Introduzione alla Fisica

- **Ripasso di matematica**
- Grandezze fisiche
- Vettori

La fisica come scienza sperimentale

Studio di un fenomeno

OSSERVAZIONI SPERIMENTALI → MISURA DI **<u>GRANDEZZE FISICHE</u>**

IPOTESI

VERIFICA

LEGGI FISICHE → **Relazioni matematiche tra grandezze fisiche**

In fisica si usa un <u>linguaggio matematico</u> !!!

Algebra dei numeri relativi

Numeri relativi: numeri preceduti dal segno **+** o dal segno **–**

a = – 5,2 ← **modulo** o **valore assoluto** (si indica con |a|)

segno

Due numeri relativi sono

- **concordi** se hanno lo stesso segno es: (–3 ; –7,15 ; –6001);
- **discordi** se hanno segno contrario es: (+73,6 ; –12,2);
- **opposti** se hanno stesso modulo e segno contrario es: (–2,13 ; +2,13)
- **reciproci (inversi)** se hanno lo stesso segno e modulo inverso es: (–4/5 ; –5/4)

Chiamiamo **espressione algebrica** una espressione matematica che contiene numeri relativi

numerica: $\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)$ letterale: $3a^2b-5ab^2$

... dove le lettere rappresentano

In una espressione matematica

un generico numero

- intero (0; 1; 2; 3; ...)
- intero relativo (.. –2; -1; 0; 1; ...)
- reale (-1/2; 136,11111; $\sqrt{7}$; $e^{2,7}$...)

In una legge fisica

una grandezza fisica

valore numerico + unità di misura

- m (3,7 kg; 8 mg; 12 lb; ...)
- t (8,7 ms; 3 h; 2,7 giorni; ...)

Stessa algebra !!

Elementi di matematica utilizzati in questo corso

- Frazioni
- Proprietà delle potenze
- Potenze di dieci e notazione scientifica
- Manipolazione, semplificazione di espressioni algebriche
- Soluzione di equazioni di primo grado
- Proporzioni
- Conversioni tra unità di misura
- Percentuali
- Funzioni e loro rappresentazione grafica
- Angoli, elementi di trigonometria
- Elementi di geometria
- Logaritmi ed esponenziali

Somma algebrica

Nell'algebra dei numeri relativi, una espressione contenente addizioni e sottrazioni numeriche e letterali

$$3-2z+5-8y-4$$

viene sempre considerata come una **somma algebrica**, ovvero intesa come somma di numeri relativi:

$$+3+(-2z)+(+5)+(-8y)+(-4)$$

Nota: per lo scioglimento delle parentesi in una espressione

- si elimina la parentesi se preceduta dal segno **+**

$$+(4x-2y+3z)=4x-2y+3z$$

- si elimina la parentesi cambiando segno a tutti i fattori al suo interno se preceduta dal segno **-**

$$-(4x-2y+3z)=-4x+2y-3z$$

Le 4 operazioni

- **Addizione** (somma)

$$(-2)+(-6)=-8$$

$$(-13)+(+9)=-4$$

Addendi concordi: somma dei moduli
stesso segno

Addendi discordi: differenza dei moduli
segno dell'addendo di modulo maggiore

- **Sottrazione** (differenza)

Si ottiene sommando al primo numero (minuendo) **l'opposto** del secondo (sottraendo)

$$(-4)-(-9)=(-4)+(+9)=+5$$

- **Moltiplicazione** (prodotto)

$$(-4)(-3)(-7)=-84$$

Il **modulo** è il prodotto dei moduli

Il **segno** è positivo -> numero pari di segni –
negativo -> numero dispari di segni –

- **Divisione** (quoziente o rapporto)

Si ottiene moltiplicando il dividendo per **il reciproco** del divisore

$$(-21):(+7)=(-21)\left(+\frac{1}{7}\right)=-3$$

Esempi:

- $\left(\frac{1}{6}-1\right)\left(3-\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=$ $\qquad [R. = -2]$

- $\left(-\frac{7}{6}\right):\left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right):\left(1-\frac{3}{4}\right)=$ $\qquad [R. = -5]$

