Vettori e scalari

GRANDEZZE FISICHE

Scalari: sono completamente definite quando se ne conosce la sola misura (es. tempo, massa, temperatura, volume…)

Vettoriali: richiedono un maggior contenuto informativo (es. velocità, accelerazione, forza…)

*Domenica sono andato in bicicletta per **due ore**…*

L'informazione sul tempo è completa?

Il **tempo** è un esempio di quantità **scalare**: sono sufficienti un numero e la rispettiva unità di misura per caratterizzarlo completamente. Quindi informazione sul tempo è completa

Vettori e scalari

•*Domenica ho fatto venti chilometri in bicicletta…*

L'informazione sullo spostamento è completa? No, ne conosco solo **l'entità**.

•*Domenica ho fatto venti chilometri in bicicletta lungo la Val d'Adige…* $\Rightarrow$ ho aggiunto informazione sulla mia **direzione**.

•*Domenica ho fatto venti chilometri in bicicletta lungo la Val d'Adige verso Trento* $\Rightarrow$ questo dato completa l'informazione sul **verso** del mio spostamento.

Una **grandezza fisica è un vettore** quando per definirla completamente è necessario fornire un modulo (= l'entità), una direzione e un verso.

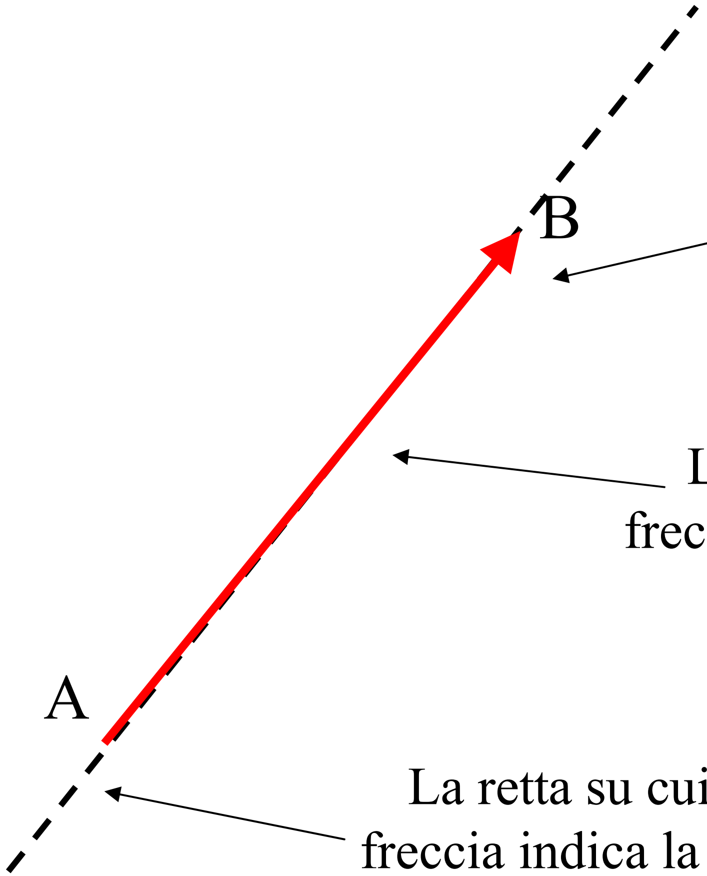
VETTORE $\begin{cases} \text{modulo} \\ \text{direzione} \\ \text{verso} \end{cases}$

Rappresentazione grafica

Un **vettore** può essere rappresentato graficamente da un **segmento orientato**.

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$$

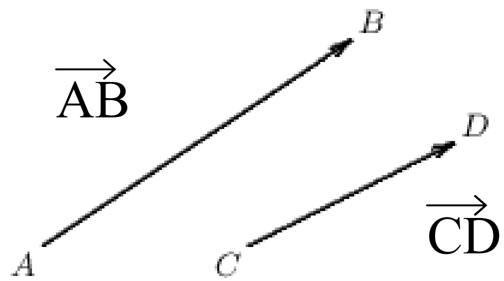
$$|\,\mathbf{a}\,| = |\,\overrightarrow{AB}\,|$$ si chiama modulo



La punta della freccia indica il **verso**.

