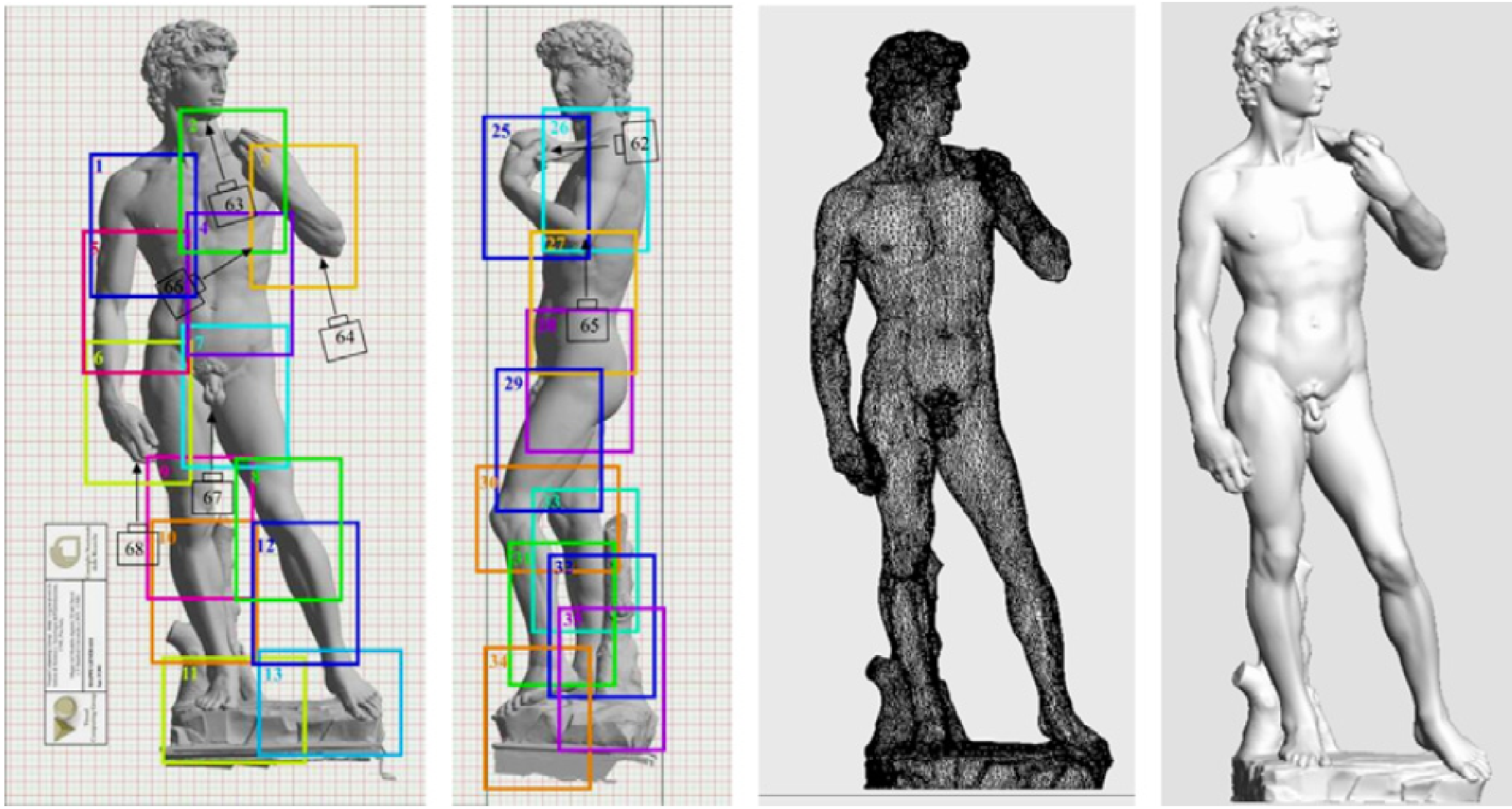


Fig. 2. Current state of the cracks in the left leg and the tree trunk of the *David*. The main lesions are highlighted.

Nelle parti basse della statua (soprattutto sul tronco d'albero) sono visibili diverse crepe, che in queste immagini sono evidenziate in rosso

Esempio: David di Michelangelo



Usando la scansione laser la statua è stata ricostruita in forma digitale.

Questo ha permesso uno studio, per mezzo di software opportuni, degli stress a cui sono sottoposte le varie parti della statua.