Elementi di matematica: Frazioni

Una frazione è un rapporto tra due numeri *a* e *b*

$$\frac{a}{b}$$ ← numeratore (a), ← denominatore (b)

Frazioni equivalenti

Dividendo o moltiplicando numeratore e denominatore per un fattore comune, la frazione non cambia.

$$\frac{a}{b} = \frac{x \cdot a}{x \cdot b}$$

Es: $\frac{3}{6}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{6}{12}$ sono frazioni equivalenti

Riduzione ai minimi termini

Esprimere una frazione in una forma equivalente con valori minimi del numeratore e denominatore (divisione per tutti i fattori comuni)

$$\frac{4}{10} = \frac{\cancel{2} \cdot 2}{\cancel{2} \cdot 5} = \frac{2}{5} \qquad \frac{378}{315} = \frac{\cancel{7} \cdot 2 \cdot \cancel{3^3}^{\,3}}{\cancel{7} \cdot 5 \cdot \cancel{3^2}} = \frac{2 \cdot 3}{5} = \frac{6}{5}$$

Frazioni

Moltiplicazione di due frazioni

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Es: $\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{5\cdot 3}{2\cdot 2}=\frac{15}{4}$ $\qquad$ $\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}=\frac{2\cdot\cancel{6}^{\,2}}{\cancel{3}\cdot 5}=\frac{2\cdot 2}{5}=\frac{4}{5}$

Somma/differenza di frazioni:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

Es: $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3+4}{6}=\frac{7}{6}$

$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{9+2}{12}=\frac{11}{12}$ (12 = minimo comune multiplo di 6 e 4)

$\frac{9}{10}-\frac{2}{5}=\frac{9-4}{10}=\frac{\cancel{5}^{\,1}}{\cancel{10}_{\,2}}=\frac{1}{2}$

Divisione di due frazioni:

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

Es: $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{4}{3}\right)}=\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}_{\,2}}=\frac{1}{2}$

Inverso di una frazione:

$$\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)}=\frac{b}{a}$$

Es: $\frac{1}{2/3}=\frac{3}{2}$

Frazioni

3/4 e’ maggiore di 5/6 ? Equivalentemente, 3/4-5/6 > 0 ?

Confronto tra frazioni

Per confrontare due frazioni e’ opportuno esprimerle in forma equivalente con denominatore comune

Il minimo comune denominatore tra 4 e 6 e’ 12

$$\frac{3}{4}=\frac{9}{12} \qquad \frac{5}{6}=\frac{10}{12} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{3}{4}<\frac{5}{6}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{5}{6}=\frac{9-10}{12}=\frac{-1}{12}=-\frac{1}{12}<0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{3}{4}<\frac{5}{6}$$

$$\left(\text{Nota}: \quad -\frac{3}{4}>-\frac{5}{6}\right)$$

Elevamento a Potenza

a = base, b = esponente

$$a^b = a \cdot a \cdot a \cdots \quad (b \text{ volte})$$

- una potenza di esponente pari e\`sempre positiva;
- una potenza di esponente dispari e\` negativa se la base e negativa.

Proprietà delle potenze:

- $a^n + a^m \rightarrow$ (nessuna particolare proprietà) — $a^3 + a^2 = (a \cdot a \cdot a) + (a \cdot a) = \ldots$ dipende!
- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ → $a^3 \cdot a^2 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$
- $(a^n)^m = a^{n*m}$ → $(a^3)^2 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \; a \cdot a \cdot a \cdot a = a^6$
- $a^n/a^m = a^{n-m}$ → $a^3/a^2 = (a \cdot a \cdot a)/(a \cdot a) = a = a^1$
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ → $a^2 \cdot b^2 = a \cdot a \cdot b \cdot b = a \cdot b \cdot a \cdot b = (a \cdot b)^2$

Ma attenzione:

$a^2/a^3 = (a \cdot a)/(a \cdot a \cdot a) = 1/a = a^{-1} = a^{2-3}$

$a^3/a^3 = (a \cdot a \cdot a)/(a \cdot a \cdot a) = 1 = a^0 = a^{3-3}$

Perchè la regola continua a valere, occorre definire

$a^{-n} = 1/a^n$ potenza a esponente negativo

$a^0 = 1$ potenza a esponente nullo

Esempi:

- $\left(-\frac{1}{2}\right)^3\left(-\frac{1}{2}\right)^4 =$ $\left[R. = -\frac{1}{128}\right]$
- $(-2)(+2)^2 =$ $[R. = -8]$
- $(+2)^3(-3)^3 =$ $[R. = -216]$
- $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \Big/ \left(-\frac{1}{2}\right)^8 =$ $[R. = 16]$
- $(-3)^5 \Big/ \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} =$ $[R. = 9]$
- $\left[\left(\frac{1}{2}-1\right)^2\right]^{-3} =$ $[R. = 64]$

Radice di un numero

a = radicando, n = indice

E` l'operazione inversa dell'elevamento a potenza:

$\sqrt[n]{a}$ è quel numero la cui potenza n-esima è uguale ad a:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdots\ (n \text{ volte}) = a$$

- la radice di indice **pari** di un numero **negativo** non esiste $\cancel{\sqrt{-4}}$
- la radice di indice **dispari** di un numero esiste ed è unica $\sqrt[3]{8}=2\,;\quad \sqrt[3]{-27}=-3$
- esistono sempre due radici di indice **pari** di un numero **positivo** $\sqrt{25}=\pm 5$

Nota: una potenza con esponente frazionario è uguale ad un radicale che ha per indice il denominatore della frazione

$\boxed{\sqrt[m]{a^n} = a^{n/m}}$ **Infatti** $a^{n/m}\cdot a^{n/m}\cdot a^{n/m}\cdots$ (m volte) $= a^{mn/m} = a^n$

Esempio: $\sqrt[2]{a^6} = a^{6/2} = \sqrt{(a*a*a)*(a*a*a)} = \sqrt{(a*a*a)^2} = a*a*a = a^3$

Esempi:

- $\sqrt[6]{2^{12}} =$ $\left[R. = 4\right]$

- $4^{\frac{3}{2}} \cdot 4^{-2} =$ $\left[R. = \pm\frac{1}{2}\right]$

- $(-4)^{\frac{3}{2}} \cdot (-4)^{-2} =$ $\left[R. = \text{assurdo}\right]$

- $\sqrt[3]{\dfrac{4 \cdot 10^{4} \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{10^{-4}}} =$ $\left[R. = 200\right]$

Proprietà dei radicali: si verificano facilmente utilizzando potenze con esponenti frazionari !

$$\sqrt[1]{a} = a \quad ; \quad \sqrt[n]{0} = 0 \quad ; \quad \sqrt[n]{1} = 1$$

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$ da cui si ha $$\sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} \cdots = \sqrt[n]{a \cdot b \cdot c \cdots}$$ (prodotto di radicali dello stesso indice)

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$$ (quoziente di radicali dello stesso indice)

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$$ (potenza di un radicale)

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$ (radice di un radicale)

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n \cdot b} & \text{se } a > 0 \\ -\sqrt[n]{a^n \cdot b} & \text{se } n \text{ è pari e } a < 0 \end{cases}$$

Monomi e Polinomi

Monomio: una qualunque espressione algebrica che si presenta sotto forma di prodotto di fattori numerici e letterali

Coefficiente $\quad -\dfrac{4}{3}\, ab^{3}$ Grado nella lettera b

Parte letterale

identici se hanno stesso coefficiente e stessa parte letterale

$$\frac{2}{3}a^2b \quad ; \quad \frac{4}{6}a^2b \quad ; \quad 0,\overline{6}a^2b \quad ; \quad \ldots$$

simili se hanno la stessa parte letterale e diverso coefficiente

$$-8a^2bc^4 \quad ; \quad \frac{5}{7}a^2bc^4 \quad ; \quad 5,2a^2bc^4 \quad ; \quad \cdots$$

Polinomio: è una somma algebrica di più monomi <u>non simili</u>

$$2a-3b \quad ; \quad mn+2n-4 \quad ; \quad 3ab-4a+2b-9$$

binomio **trinomio**

Le operazioni algebriche con **monomi** si eseguono seguendo le regole viste in precedenza, e ricordando che solo monomi simili possono essere sommati algebricamente