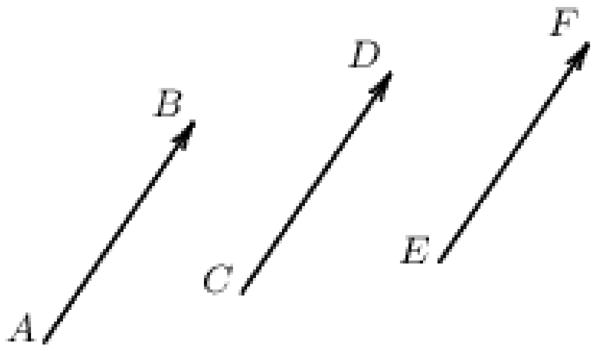
La lunghezza della freccia indica il **modulo**.

La retta su cui giace la freccia indica la **direzione**.

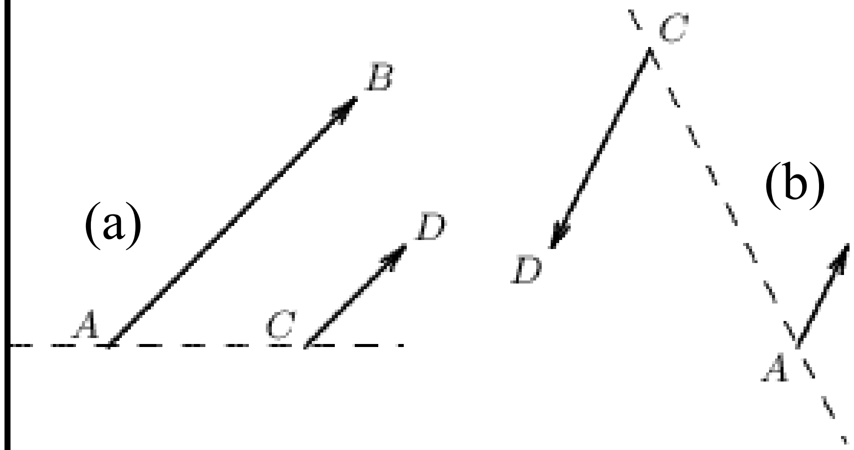


Rappresentazione grafica

<u>Definizione</u>: Un **vettore** nel piano o nello spazio è definito come **l'insieme di tutti i segmenti orientati aventi uguali direzione, verso e modulo**.