Esempio: David di Michelangelo

Le zone rosse sono quelle sottoposte a maggior stress (tra circa 1 GPa e 1,5 GPa)

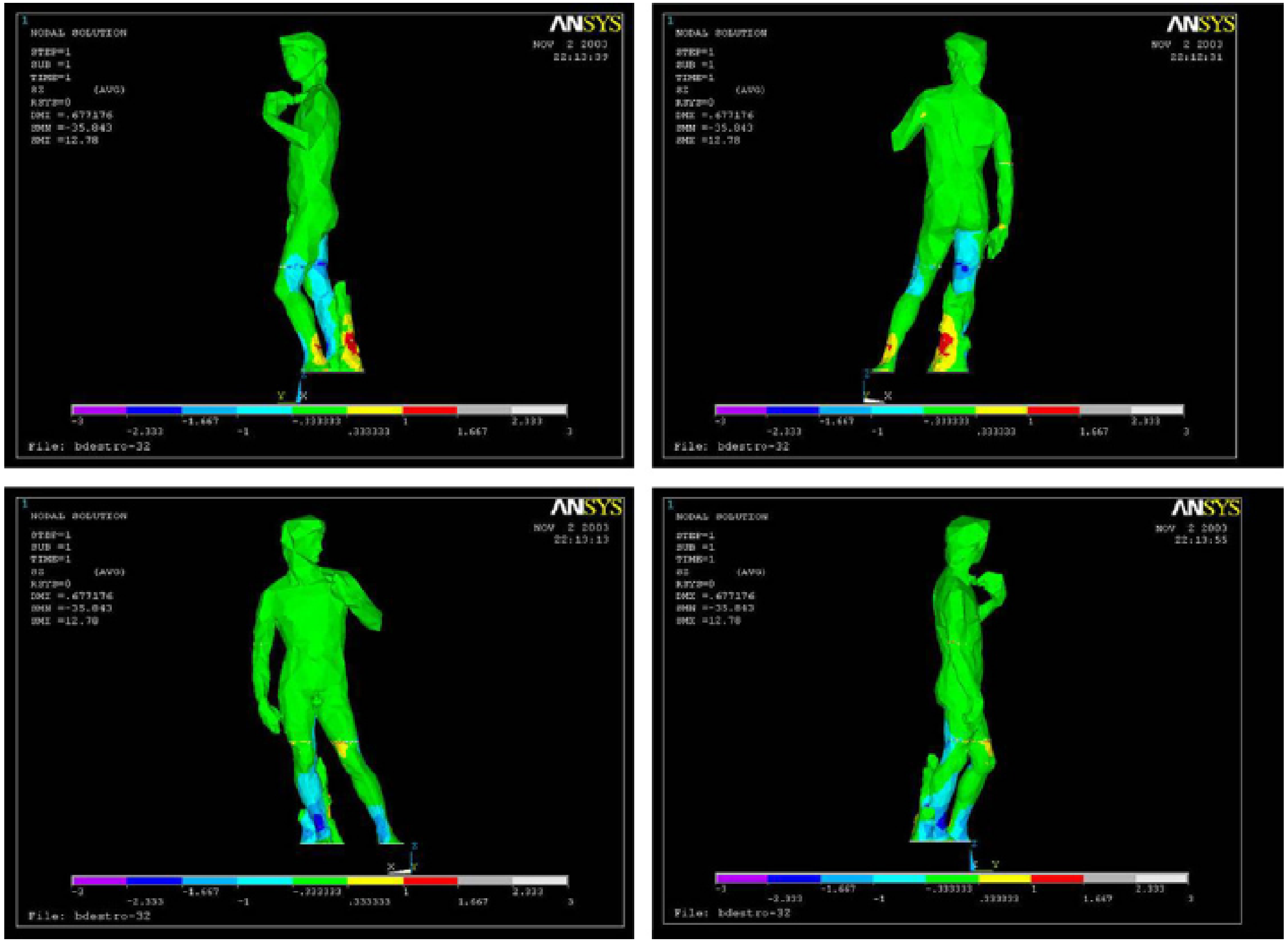


Fig. 5. Distribution of vertical stresses σZ in the *David* in present-day conditions.

Esempio: David di Michelangelo

L'immagine mostra che lo stress viene scaricato principalmente sul lato posteriore del tronco d'albero ed in parte sulla caviglia sinistra. Il tronco d'albero è quindi un elemento di vitale importanza per la statica della statua. Senza di esso il David non resisterebbe allo stress causato dall'eccentricità del centro di massa e sarebbe collassato anche prima del suo completamento.

Il carico di rottura per il marmo utilizzato da Michelangelo è compreso tra 2 GPa e 3 GPa (a seconda se esposto o meno agli agenti atmosferici). Se si esegue una simulazione con il calcolatore eliminando il tronco d'albero si ottiene un carico sulle caviglie di più di 4 GPa che avrebbe fatto collassare l'opera.