Esempi:

- $3a^2b+2ab^2-5a^2b-ab^2=$ $\qquad\left[R.=ab^2-2a^2b\right]$
- $\left(6ab^2\right)\cdot\left(-3a^2b\right)=$ $\qquad\left[R.=-18a^3b^3\right]$
- $\dfrac{8a^5b^2}{-2ab^3}=$ $\qquad\left[R.=-4\dfrac{a^4}{b}\right]$
- $\left(\dfrac{2a^3b}{3c}\right):\left(-\dfrac{2ab}{9a^2c^2}\right)=$ $\qquad\left[R.=-3a^4c\right]$
- $\left(3a^2bc^3\right)^2=$ $\qquad\left[R.=9a^4b^2c^6\right]$

Il **prodotto** di due **polinomi** si ottiene come somma algebrica dei prodotti di ciascun termine del primo polinomio per tutti i termini del secondo.

Esempi:

- $\left(-2a+ab^2\right)\left(-3a^2b\right)=$ $\qquad\left[R.\quad 6a^3b-3a^3b^3\right]$
- $\left(3x+2y\right)\left(4x-5y\right)=$ $\qquad\left[R.\quad 12x^2-7xy-10y^2\right]$

I calcoli possono essere semplificati utilizzandi i **prodotti notevoli**:

$$(a+b)(a-b)= a^2-b^2$$

$$(a\pm b)^2 = a^2\pm 2ab+b^2 \longrightarrow 1 \quad 2 \quad 1$$

$$(a\pm b)^3 = a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3 \longrightarrow 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

			1			
		1		1		
	1		2		1	
1		3		3		1

triangolo di Tartaglia

Il **quoziente** di un **polinomio** per un **monomio** è uguale alla somma algebrica dei quozienti di ciascun termine del polinomio per il monomio divisore.

Esempi:

- $\left(8a^2b-12ab^2\right):\left(4ab\right)=$ $\left[R. \quad 2a-3b\right]$

- $\left(\frac{1}{4}a^3b^2-\frac{9}{4}a^2b^3\right):\left(-\frac{1}{4}a^4b^5\right)=$ $\left[R. \quad 9a^{-2}b^{-2}-a^{-1}b^{-3}\right]$

Il **quoziente** di due **polinomi** non è in generale risolubile.

Tuttavia, è spesso possibile **semplificare** una frazione algebrica raccogliendo ed eliminando i fattori moltiplicativi comuni **a tutti** i termini del numeratore e del denominatore (scomposizione in fattori)

Esempi:

- $$\frac{2a^2-2a}{4ab-4b}= \qquad \left[R.\quad \frac{a}{2b}\right]$$
- $$\frac{9x^2-1}{12x^2-4x}= \qquad \left[R.\quad \frac{3x+1}{4x}\right]$$
- $$\frac{378}{315}= \qquad \left[R.\quad \frac{6}{5}\right]$$
- $$\frac{6x+11y+6}{3x+5y+3}= \qquad \left[R.\quad \frac{6x+11y+6}{3x+5y+3}\ \text{oppure}\ \ 2\ \text{con resto} + \text{y}\right]$$

Le **frazioni di frazioni** si risolvono facilmente ricordando le proprietà viste finora

Esempi:

- $$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{8}{1} = \frac{8}{5}$$

- $$\frac{\frac{3}{7}}{9} = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{21}$$

Potenze di dieci

$10^0 = 1$
$10^1 = 10$
$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$
$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$
…….
$10^6 = 1000000$
…….

$10^{-1} = 1/10^1 = 0,1$
$10^{-2} = 1/10^2 = 0,01$
$10^{-3} = 1/10^3 = 0,001$
…….
$10^{-6} = 0,000001$
…….