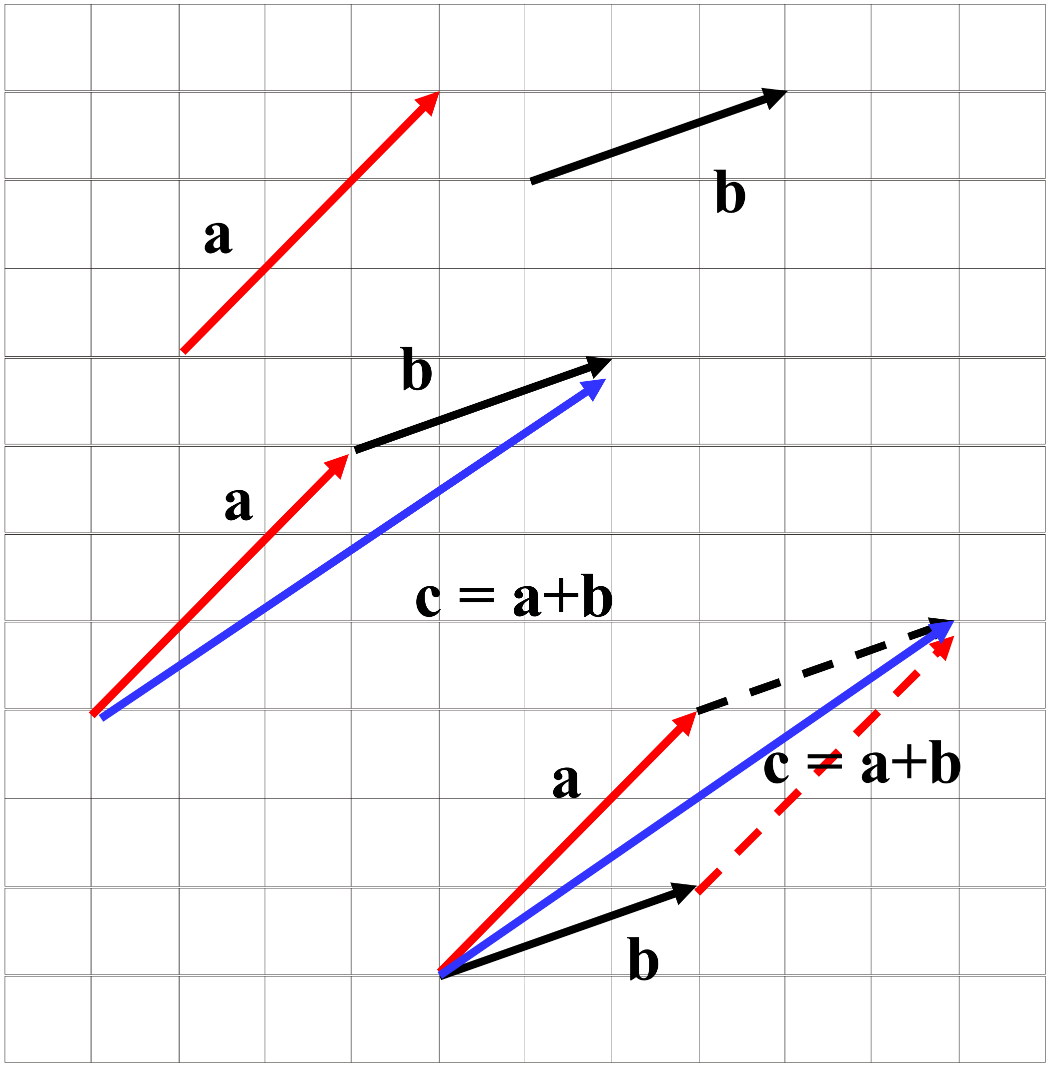


Segmenti orientati **rappresentativi di uno stesso vettore**.



Segmenti orientati paralleli concordi (a) ed opposti (b).

