Funzioni esponenziali e logaritmi

La funzione esponenziale

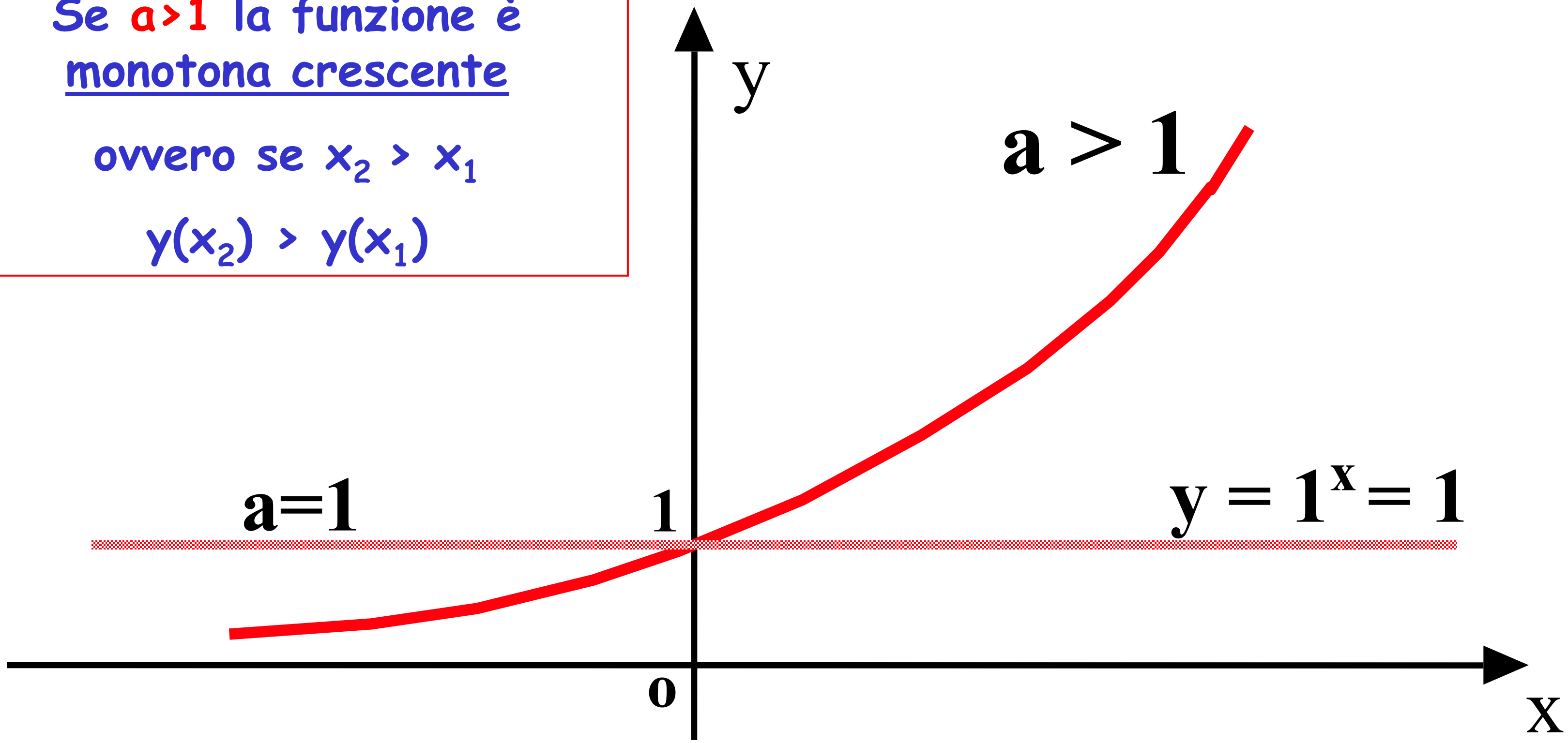
La funzione $\boxed{y = a^x}$ è chiamata funzione esponenziale di x dove a è la base della funzione.

Condizioni di validità: $\begin{cases} a > 0; \\ -\infty < x < \infty; \\ y > 0 \end{cases}$