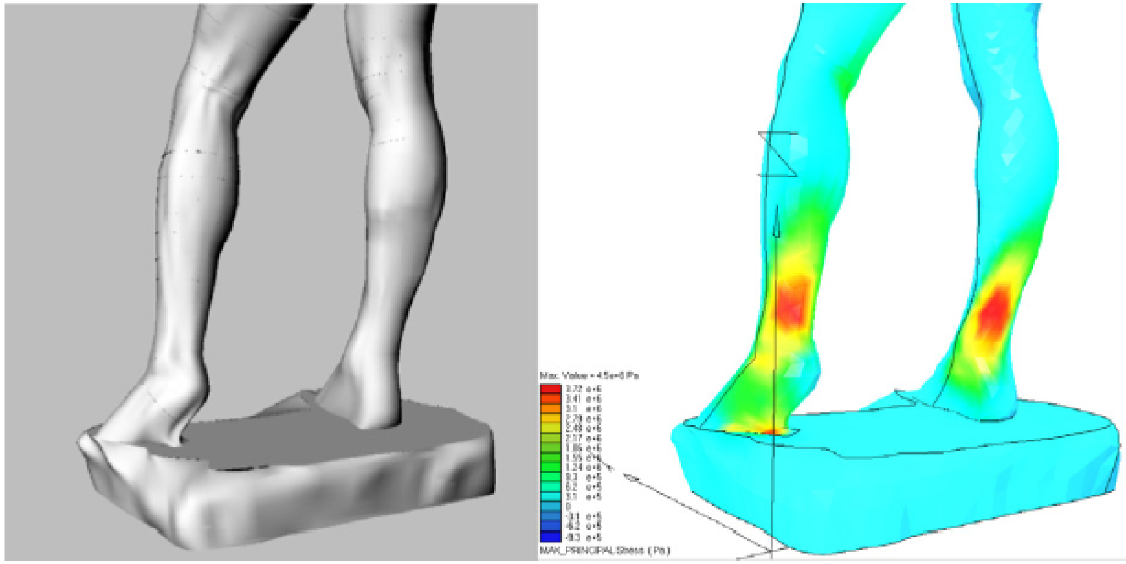


Fig. 7. FEM analysis in vertical conditions (main traction $\sigma 1$ stresses) if the statue had been made without the tree trunk: the maximum tensile stress would have exceeded 4 N/mm^2.

Esempio: David di Michelangelo

Marcello Venusti, Ritratto di Michelangelo', 1535.
Firenze, Casa Buonarroti.

Se ha inserito nell'opera il tronco d'albero, Michelangelo aveva ben chiaro tutto questo….