10^5

(si legge "**dieci alla quinta**")
è uguale a 1 moltiplicato per 10^5
1*100000 = 100000

è uguale a 1.0 spostando la virgola a destra di 5 posti

10^{-5}

(si legge "**dieci alla meno 5**")
è uguale a 1 diviso per 10^5
1/100000 = 0.00001

è uguale a 1.0 spostando la virgola a sinistra di 5 posti

Potenze di dieci

Consideriamo un numero, ad es. 12,43
Questo numero lo posso scrivere in varie forme equivalenti:

$$12{,}43=\left(\frac{12{,}43}{10}\right)\cdot 10=1{,}243\cdot 10=1{,}243\cdot 10^{1} \longleftarrow$$

Posso spostare la virgola di una posizione verso sinistra moltiplicando il numero risultante per 10^1

$$12{,}43=\left(\frac{12{,}43}{100}\right)\cdot 100=0{,}1243\cdot 100=0{,}1243\cdot 10^{2} \longleftarrow$$

Virgola spostata di due posizioni verso sinistra numero risultante moltiplicato per 10^2

$$12{,}43=0{,}01243\cdot 10^{3}$$

Fattore moltiplicativo: 10^3

Virgola spostata di 3 posizioni a sinistra

$$12{,}43=\frac{(12{,}43\cdot 10)}{10}=\frac{124{,}3}{10}=124{,}3\cdot 10^{-1} \longleftarrow$$

Virgola spostata di una posizione verso destra numero risultante moltiplicato per 10^1

$$12{,}43=1243\cdot 10^{-2}$$

$$12{,}43=12430\cdot 10^{-3}$$

Fattore moltiplicativo: 10^{-3}

Virgola spostata di 3 posizioni a destra

E' possibile esprimere qualsiasi numero come il prodotto di un fattore per una potenza di dieci. Il fattore numerico è ottenuto spostando la virgola del numero iniziale di un numero di posizioni pari al valore assoluto dell'esponente, verso sinistra se l'esponente è positivo, verso destra se negativo.

Potenze di dieci e notazione scientifica

Notazione scientifica (forma esponenziale)

Si usa nei calcoli scientifici per esprimere numeri **molto grandi** e **molto piccoli**

$$5,213 \cdot 10^{-7}$$

parte numerica

numero compreso tra 1 e 9,999..

prodotto

si usano anche i simboli * e ×

potenza di 10

l'esponente rappresenta il numero di posti decimali di cui occorre spostare la virgola

Esempi:

$$l = 345000\ m = 3{,}45 \cdot 10^{5}\ m$$

$$l = 0{,}00038\ m = 3{,}8 \cdot 10^{-4}\ m$$

Potenze di dieci e notazione scientifica

Conversione di un numero da notazione ordinaria a notazione scientifica

Esempi:

$274 = 274{,}0 = 2{,}74 \cdot 100 = 2{,}74 \cdot 10^2$ $\qquad$ $0{,}35 = 3{,}5/10 = 3{,}5 \cdot 10^{-1}$

$4250000 = 4{,}25 \cdot 10^6$ (virgola spostata di 6 posizioni verso sinistra)

$0{,}001 = 1/1.000 = 1/10^3 = 1 \cdot 10^{-3}$ (virgola spostata di 3 posizioni verso destra)

$0{,}000043 = 4{,}3/100.000 = 4{,}3 \cdot 10^{-5}$ (virgola spostata di 5 posizioni verso destra)

In conclusione:

Per convertire un numero in notazione scientifica si sposta la virgola decimale fino ad ottenere un fattore numerico compreso tra 1 e 10 che moltiplica una potenza di dieci con esponente pari al numero di posizioni di cui si è spostata la virgola.
L'esponente è positivo se la virgola decimale è spostata verso sinistra (numero grande), negativo se è spostata verso destra (numero piccolo).

Potenze di dieci e notazione scientifica

Conversione di un numero da notazione scientifica a notazione ordinaria

Il prodotto di un numero per una potenza 10^n con esponente positivo
si ottiene dal numero iniziale spostandone la virgola di n posizioni verso destra

Esempi:

$3 \cdot 10 = 3{,}0 \cdot 10^1 = 30$

$1{,}5 \cdot 10^2 = 1{,}5 \cdot 100 = 150$

$1{,}5 \cdot 10^4 = 15000$

Il prodotto di un numero per un potenza 10^{-n} con esponente negativo, si ottiene invece spostando la virgola del numero iniziale di n posizioni verso sinistra.