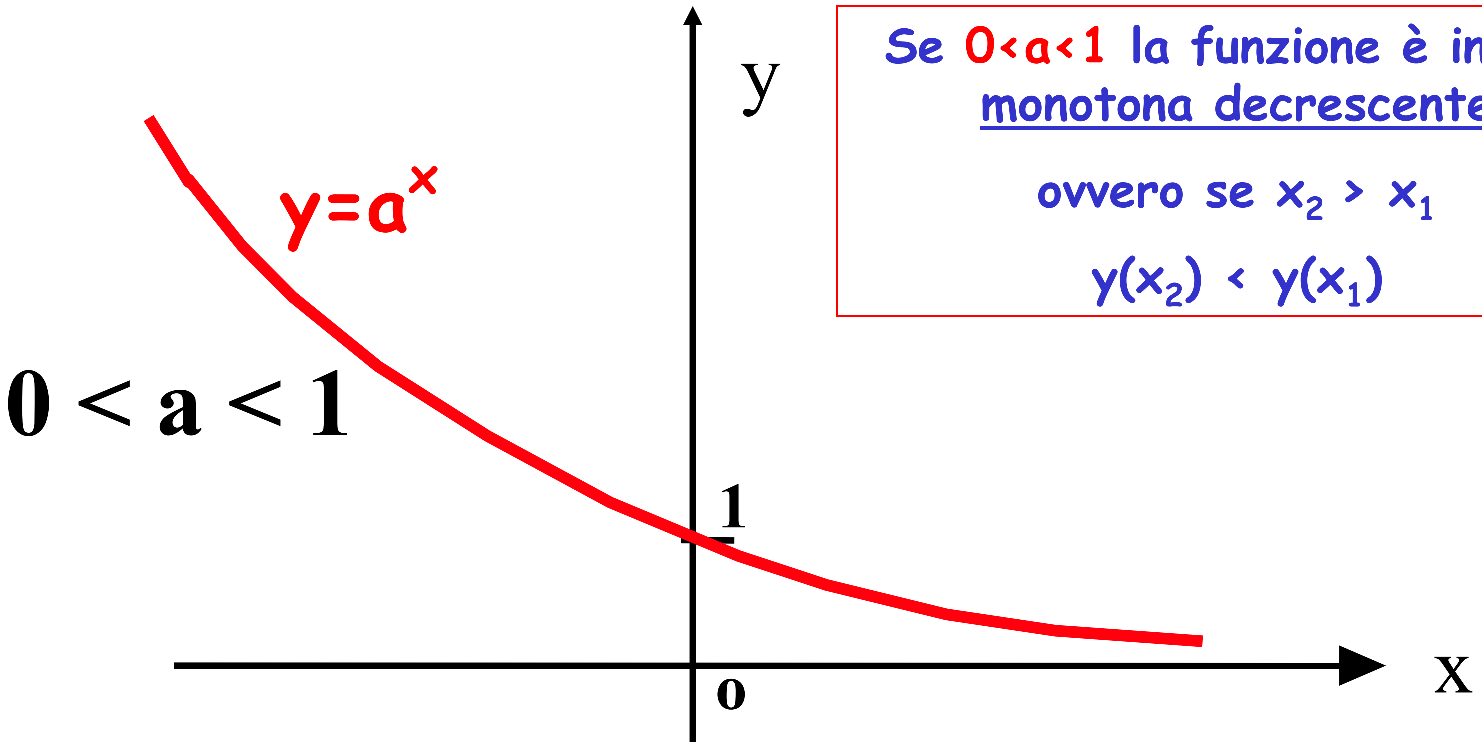
Se $a>1$ la funzione è monotona crescente

ovvero se $x_2 > x_1$

$y(x_2) > y(x_1)$



La funzione esponenziale



Se 0<a<1 la funzione è invece monotona decrescente

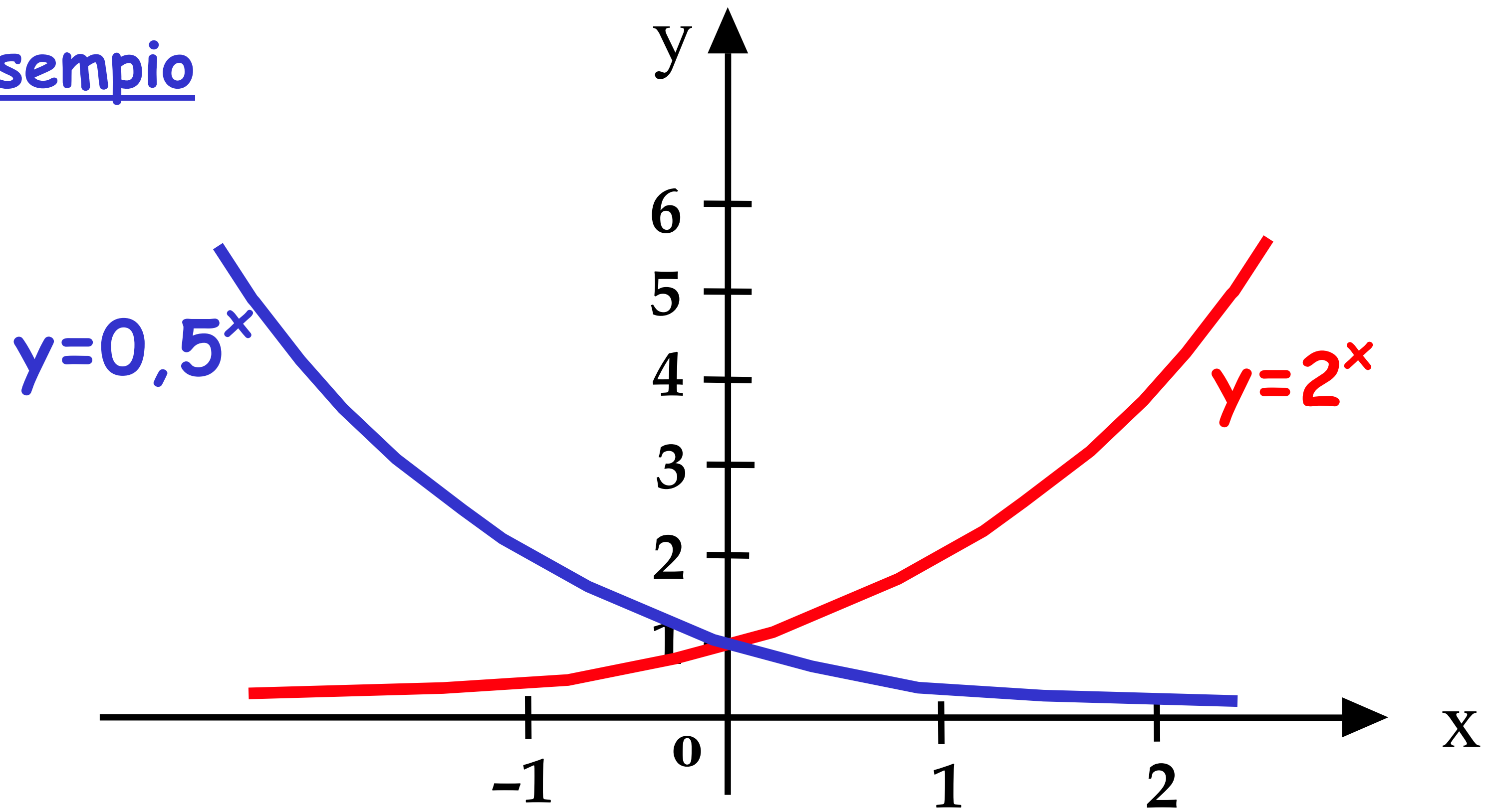
ovvero se $x_2 > x_1$

$y(x_2) < y(x_1)$

Infatti, vale la relazione $y = a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$