Somma di vettori



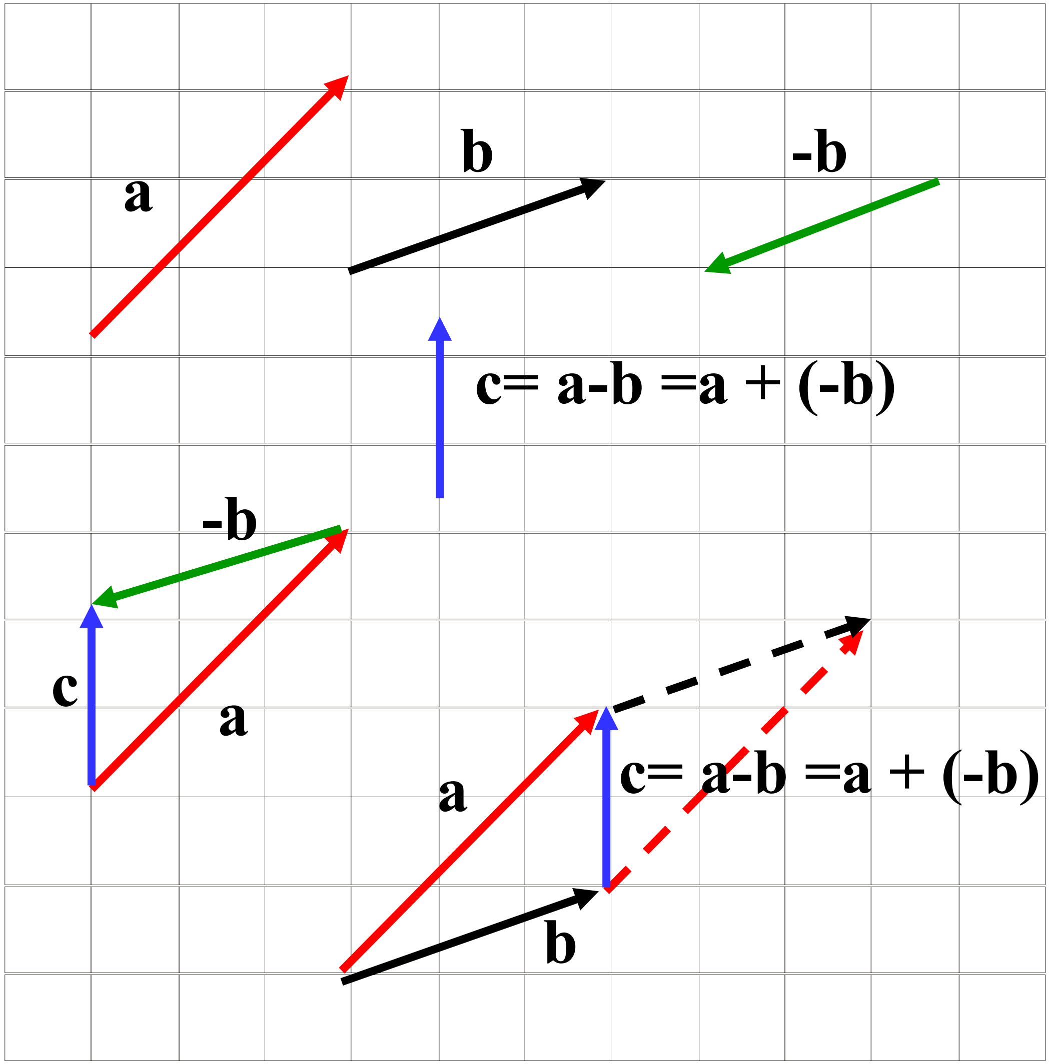
Somma di vettori

Definizione: La somma di due vettori **a** e **b** è un vettore **c** = **a** + **b** la cui direzione e verso si ottengono nel modo seguente:
si fissa il vettore **a** e, a partire dal suo punto estremo, si traccia il vettore **b**. Il vettore che unisce l'origine di **a** con l'estremo di **b** fornisce la somma **c** = **a** + **b**.

La somma di due vettori può essere calcolata anche utilizzando la **regola del parallelogramma**:
La somma di due vettori non collineari è data dal vettore rappresentato dalla diagonale del parallelogramma costruito per mezzo dei segmenti orientati rappresentativi dei due vettori e disposti in modo da avere l'origine in comune.

Proprietà commutativa:	**a** + **b** = **b** + **a**
Proprietà associativa:	(**a** + **b**) + **c** = **a** + (**b** + **c**)

Differenza di vettori

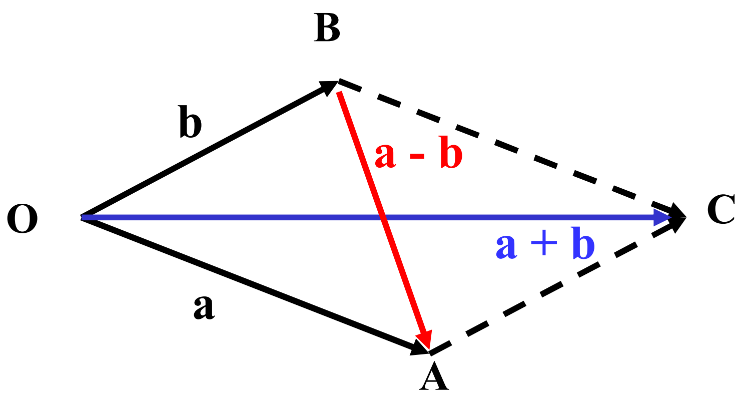


Differenza di vettori

<u>Definizione</u>: Il **vettore opposto** ad **a** = $\overrightarrow{AB}$ è – **a** = $\overrightarrow{BA}$.
I moduli di **a** e – **a** sono uguali, la direzione è la medesima e i versi sono opposti.