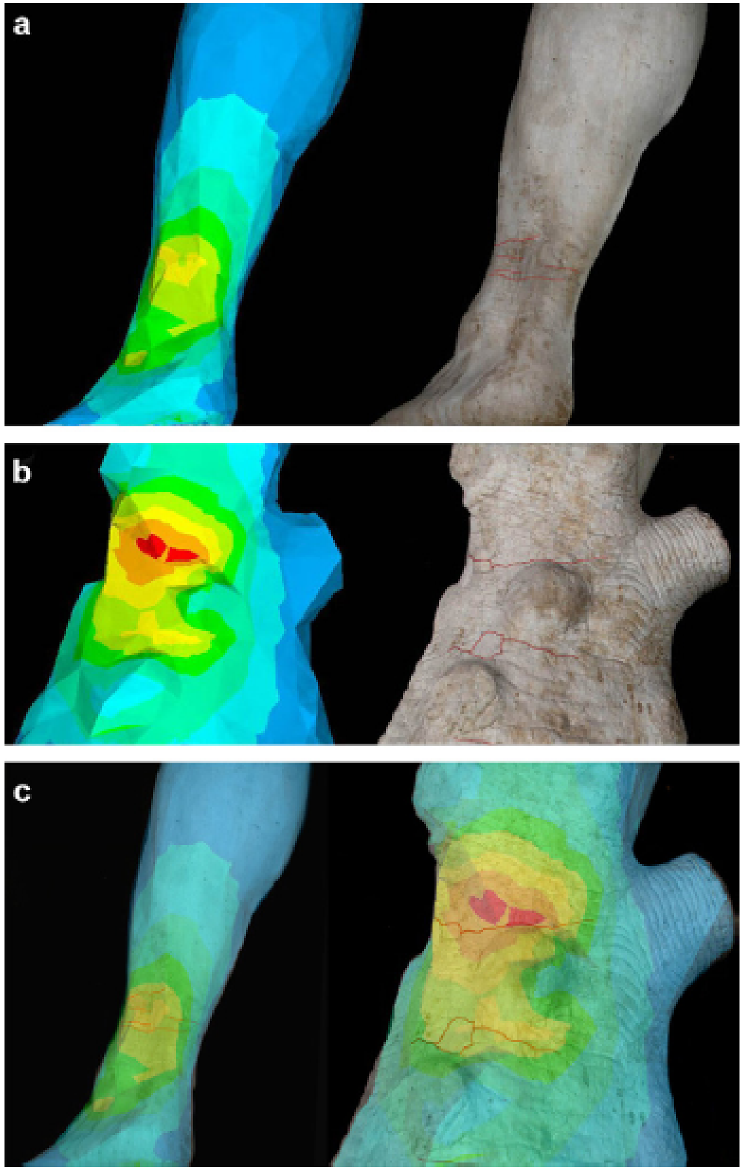


Fig. 8. Comparison between the lesions and the areas of greatest tensile stress.

Esempio: David di Michelangelo

Nell'immagine si può osservare la corrispondenza delle crepe con i punti di maggiore stress calcolati dal software.

In ogni caso questo studio ha concluso che le crepe sono state prodotte da un'anomala inclinazione della statua (le cui cause sono ancora da verificare, ma potrebbe aver contribuito il calco di gesso da circa 6000 kg effettuato nel 1847) osservata a partire dalla metà dell'ottocento che ha fatto salire sopra i 2 GPa lo stress nelle zone delle crepe.

Inoltre è stato verificato che la situazione (statica) odierna non desta preoccupazione immediate in quanto nell'attuale collocazione (dal 1873 è stato posto presso la Galleria dell'Accademia) la statua ha ripreso la sua posizione verticale riducendo così il valore degli stress.

Esempio: David di Michelangelo

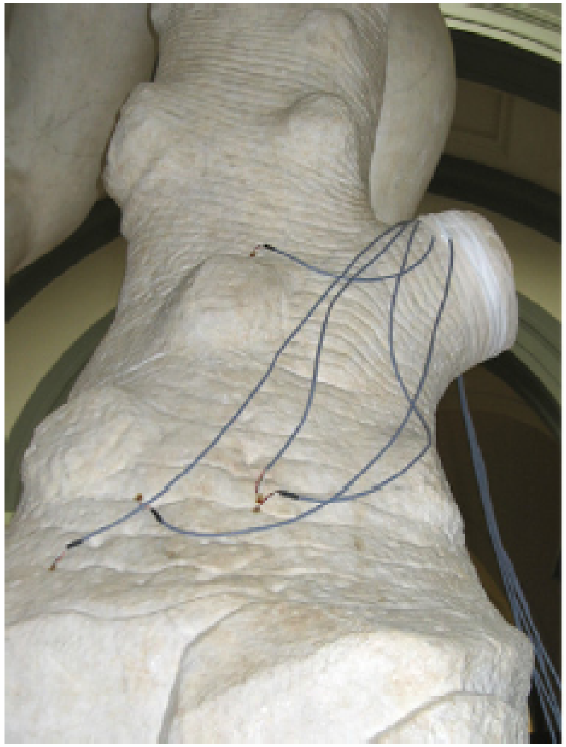
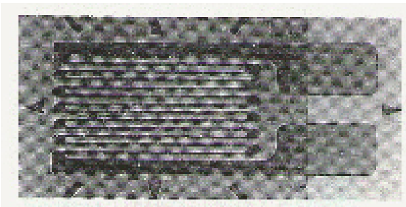


Fig. 23. (a) Strain gages disposition on the three trunk.



Diverso è il discorso sulla stabilità in caso di forti oscillazioni come in presenza di un terremoto.

Fortunatamente, fino ad adesso, i più grossi terremoti nella zona si sono verificati prima della formazione delle crepe, ma è probabile che su lunghi periodi ce ne saranno altri.