La funzione esponenziale

Esempio

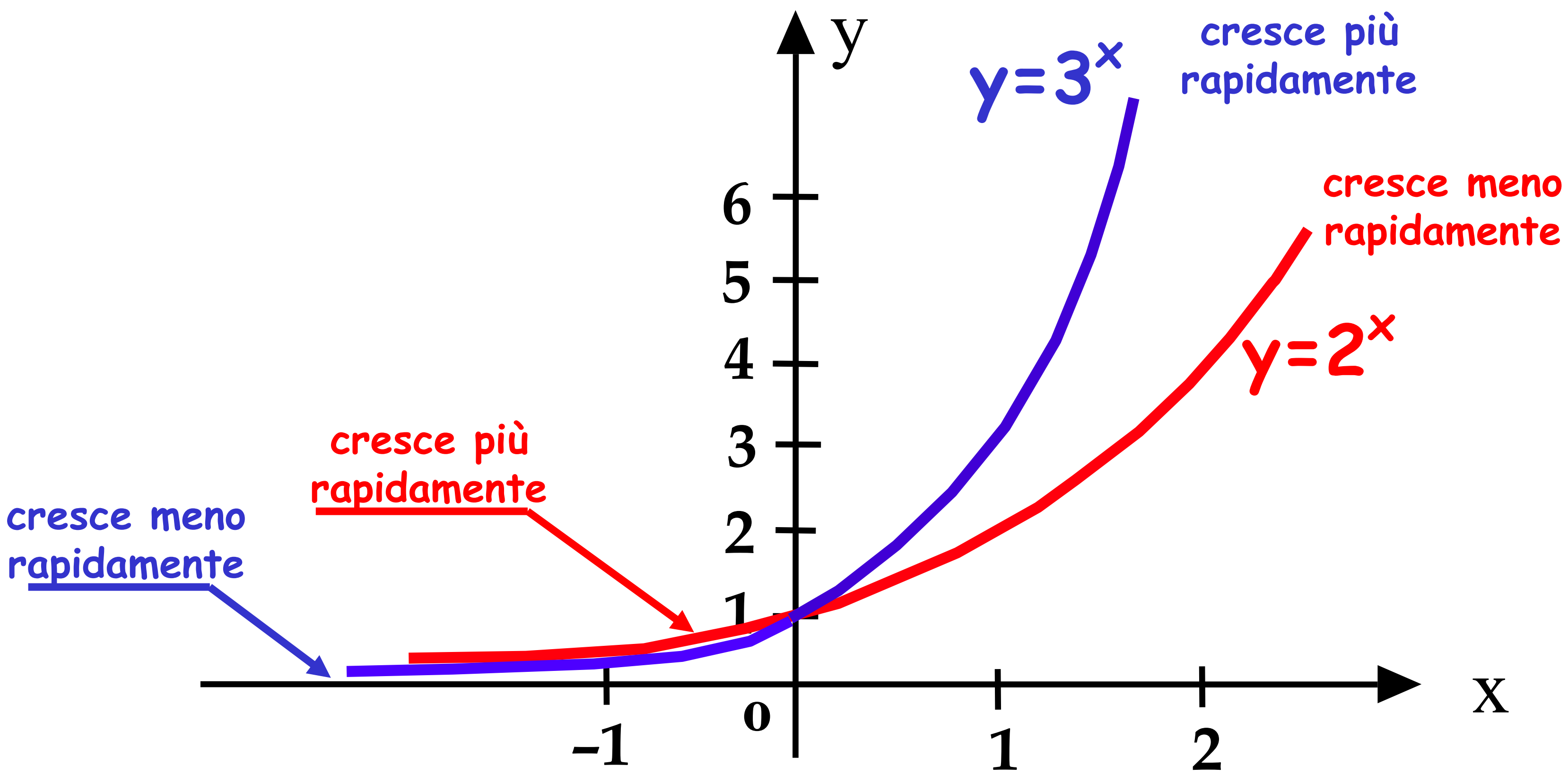


Le due funzioni rappresentate sono simmetriche rispetto ad x=0

$$y = 0{,}5^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$$

La funzione esponenziale

Esempio: funzioni esponenziali con basi differenti ($a>1$)