<u>Definizione</u>: La differenza **a** – **b** di due vettori è la somma del vettore **a** con l'opposto del vettore **b**, ossia:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

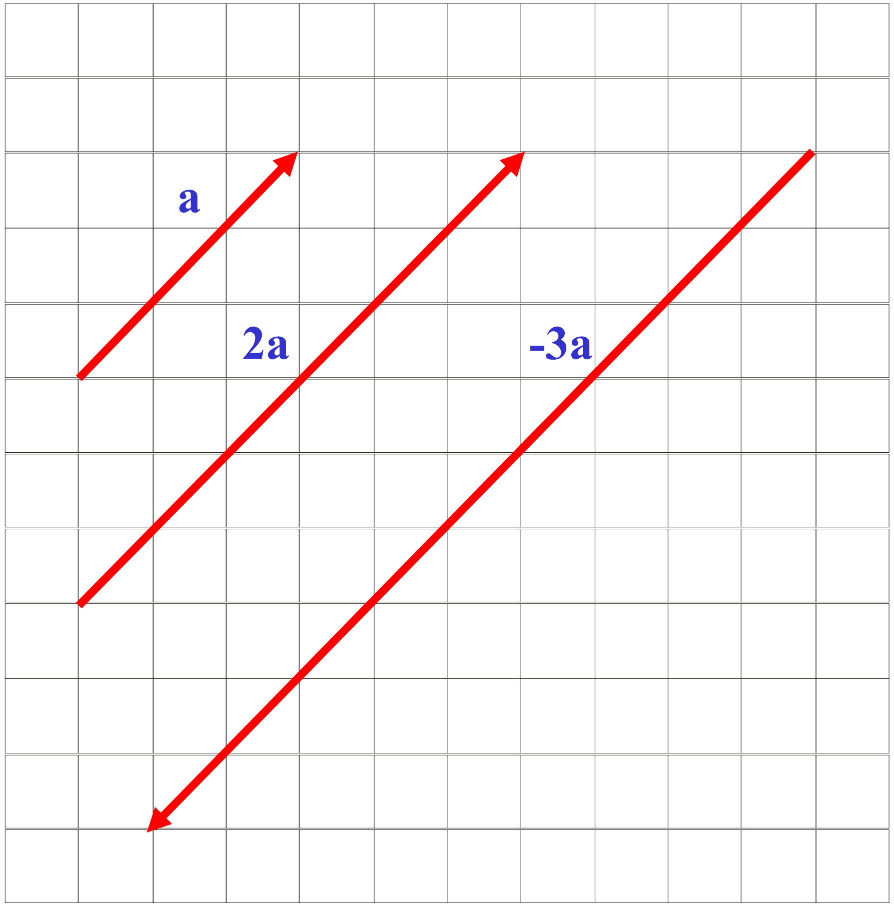


Notiamo che se, sulla base di **a** e di **b** disposti con la medesima origine O, si costruisce un parallelogramma, allora la lunghezza della diagonale uscente da O esprime la lunghezza di **a** + **b** mentre la lunghezza dell'altra diagonale è pari alla lunghezza del vettore **a** – **b**.