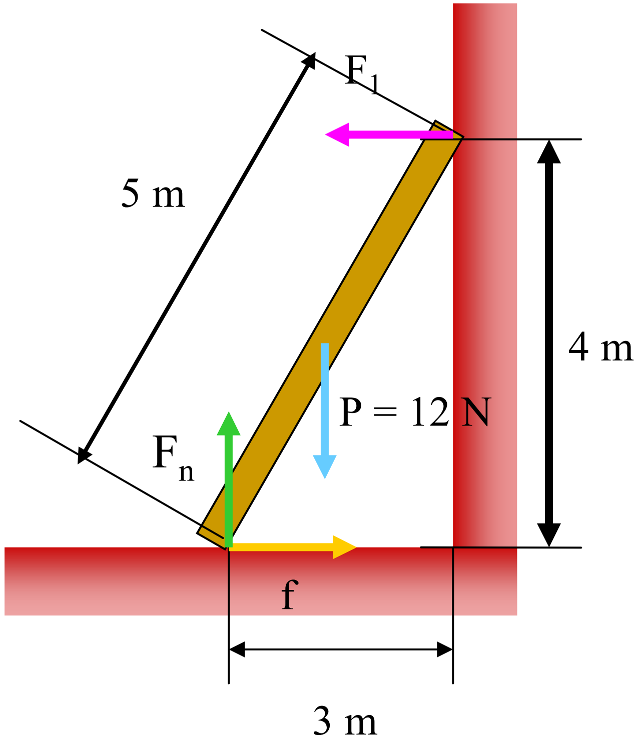
Studi sono in corso per valutare questo problema in modo da adottare le contromisure opportune. In figura sono mostrati i tensimetri collocati nei punti nevralgici della statua e che sono stati utilizzati per valutare i movimenti durante una sollecitazione dinamica.

I primi test (2006) hanno mostrato movimenti significativi delle zone lesionate anche per piccoli impulsi. Ulteriori test sono previsti per il futuro.

ESERCIZIO

Equilibrio: la scala

Una scala uniforme di lunghezza 2L= 5 m pesa 12 N ed è poggiata contro una parete verticale priva di attrito. Il piede della scala si trova a 3 m dalla parete. Qual è il minimo coefficiente di attrito tra la scala e il pavimento che impedisce alla scala di slittare?



Quali sono le forze in gioco?

La forza di gravità **P**

La forza $\mathbf{F_1}$ esercitata orizzontalmente dalla parete

La forza esercitata dal pavimento $\mathbf{F_n}$

La forza di attrito **f**

ESERCIZIO

Equilibrio: la scala

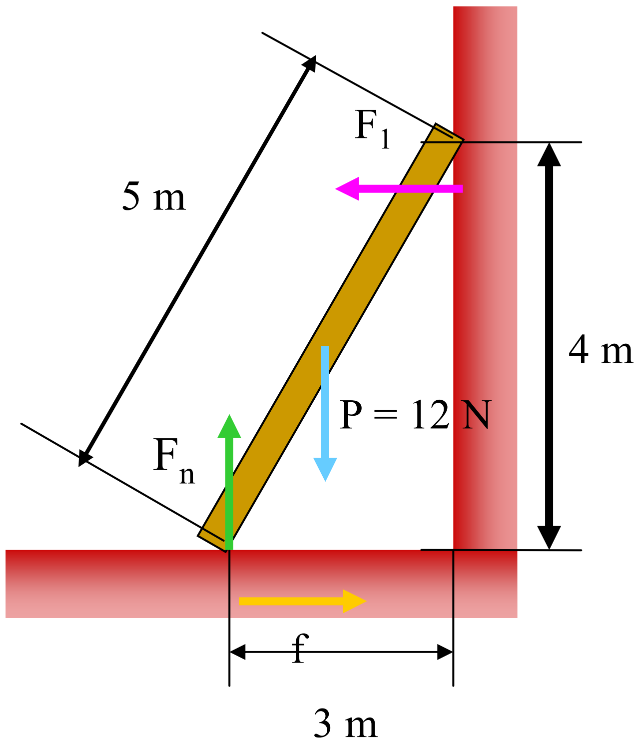
Condizione di equilibrio: $\sum \mathbf{F} = 0$

Lungo l'asse y:

$$\mathbf{F_n = P = 12\ N}$$

Lungo l'asse x:

$$\mathbf{F_1 = f}$$



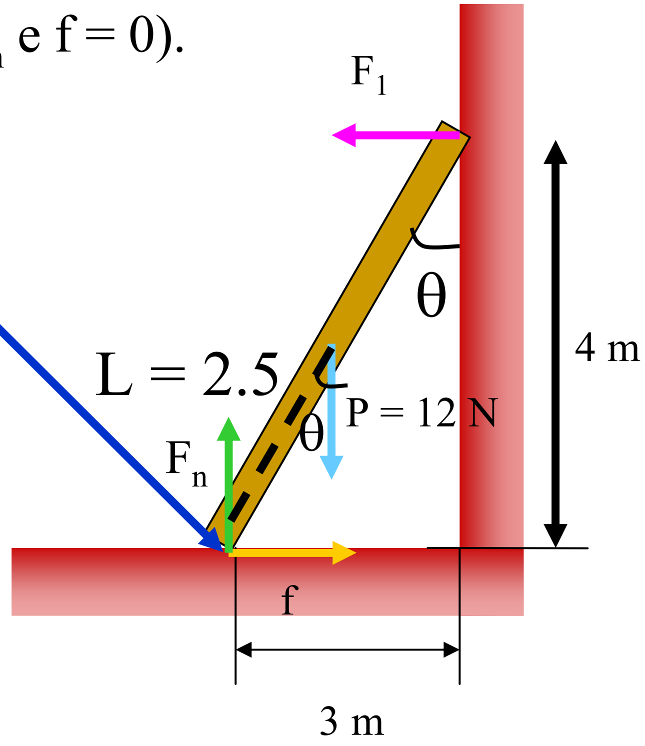
Poiché non conosciamo né f né F_1, dobbiamo usare la seconda condizione di equilibrio e calcolare i momenti delle forze rispetto a un punto conveniente.