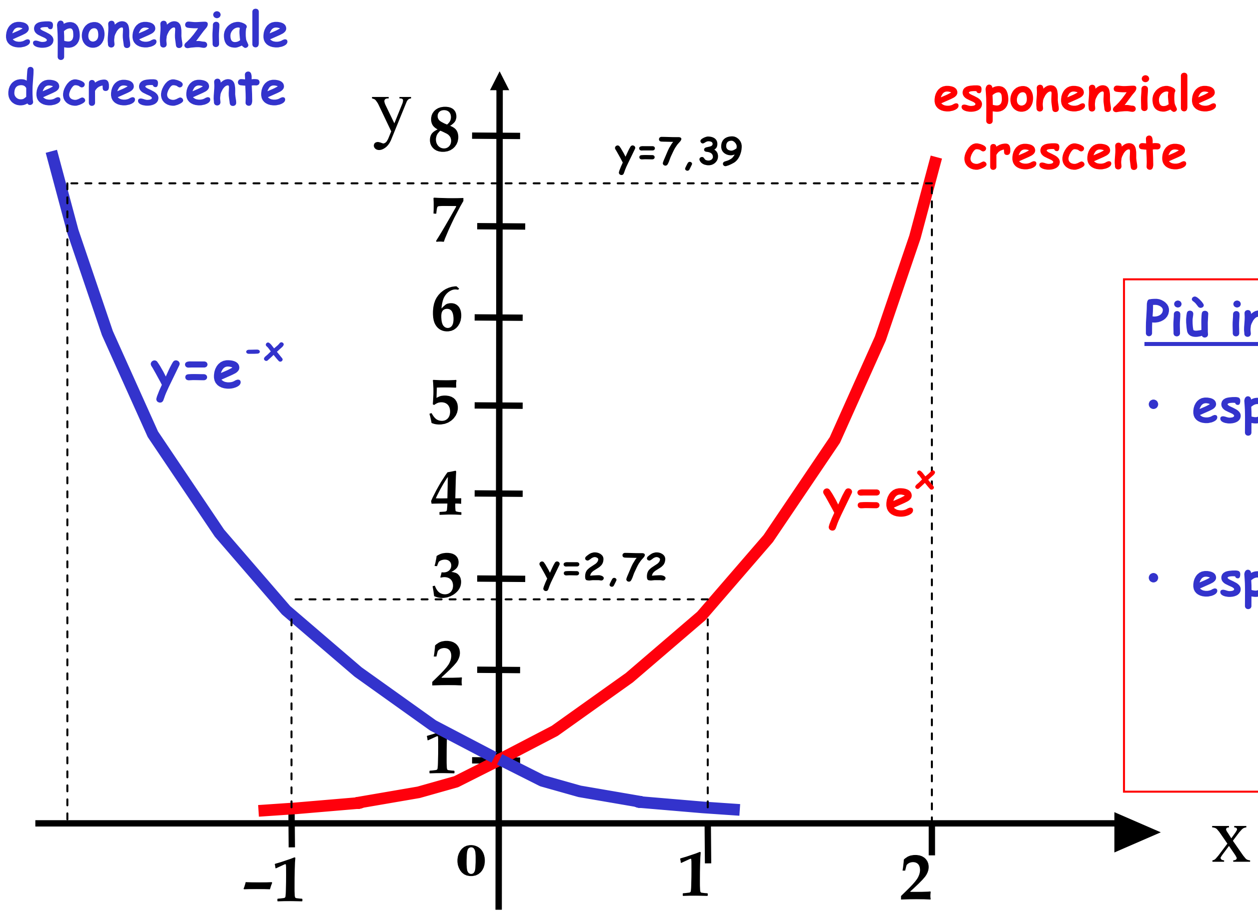


La funzione esponenziale "standard"

In fisica si incontrano di frequente funzioni esponenziali con base e

e=2,718281.... (numero di Nepero)

alle volte indicate con la notazione y=exp x



<u>Più in generale</u>:

- esponenziale crescente

  $y=Ae^{\alpha x}$

- esponenziale decrescente

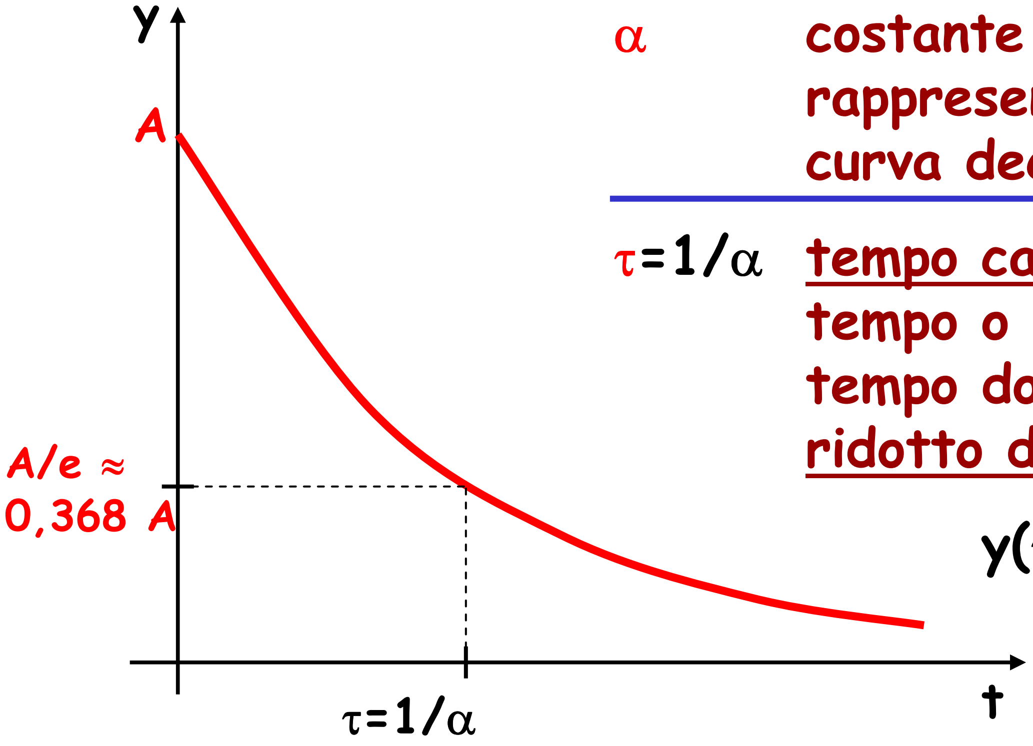
  $y=Ae^{-\alpha x}$

La funzione esponenziale decrescente

È molto importante per le svariate applicazioni in fisica:

$$y(t) = Ae^{-\alpha t}$$

oscillazioni smorzate	$E(t)=E_o e^{-\delta t}$
decadimenti radioattivi	$A(t)= A_o e^{-\lambda t}$
scarica di un condensatore	$V(t)= V_o e^{-t/\tau}$