Moltiplicazione scalare-vettore

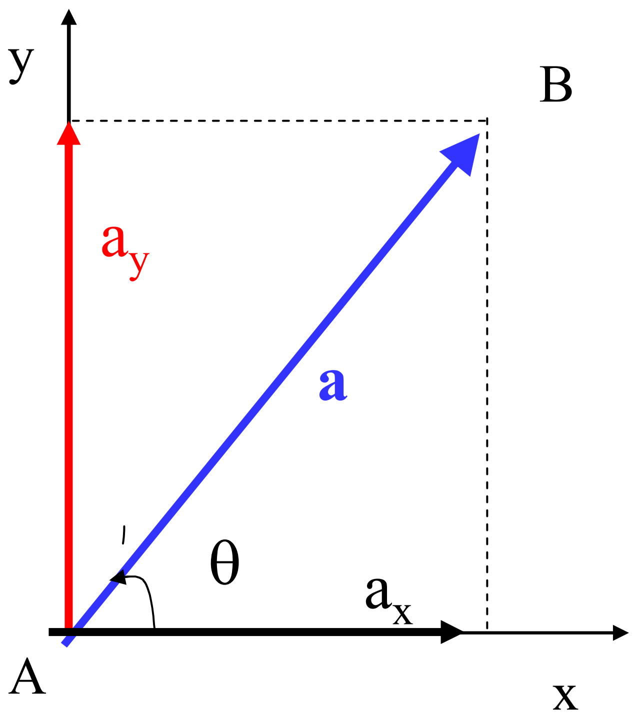
Definizione: La moltiplicazione $\alpha\mathbf{a}$ (o $\mathbf{a}\alpha$) di un **vettore a** con il **numero reale** α è un vettore $\mathbf{b} = \mathbf{a}\alpha$, collineare ad **a**, di modulo $|\alpha| \cdot |\mathbf{a}|$ e verso coincidente con quello di **a** se $\alpha > 0$, opposto a quello di **a** se $\alpha < 0$.
Nel caso che sia $\alpha = 0$ o $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, il vettore $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Proprietà:
1. $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$
2. $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$
3. $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$



Componenti cartesiane

Il vettore può essere individuato anche tramite le sue componenti lungo un sistema di assi cartesiani.



Il modulo del vettore può essere espresso in funzione delle componenti (teorema di Pitagora):

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Le componenti, a loro volta, sono legate al modulo dalle relazioni (trigonometria):

$$a_x = |\mathbf{a}| \cos\theta$$
$$a_y = |\mathbf{a}| \operatorname{sen}\theta$$

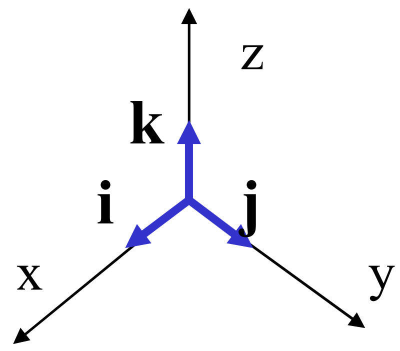
Anche l'angolo θ può essere espresso in funzione delle componenti:

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$$

La somma dei vettori $\mathbf{a}_x$ e $\mathbf{a}_y$ dà il vettore $\mathbf{a}$, di cui $\mathbf{a}_x$ e $\mathbf{a}_y$ sono i vettori componenti.

Versori

Esistono dei vettori speciali, detti **versori,** che possono essere utilizzati per caratterizzare tutti gli altri vettori. I versori hanno queste caratteristiche:



- hanno modulo 1;
- sono diretti lungo gli assi cartesiani;
- indicano il verso positivo degli assi cartesiani

Un qualunque vettore può essere espresso per mezzo delle sue componenti (che chiameremo a_x, a_y e a_z) e dei versori **i**, **j** e **k** (indicabili anche con la notazione $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$).