ESERCIZIO

Equilibrio: la scala

$$\sum \mathbf{M} = 0$$

Scegliamo il punto di contatto tra la scala e il pavimento perché F_n e f sono entrambe applicate a questo punto quindi il loro momento è nullo (braccio di F_n e f = 0).



Il momento esercitato dalla forza di gravità rispetto a questo punto è in **senso orario (segno negativo!)** e il suo modulo è dato da:

$$P \cdot L \cdot sen\theta = 12 \cdot 2.5 \cdot 3/5 = 18 \text{ Nm}$$

Il momento esercitato da F_1 rispetto allo stesso punto è in **senso antiorario (segno positivo)** con il modulo dato dal prodotto di F_1 per il braccio di 4 m.

$$F_1 \cdot 2L \cdot sen(90 - \theta) = F_1 \cdot 2L \cdot \cos\theta = F_1 \cdot 5 \cdot 4/5 = F_1 \cdot 4 \text{ Nm}$$

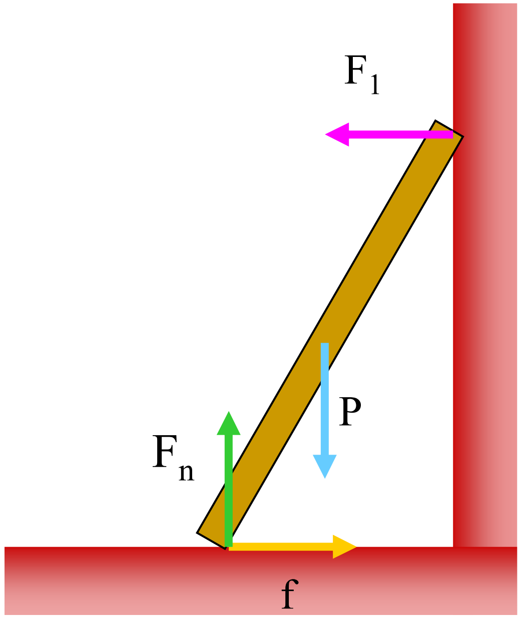
ESERCIZIO

Equilibrio: la scala

Da $\sum \mathbf{M} = 0$ otteniamo:

$$-18\ \text{Nm} + F_1 \cdot 4\ \text{m} = 0$$

$$F_1 = 4.5\ \text{N}$$



F_1 deve essere uguale al modulo della forza di attrito.

Poiché la forza di attrito è legata alla forza normale dalla relazione

$$f \leq \mu_s F_n$$

si ha $\mu_s \geq f / F_n = 4.5/12 = 0.375$ μ_s è il coefficiente di attrito statico.

Attrito volvente

Al moto di puro rotolamento sotto l'azione di forze conservative, come lo sono le forze costanti e in particolare la forza peso, **si può applicare la legge di conservazione dell'energia meccanica**. Infatti la forza di attrito agisce su un punto fermo, per cui lo spostamento è nullo ed è quindi ***nullo il lavoro.***

Sperimentalmente si osserva che un corpo che rotola senza strisciare su un piano orizzontale, in assenza di forze o di momenti applicati, si arresta dopo un certo tempo.

$\Downarrow$

Deve esistere un'altra forma di attrito (attrito volvente o di rotolamento), che viene attribuito alla deformazione locale del piano e può essere rappresentato come l'azione di un momento:

$M_v = h mg$ Con h: coefficiente di attrito volvente [m]