A	valore della funzione all'istante $t=0$
α	costante caratteristica (dim. t^{-1}) rappresenta quanto velocemente la curva decresce.
$\tau=1/\alpha$	tempo caratteristico (o costante di tempo o vita media): rappresenta il tempo dopo il quale il valore di y si è ridotto di un fattore e. Infatti se $t=\tau$

$$y(\tau) = Ae^{-\alpha\cdot(1/\alpha)} = Ae^{-1} = A/e \approx 0{,}368\ A$$

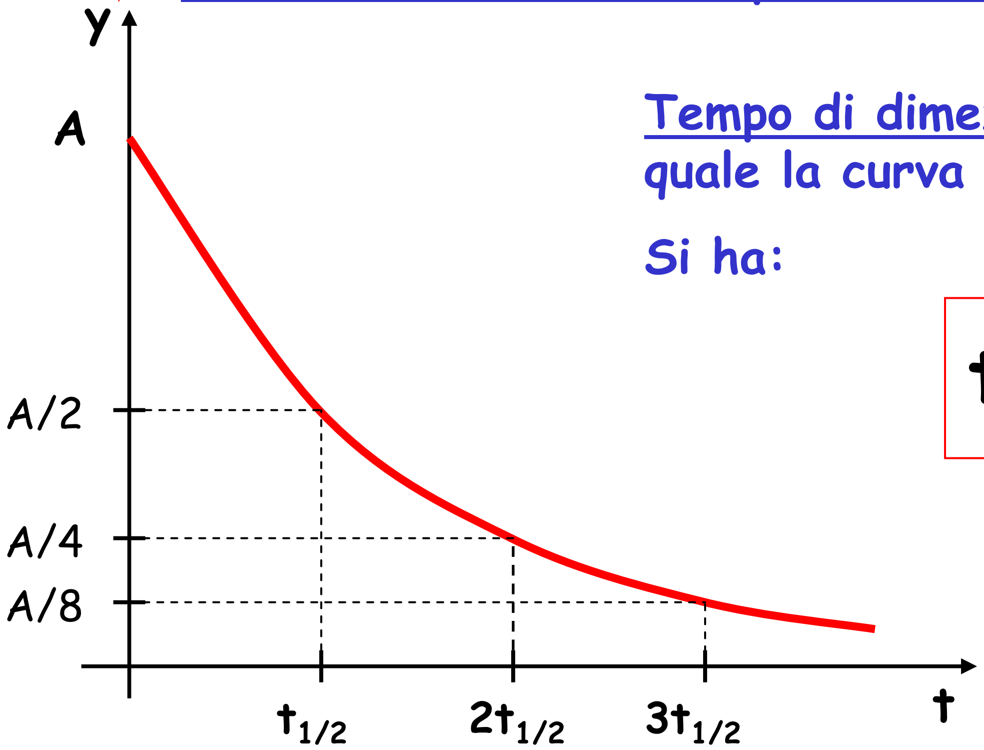
La funzione esponenziale decrescente

La funzione esponenziale $y=Ae^{-\alpha t}$ soddisfa la relazione $-\Delta y/\Delta t=\alpha \cdot y$

⇨ descrive l'andamento di una grandezza la cui <u>velocità di diminuzione</u> ($-\Delta y/\Delta t$) <u>è proporzionale alla grandezza stessa</u>.

Si ha inoltre $-\Delta y/y=\alpha \cdot \Delta t$

⇨ la funzione esponenziale decresce, in intervalli uguali Δt, <u>sempre della stessa frazione (o percentuale)</u> di y ($-\Delta y/y$), pari ad $\alpha \cdot \Delta t$



<u>Tempo di dimezzamento</u> ($t_{1/2}$): tempo dopo il quale la curva è diminuita della metà.

Si ha:

$$\boxed{t_{1/2} = 0,693\ \tau}$$

Esercizio:

L'attività A (numero di decadimenti/s) di una sorgente radioattiva segue una legge esponenziale decrescente

$$A(t)=A_o e^{-t/\tau}$$

dove τ è chiamato vita media del radionuclide.

Supponiamo che il tempo di dimezzamento del ^{11}C sia $t_{1/2}$=20min.

a) quale è la vita media del ^{11}C [R. $\tau = 28{,}9$ min]

Si ha $t_{1/2}$ =0,693 τ, da cui $\tau = t_{1/2}/0{,}693 = (20\text{ min})/0{,}693 = 28{,}9\text{ min}$

b) se un contatore Geiger misura ad un certo istante t=0 una attività A_o=1000 conteggi/s, quale sarà l'attività dopo 52 minuti?

[R. $A(t = 52\text{min}) = 165\text{ conteggi/s}$]

Usiamo la legge esponenziale con $A_o=10^3$ conteggi/s e τ = 28,9 min. Si ha $A(t=52\text{ min}) = (10^3\text{ conteggi/s})\cdot e^{-(52\text{min})/(28{,}9\text{ min})} = (10^3\text{ conteggi/s})\cdot e^{-1{,}8} = 165\text{ conteggi/s}$

Logaritmi

argomento

$$y = \log_a x$$

base

Rappresenta l'esponente (y) che bisogna dare alla base (a) per ottenere l'argomento (x):

$$a^{\log_a x} = x$$

- rappresenta la funzione inversa della funzione esponenziale:

$$x=a^y \Rightarrow y=\log_a x$$

- condizioni di validità $\begin{cases} a > 0; \\ -\infty < y < \infty; \\ x > 0 \end{cases}$

- esempi: $\log_2 32 = 5$; $\log_3 27 = 3$

- base 10 $\Rightarrow$ logaritmi decimali o comuni ($\log x \equiv \mathrm{Log}\ x \equiv \log_{10} x$)