Esempi:

$3 \cdot 10^{-1} = 3/10^1 = 3/10 = 0{,}3$

$1{,}5 \cdot 10^{-2} = 1{,}5/100 = 0{,}015$

$1{,}5 \cdot 10^{-4} = 0{,}00015$

Esempi: convertire da notazione numerica scientifica a notazione numerica ordinaria (o viceversa)

- $0,00321 =$ $\quad [R. \quad 3,21 \cdot 10^{-3}]$
- $972000 =$ $\quad [R. \quad 9,72 \cdot 10^{5}]$
- $8,26 \cdot 10^{4} =$ $\quad [R. \quad 82600]$
- $3,2 \cdot 10^{-7} =$ $\quad [R. \quad 0,00000032]$

Le proprietà delle potenze permettono di eseguire velocemente operazioni complicate, con risultati esatti

- $0,00002 \times 0,0003 =$ $\quad [R. \quad 6 \cdot 10^{-9}]$
- $\dfrac{0,02 \times 3000}{60 \times 0,4} =$ $\quad [R. \quad 2,5]$
- $\sqrt[4]{0,0016} =$ $\quad [R. \quad 0,2]$

o con risultati approssimati (cioè non lontani dal risultato vero).

- $7987 \times 70444 =$ $\quad [R. \quad \approx 5,6 \cdot 10^{8}]$

Equazioni

Equazione = relazione di uguaglianza tra due membri verificata per particolari valori di una variabile incognita

$$ax + b = 0 \quad \rightarrow \quad x = -b/a$$

Sommando (sottraendo)
una stessa quantità a entrambi i membri
Moltiplicando (dividendo)
per una stessa quantità entrambi i membri

→ **il risultato non cambia**

Es 1:

$$\frac{3}{4} + x = 7 \qquad \cancel{\frac{3}{4}} + x - \cancel{\frac{3}{4}} = 7 - \frac{3}{4} \qquad x = 7 - \frac{3}{4} \qquad x = \frac{28 - 3}{4} = \frac{25}{4}$$

Es 2:

$$\frac{3}{4} \cdot x = 7 \qquad \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot x \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} = 7 \cdot \frac{4}{3} \qquad x = 7 \cdot \frac{4}{3} \qquad x = \frac{7 \cdot 4}{3} = \frac{28}{3}$$

Equazioni di 1° grado

La variabile incognita compare elevata alla prima potenza: $x^1 = x$

Esempio:

$$\frac{a}{b}\cdot x + c = \frac{d}{e} + f$$

$$\frac{a}{b}\cdot x + c = \frac{d}{e} + f \quad -$$

$$\frac{a}{b}\cdot x + \cancel{c} - \cancel{c} = \frac{d}{e} + f - c$$

$$\frac{a}{b}\cdot x = \left(\frac{d}{e} + f - c\right)$$

$$a\cdot x = \left(\frac{d}{e} + f - c\right)\cdot b \longrightarrow x = \left(\frac{d}{e} + f - c\right)\cdot \frac{b}{a}$$

Esempi: risolvere le equazioni rispetto alle variabili evidenziate

- $3(2\mathbf{x}+5)=5+\mathbf{x}$ $\qquad\left[R. \quad x=-2\right]$

- $2a+b=\mathbf{x}-2(\mathbf{x}+b)$ $\qquad\left[R. \quad x=b-2a\right]$

- $\dfrac{1}{\mathbf{a}-c}=b$ $\qquad\left[R. \quad a=\dfrac{1}{b}+c\right]$

- $2(5-\mathbf{x})=\mathbf{x}-3(\mathbf{x}+2)$ $\qquad\left[R. \quad \text{impossibile}\right]$

- $2(-3-\mathbf{x})=\mathbf{x}-3(\mathbf{x}+2)$ $\qquad\left[R. \quad \text{sempre verificato}\right]$

Proporzioni

$a:b = c:d \rightarrow ad = bc$

Prodotto dei medi = prodotto degli estremi

Nulla di magico: sono solo normali equazioni!