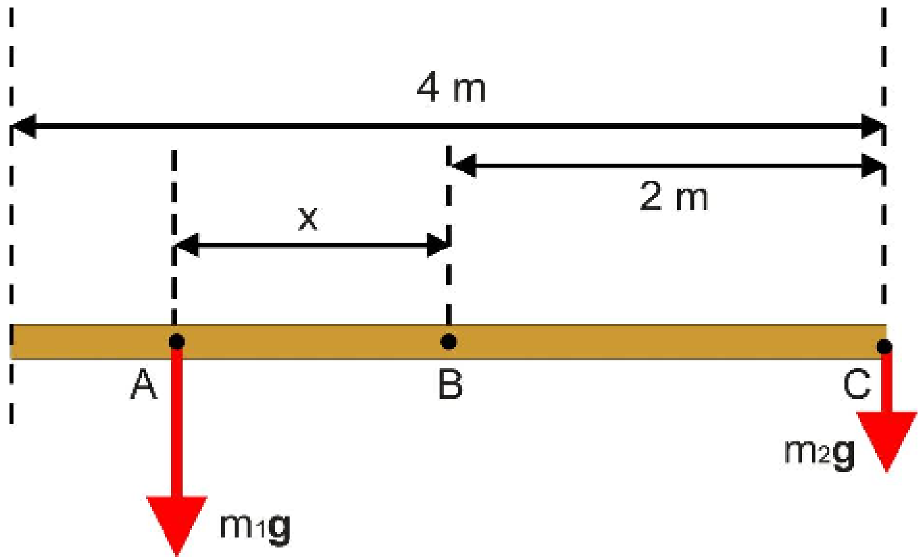
Per vincere il momento dovuto all'azione dell'attrito volvente si deve applicare al corpo di forma circolare una forza di trazione: $F_2 \geq \dfrac{h mg}{r}$

Per spostare cilindro di m=10^3 Kg se striscia $F = \mu_s mg = 0{,}2 \cdot 1000 \cdot 9{,}8 = 1960\,\mathrm{N}$

Se rotola e ha r=0,2 m $F = \dfrac{h mg}{r} = \dfrac{5 \cdot 10^{-5} 10^{3} \cdot 9{,}8}{0{,}2} = 2{,}5\,\mathrm{N}$

Esercizio

Un'altalena è costituita da una tavola di 4 m imperniata nel centro (punto B). Un ragazzo di massa m_2 = 28 kg è seduto ad un'estremità della tavola (punto C). Dove dovrebbe sedere un ragazzo di massa m_1 = 40 kg per equilibrare l'altalena? Consideriamo trascurabile il peso dell'altalena.



Perché l'altalena sia in equilibrio deve essere **nulla la somma dei momenti delle forze agenti su di essa**; tali forze sono:

- la forza peso $m_1\mathbf{g}$, applicata in A;
- la forza peso $m_2\mathbf{g}$, applicata in C.

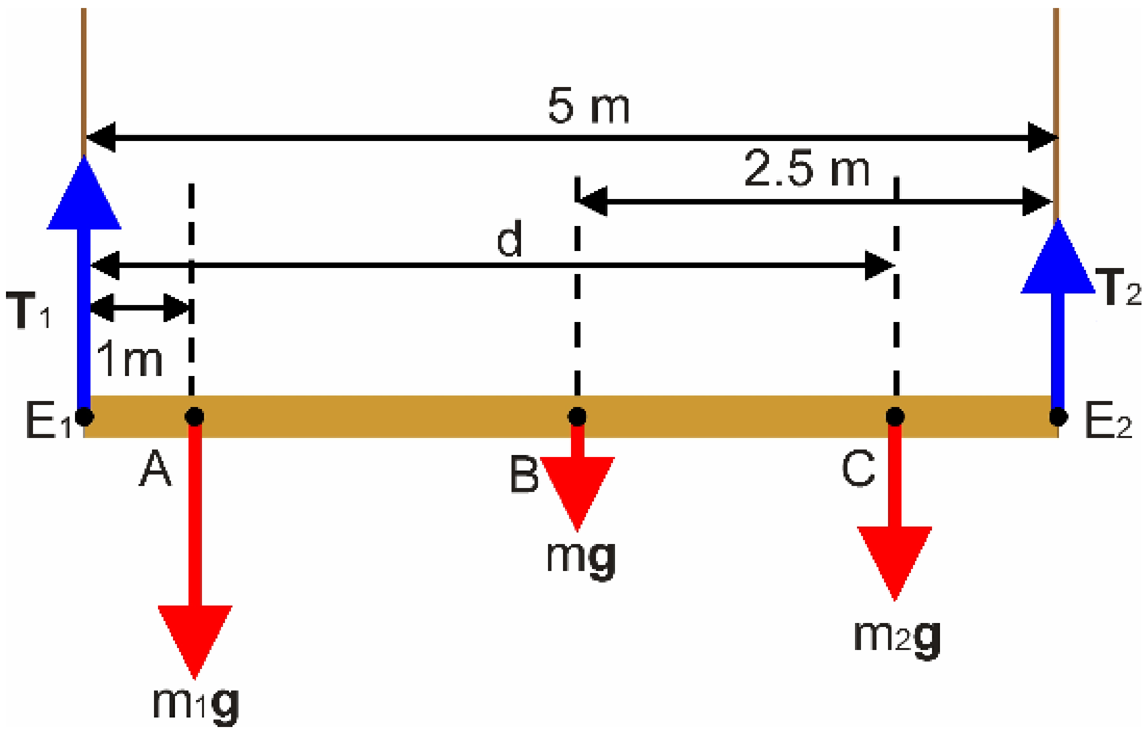
L'altalena è imperniata in B, per cui calcoliamo i momenti delle forze rispetto a tale punto.
La forza peso $m_1\mathbf{g}$ tende a generare una rotazione in senso antiorario, per cui il corrispondente momento è positivo; la forza peso $m_2\mathbf{g}$ tende invece a generare una rotazione in senso orario, per cui il corrispondente momento è negativo.
La somma dei due momenti deve essere nulla all'equilibrio:

$$(m_1 g) \cdot \overline{AB} - (m_2 g) \cdot \overline{BC} = 0$$

$$\overline{AB} = \frac{(m_2 g) \cdot \overline{BC}}{(m_1 g)} = \frac{m_2 \cdot \overline{BC}}{m_1} = \frac{28\,\text{kg} \cdot 2\,\text{m}}{40\,\text{kg}} = 1.4\,\text{m}$$

Esercizio

Due imbianchini lavorano su una tavola lunga 5.0 m sospesa alla sommità di un edificio mediante due corde agganciate agli estremi della tavola. Ciascuna corda si romperebbe se la tensione superasse 1 kN. L'imbianchino 1, avente la massa di 80 kg, lavora ad una distanza di 1.0 m dall'estremo. Si trovi l'intervallo di posizioni accessibili per l'imbianchino 2 se la sua massa è 60 kg e la tavola ha una massa di 20 kg.



$m = 20$ kg
$m_1 = 80$ kg
$m_2 = 60$ kg

Perché la tavola sia in equilibrio deve essere **nulla la somma dei momenti delle forze agenti su di essa**; tali forze sono:

- la forza peso $m_1\mathbf{g}$, applicata in A;
- la forza peso $m\mathbf{g}$, applicata in B;
- la forza peso $m_2\mathbf{g}$, applicata in C;
- la tensione T_1 esercitata dalla corda all'estremità E_1;
- la tensione T_2 esercitata dalla corda all'estremità E_2.

Questa condizione deve essere vera <u>indipendentemente dalla scelta del punto rispetto al quale calcoliamo il momento</u>; scegliamo ad esempio il punto E_1. Rispetto ad esso:

- le forze peso $m_1\mathbf{g}$, $m_2\mathbf{g}$ ed $m\mathbf{g}$ tendono a produrre una rotazione in senso orario ($\rightarrow$ momento negativo);
- la tensione T_2 tende a produrre una rotazione in senso antiorario ($\rightarrow$ momento positivo);
- la tensione T_1 è applicata nel punto E_1, quindi il braccio è nullo e anche il momento è nullo.

$$T_1 \cdot 0 + T_2 \cdot (\overline{E_1E_2}) - m_1 g \cdot (\overline{E_1A}) - mg \cdot (\overline{E_1B}) - m_2 g \cdot d = 0$$

Le incognite sono T_1, T_2 e d. Sappiamo che in condizioni di equilibrio anche **la somma di tutte le forze agenti sulla tavola deve essere nulla**:

$$T_1 + T_2 - m_1 g - mg - m_2 g = 0$$

$$\rightarrow T_1 + T_2 = (m_1 + m + m_2)g = (80 + 20 + 60)\,\mathrm{kg} \cdot 9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1568\,\mathrm{N}$$

Poniamoci nel caso limite in cui la corda fissata all'estremità E_1 sta per spezzarsi, cioè T_1 = 1 kN = 1000 N:

$$T_1 + T_2 = 1568\,\mathrm{N} \xrightarrow{T_1 = 1000\,\mathrm{N}} T_2 = (1568 - 1000)\,\mathrm{N} = 568\,\mathrm{N}$$

L'unica incognita è pertanto la distanza d:

$$d = \frac{T_2 \cdot (\overline{E_1E_2}) - m_1 g \cdot (\overline{E_1A}) - mg \cdot (\overline{E_1B})}{m_2 g} =$$

$$= \frac{568\,\mathrm{N} \cdot 5\,\mathrm{m} - (80 \cdot 9.8)\,\mathrm{N} \cdot 1\,\mathrm{m} - (20 \cdot 9.8)\,\mathrm{N} \cdot 2.5\,\mathrm{m}}{60 \cdot 9.8\,\mathrm{N}} = 2.7\,\mathrm{m}$$

L'imbianchino 2 può occupare senza pericolo tutte le posizioni comprese tra C ed E_2.