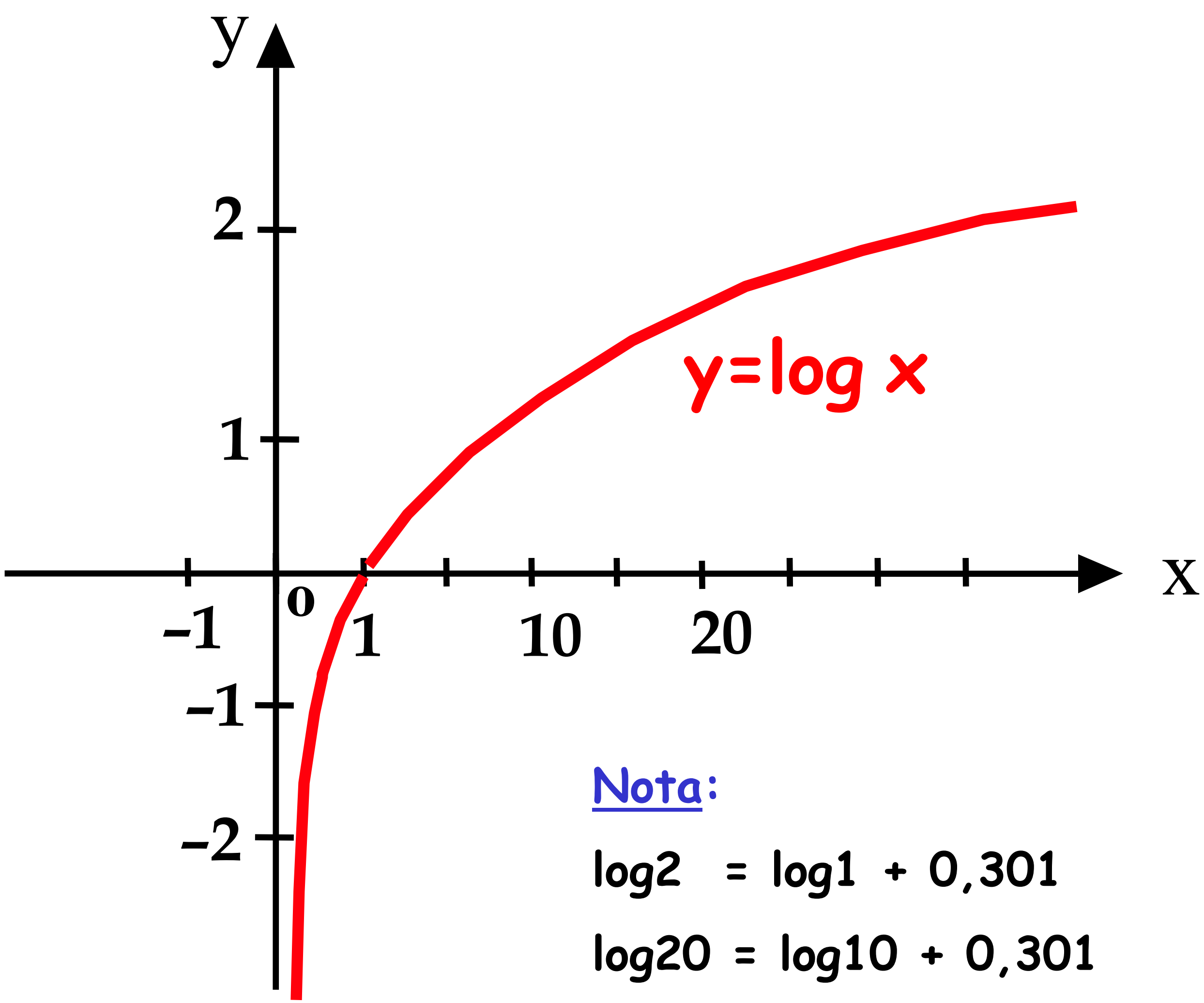
$\log 10=1$; $\log 100=2$; $\log 10^n = n$

- base e $\Rightarrow$ logaritmi naturali o neperiani ($\ln x \equiv \log_e x$)

$e=2,718281....$ (numero di Nepero)

funzione logaritmica

È una <u>funzione lentamente</u> variabile di x (per x>0)



Nota:

log2 = log1 + 0,301

log20 = log10 + 0,301

x	log x
0,1	-1,0
0,5	-0,301
1	0,0
2	0,301
3	0,477
4	0,602
5	0,699
6	0,778
7	0,845
8	0,903
9	0,954
10	1,0
20	1,301
100	2,0

legge di Weber-Fechner

La percezione degli organi sensoriali umani P è legata all'intensità di uno stimolo S dalla relazione

$$\Delta p = k \cdot \frac{\Delta S}{S}$$

- verificata per vari tipi di stimoli (uditivo, visivo, psicologico....)
- la funzione che soddisfa questa relazione è la <u>funzione logaritmica</u>:

$$p = k \cdot \log S$$

La percezione degli organi sensoriali è approssimativamente proporzionale al logaritmo dello stimolo

Proprietà dei logaritmi

$$\log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1$$

$$\log_a m \cdot n = \log_a m + \log_a n$$

proprietà del prodotto

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$$

proprietà del quoziente

$$\log_a m^n = n \cdot \log_a m \; ; \; \log_a \sqrt[n]{m} = \frac{1}{n} \cdot \log_a m$$

proprietà della potenza

$$\log_a c = \log_a b \cdot \log_b c$$

cambiamento di base

Esempio

ln a = ln10 · log a = 2,305·log a

log a = log e · ln a = 0,434·ln a

Esercizi

$\log_3 81$ (R. 4)

$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{8}$ (R. 3)

$\log_2 \frac{1}{16}$ (R. -4)

$\log 0{,}5$ (R. -0,301)

$\log 40$ (R. 1,602)

$\log 100 - \log 10$ (R. 1)

$\log_a b\sqrt[3]{c}$

$3\log_a b + 4\log_a c - \log_a m - 2\log_a n$

Esercizio

Il livello di intensità sonora IL è legato all'intensità I di un suono attraverso la relazione

$$IL = 10\log\frac{I}{I_o}$$

dove I_o rappresenta una intensità di riferimento.