$a/b = c/d \quad \rightarrow \quad a = bc/d \quad c = ad/b$
$\qquad\qquad\qquad\qquad b = ad/c \quad d = bc/a$

Es 1: **Conversione tra unità di misura (Lire ↔ euro):**

$$N\ lire : X\ euro = 1936{,}27\ lire : 1\ euro \quad \Rightarrow \quad X\ euro \cdot 1936{,}27\ lire = N\ lire \cdot 1\ euro$$

Es 2: **Se un corridore percorre a velocità costante 19,2 m in 2 s, quanto impiega a percorrere 100 m?**

$$100\ m : X\ s = 19{,}2\ m : 2\ s \quad \Rightarrow \quad X\ s \cdot 19{,}2\ m = 2\ s \cdot 100\ m \quad \Rightarrow \quad X = \frac{2\ s \cdot 100\ m}{19{,}2\ m} = 10{,}4\ s$$

Es 3: **Se un corridore percorre una distanza a velocità 5 m/s in 2 s. Quanto tempo impiega a percorrere la medesima distanza se la velocità 10 m/s ?**

Per usare una proporzione le due grandezze devono essere tra loro DIRETTAMENTE PROPORZIONALI

Esempio: risolvere usando le proporzioni

Mediante perfusione intravenosa vengono somministrate 50 gocce al min di soluzione fisiologica (20 gocce = 1mlitro). Dopo 30 min, quanti mlitri di soluzione sono stati somministrati ?

Soluzione:

Si impostano le seguenti proporzioni

a) 50 gocce : 1 min = x : 30 min   da cui x = 1500 gocce

b) 20 gocce : 1 ml = 1500 gocce : x   da cui x = 75 ml

$\left[R. \quad 75 \text{ ml}\right]$

Equazioni nella Fisica

Relazione di uguaglianza tra due membri

tutto ciò che è a 1° membro (numeri + unità di misura) deve essere uguale a *tutto ciò* che è a 2° membro

Es. Area di un rettangolo:

$A = ab = (50\ \text{cm}) * (1\ \text{m})$

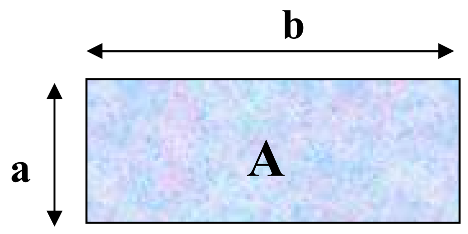
$= 50\ \text{cm} * \text{m}$ (da evitare!)

$= 50\ \text{cm} * 100\ \text{cm} = 5000\ \text{cm}^2$

$\cancel{= 5000\ \text{cm}}$ NO!

$= 0.5\ \text{m} * 1\ \text{m} = 0.5\ \text{m}^2$

$\cancel{= 0.5\ \text{m}}$ NO!



a = 50 cm, b = 1 m

Equivalenze tra unità di misura

Equivalenze tra unità di misura

Occorre conoscere il **fattore di conversione** tra le diverse unità di misura

Es. Velocità

km/h → m/s

1 km/h = 1000 m / 3600 s

= $\boxed{0{,}28}$ m/s

n km/h = n · 0,28 m/s

m/s → km/h

1m/s = 0,001 km / (1/3600) h

= $\boxed{3{,}6}$ km/h

n m/s = n · 3,6 km/h

Velocità di un atleta dei 100 m: 10 m/s = 10 · 3.6 km/h = 36 km/h

di un'automobile: 120 km/h = 120 · 0,28 m/s = 33,6 m/s

della luce: 300000 km/s = $3 \cdot 10^8$ m/s

$= 3 \cdot 10^8 \cdot 3{,}6$ km/h $= 1{,}08 \cdot 10^9$ km/h

Ovviamente il fattore di conversione inverso è l'inverso del fattore di conversione! Es. 0,28 = 1 / 3,6

Multipli e Sottomultipli

Multipli e sottomultipli di una unità di misura possono essere espressi usando prefissi:

Prefisso	*Simbolo*	*Fattore di moltiplicazione*
peta	**P**	10^{15}
tera	**T**	10^{12}
giga	**G**	10^{9}
mega	**M**	10^{6}
kilo	**k**	10^{3}
etto	**h**	10^{2}
deca	**da**	10^{1}