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

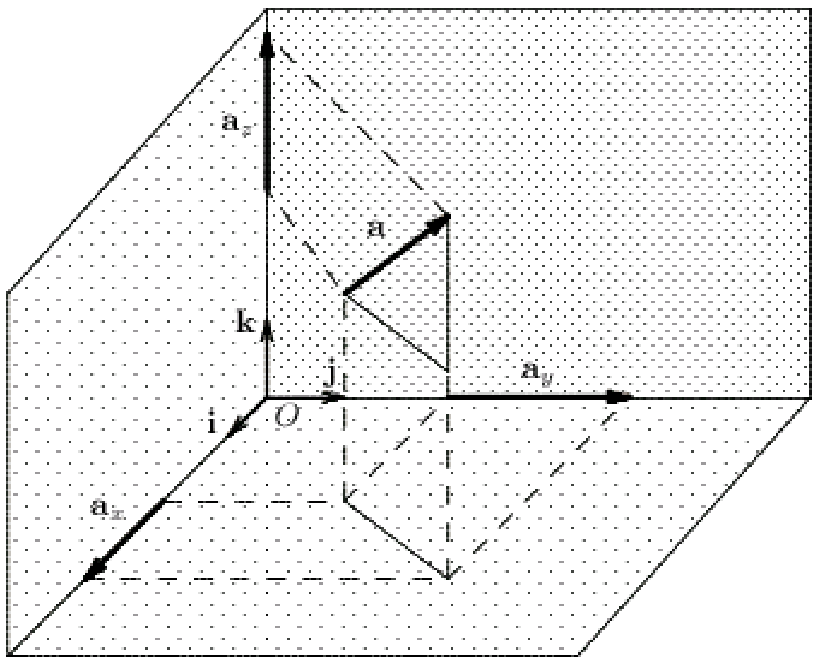
Le componenti di un vettore qualsiasi $\overrightarrow{AB}$ si ottengono dalla differenza delle corrispondenti coordinate dell'estremo finale B con quelle del estremo iniziale A, ossia:

$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\hat{j} + (z_B - z_A)\hat{k} \\ |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \end{aligned}}$$

Componenti cartesiane

In tre dimensioni:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$



Le operazioni finora introdotte possono essere scritte in una nuova forma:

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} + (a_z + b_z)\hat{k}}$$

$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\hat{i} + (a_y - b_y)\hat{j} + (a_z - b_z)\hat{k}}$$

$$\boxed{\alpha\vec{a} = \alpha a_x\hat{i} + \alpha a_y\hat{j} + \alpha a_z\hat{k}}$$

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Esempio

Quanto valgono la somma e la differenza di due vettori di componenti $a_x = -2$, $a_y = 1$ e $b_x = 5$, $b_y = 2$? Calcolare il modulo dei vettori somma e differenza.

$$\vec{a} = -2\hat{i} + \hat{j}$$
$$\vec{b} = 5\hat{i} + 2\hat{j}$$
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (-2+5)\hat{i} + (1+2)\hat{j} = 3\hat{i} + 3\hat{j}$$
$$|\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 4.24$$
$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (-2-5)\hat{i} + (1-2)\hat{j} = -7\hat{i} - \hat{j}$$
$$|\vec{d}| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 7.07$$

Prodotto scalare

Si tratta di un'operazione che **associa ad una coppia di vettori uno scalare**.

Definizione: Si dice **prodotto scalare** di due vettori **a** e **b** il numero reale dato da:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\theta$$

dove theta è l'angolo compreso tra **a** e **b**.
Si dimostra che il prodotto scalare può anche essere espresso come la somma dei prodotti delle componenti omonime (cioè relative agli stessi assi); in simboli:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{a_x b_x} + \mathbf{a_y b_y} + \mathbf{a_z b_z}$$

Proprietà:

- $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{b} \bullet \mathbf{a}$
- $\alpha(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}) = (\alpha\, \mathbf{a}) \bullet \mathbf{b} = \mathbf{a} \bullet (\alpha\, \mathbf{b})$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{a} = a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z = \mathbf{a}^2$$