Determinare di quanto varia il livello IL se l'intensità sonora I raddoppia.

[R. aumenta di +3]

Si ha infatti che se l'intensità I raddoppia (I → 2I), il livello corrispondente IL' diviene

$$IL' = 10\log(2I/I_0)$$

ed usando le proprietà dei logaritmi

$$IL' = 10\log(2I/I_0) = 10\log 2 + 10\log(I/I_0) = 10\log 2 + IL = IL + 3$$

Il livello è quindi aumentato di 3 unità. Vedremo nel seguito che al livello si attribuisce un'unità di misura (dB) per cui risulta che ad un raddoppio di intensità corrisponde un aumento di +3 dB.

Si osservi, come appare chiaro dall'esempio, che la funzione logaritmo trasforma i prodotti in somme, nel senso che moltiplicare l'argomento del logaritmo per un fattore costante (2 nel nostro esempio) equivale a sommare al logaritmo un numero costante (+3 dB).

Diagrammi semilogaritmici

Comodi per rappresentare graficamente funzioni che variano di <u>diversi ordini di grandezza</u>

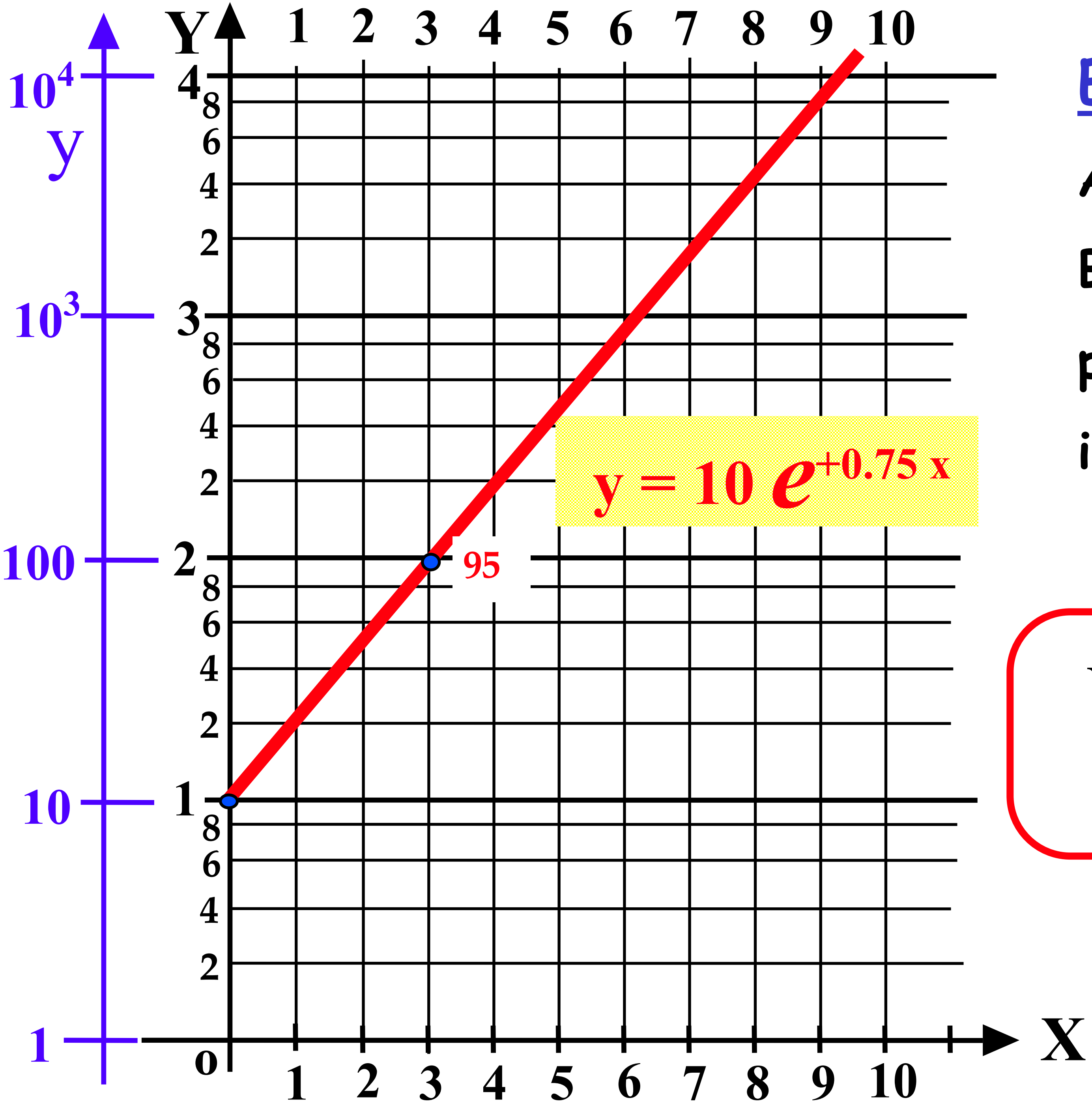
<u>carta semilogaritmica</u> : $\begin{cases} Y = \log y \\ X = x \end{cases}$