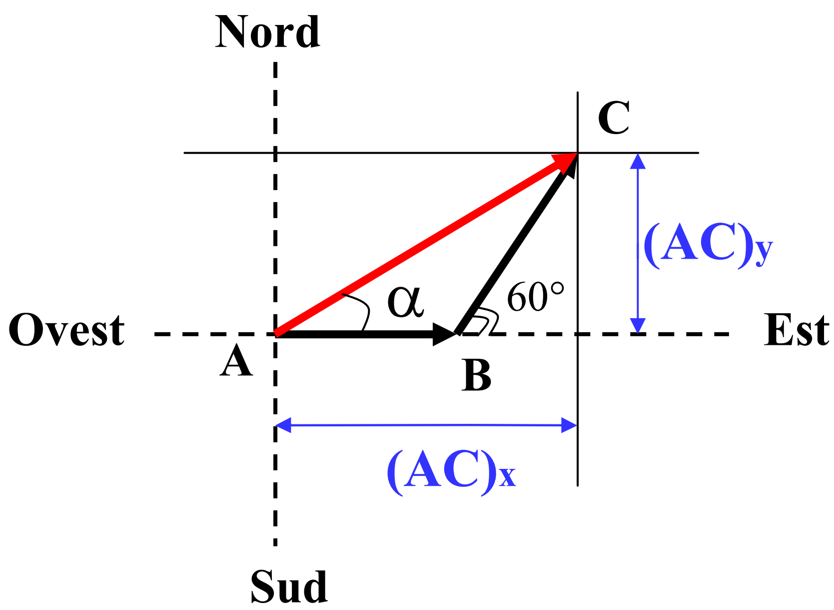
Caso particolare: **a** perpendicolare al vettore **b**. In questo caso:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = ab \cos 90° = 0$$

Se il **prodotto scalare** di due vettori è **nullo**, allora o uno dei due vettori coincide con il vettore nullo oppure i due vettori sono **perpendicolari.**

Esercizio

Un uomo percorre 3 km verso Est e poi 4 km a 60° a Nord rispetto a Est. Qual è lo spostamento risultante?



$$\vec{AB} = (AB)_x \hat{i} + (AB)_y \hat{j}$$

$$\vec{BC} = (BC)_x \hat{i} + (BC)_y \hat{j}$$

$$\vec{AC} = (AC)_x \hat{i} + (AC)_y \hat{j}$$

$$(AC)_x = (AB)_x + (BC)_x =$$

$$= (3 + 4\cos 60°)\,\text{km} = (3+2)\,\text{km} = 5\,\text{km}$$

$$(AC)_y = (AB)_y + (BC)_y =$$

$$= (0 + 4\sin 60°)\,\text{km} = 3.46\,\text{km}$$

$$|AC| = \sqrt{(AC)_x^2 + (AC)_y^2} = \sqrt{5^2 + (3.46)^2} = \sqrt{37} = 6.1\,\text{km}$$

$$(AC)_y = (AC)_x \tan\alpha \rightarrow \tan\alpha = \frac{(AC)_y}{(AC)_x} = \frac{3.46}{5} = 0.692 \rightarrow \alpha \cong 35°$$

Esercizi

1. Un uomo percorre 3 km verso Est e poi 4 km a 60° a Nord rispetto a Est. Qual è lo spostamento risultante?
2. Si trovino modulo e direzione orientata dei vettori che hanno le seguenti componenti: (a) $A_x = 5$ m, $A_y = 3$ m; (b) $B_x = 10$ m/s, $B_y = -7$ m/s; (c) $C_x = -2$ m, $C_y = -3$ m.
3. Quanto valgono la somma e la differenza di due vettori di componenti $a_x = -2$, $a_y = 1$, $a_z = 3$ e $b_x = 5$, $b_y = 2$, $b_z = 0$? Calcolare il modulo dei vettori somma e differenza.
4. Dati i vettori **a**= 2 **i** +3**j** e **b**= 3/4 **i** + 1/2**j** , calcolare il prodotto scalare.
5. Dati i vettori **a** e **b** e , trovare il vettore tale che il suo modulo sia uguale a 5 e sia perpendicolare al vettore **a** e al vettore **b**
   a= 2 **i** +**j** – 3 **k**
   b= **i** -2**j** + **k**
6. Rappresentare sul piano cartesiano i vettori A e B di componenti: $A_x= -2$ m $A_y= 2$ m e $B_x= 2$ m, $B_y= 2$ m. Calcolare il modulo e la direzione orientata dei vettori **A, B e C** essendo C la somma di **A e B**