<u>Esempio</u>: rappresentazione grafica della funzione $y = Ae^{Bx}$

$$Y = \log y = \log(Ae^{Bx}) = \log A + (B \cdot \log e) \cdot x$$

funzione esponenziale $\longrightarrow$ **retta**

$$Y = aX + b \quad \begin{cases} a = B \cdot \log e & \text{(pendenza)} \\ b = \log A & \text{(intercetta)} \end{cases}$$



Esempio

A=10

B=0,75

pendenza: 0,33

intercetta: 1

$Y = \log y$

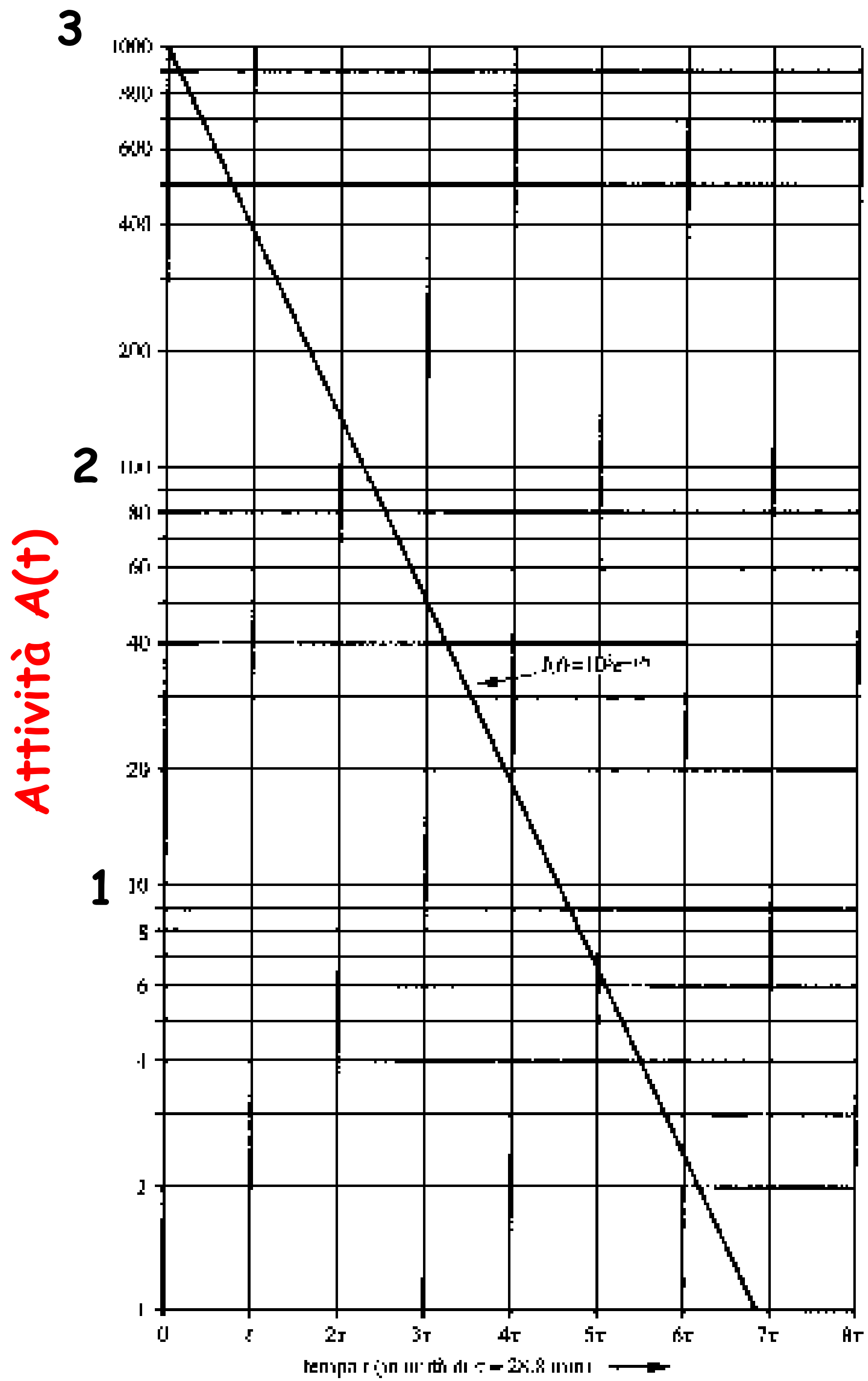
$X = x$

Esempio

$$A(t) = 10^3 e^{-t/\tau}$$

(τ =28,8 min, vedi esercizio)

pendenza = $-1/\tau \log e = -0{,}434/\tau$



Esercizio

Dimostrare che nella funzione

$$y(t)=Ae^{-t/\tau}$$

il legame tra tempo di dimezzamento $t_{1/2}$ e vita media τ è

$$t_{1/2} = \tau \cdot \ln 2 = 0{,}693\tau$$

All'istante iniziale (t=0) il valore che assume la funzione esponenziale è

$$y(t=0) = Ae^{-0/\tau} = A$$

Il tempo di dimezzamento $t_{1/2}$ è per definizione il tempo dopo il quale il valore che assume la funzione è esattamente la metà del valore iniziale, ovvero A/2. Potremo scrivere allora

$$y(t=t_{1/2}) = A/2$$

da cui, essendo $y(t=t_{1/2}) = Ae^{-t_{1/2}/\tau}$, si ha

$$Ae^{-t_{1/2}/\tau} = A/2$$

Semplificando entrambi i membri per A e applicando la definizione di logaritmo

$$-\tau_{1/2}/\tau = \log_e(1/2) = \ln(1/2) = -\ln 2$$

dove si è applicata la proprietà dei logaritmi log(1/a) = – log a. Infine

$$t_{1/2} = \tau \cdot \ln 2 = 0{,}693\,\tau$$