Prefisso	*Simbolo*	*Fattore di moltiplicazione*
deci	**d**	10^{-1}
centi	**c**	10^{-2}
milli	**m**	10^{-3}
micro	**μ**	10^{-6}
nano	**n**	10^{-9}
pico	**p**	10^{-12}
femto	**f**	10^{-15}

Es:

$1\ km = 10^{3}\ m$ $\quad$ $1\ dm = 10^{-1}\ m$ $\quad$ $1\ \mu m = 10^{-6}\ m$

$1\ Mm = 10^{6}\ m$ $\quad$ $1\ cm = 10^{-2}\ m$ $\quad$ $1\ nm = 10^{-9}\ m$

$1\ Gm = 10^{9}\ m$ $\quad$ $1\ mm = 10^{-3}\ m$ $\quad$ $1\ pm = 10^{-12} m$

$(1\ mm = 1/1000\ m = 1/10^{3}\ m = 10^{-3}\ m)$

Esempi: convertire le seguenti grandezze nelle unità di misura indicate

- 12 in/min in cm/s

$$12\,\frac{\text{in}}{\text{min}} = 12\,\frac{2{,}54\ \text{cm}}{60\ s} = 0{,}51\,\frac{\text{cm}}{s}$$

- 6,7 litri in m^3 (ricordare che 1litro = 1 dm^3)

$$6{,}7\ \text{l} = 6{,}7\ \text{dm}^3 = 6{,}7\cdot(10^{-1}\,\text{m})^3 = 6{,}7\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3$$

- 33 kg/m^3 in mg/cm^3

$$33\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 33\,\frac{10^3\,\text{g}}{\left(10^2\,\text{cm}\right)^3} = 33\,\frac{10^3\cdot(10^3\,\text{mg})}{10^6\,\text{cm}^3} = 33\,\frac{\text{mg}}{\text{cm}^3}$$

- 1h 7' 30'' in min

$$1\text{h}\ 7'\ 30'' = 60\ \text{min} + 7\ \text{min} + 30/60\ \text{min} = 67{,}5\ \text{min}$$

Percentuale

$1\ \% = 1/100 = 10^{-2} = 0.01$

$n\ \% = n/100 = 10^{-2} \cdot n = 0.01 \cdot n$

La percentuale e' sempre relativa alla grandezza a cui si riferisce !

- 3% di $150 = 3/100 \cdot 150 = 0{,}03 \cdot 150 = 4{,}5$
- 20% di $10000 = 0{,}20 \cdot 10000 = 2000$
- 20% di $0{,}003 = 0{,}20 \cdot 0{,}003 = 2 \cdot 10^{-1} \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 6 \cdot 10^{-4} = 0{,}0006$
- 200% di $1000 = 2 \cdot 1000 = 2000$ (raddoppiare $\Rightarrow$ prendere il 200 %)

"Per mille": 1 ‰ = 1/1000 = 0.001 = 0.1%

"Parte per milione": 1 ppm = 1/1000000 = 0.000001 = 0.0001% = 0.001 ‰

La percentuale può anche essere applicata a grandezze fisiche

Esempio: 20% di 1000 grammi = (0.20 · 1000) grammi = 200 grammi

La percentuale è un metodo "comodo" per esprimere **variazioni** (aumenti o diminuzioni) rispetto a una grandezza nota

- <u>Aumentare</u> una quantità Q del 5%:

$$Q \Rightarrow Q + 5\%Q = Q + 0{,}05 \cdot Q = Q \cdot (1 + 0{,}05) = 1{,}05 \cdot Q$$

- <u>Diminuire</u> una quantità Q del 5%:

$$Q \Rightarrow Q - 5\%Q = Q - 0{,}05 \cdot Q = Q \cdot (1 - 0{,}05) = 0{,}95 \cdot Q$$

- Aumentare del 100% $\Rightarrow$ raddoppiare

  Diminuire del 50% $\Rightarrow$ dimezzare

Le percentuali sono utilizzate comunemente per esprimere le concentrazioni:

- Soluzione di una sostanza in acqua al 5% =

  in volume: ad es. in 1 litro di soluzione, 950 cm^3 d'acqua e 50 cm^3 di soluto

  in peso: ad es. in 1 kg di soluzione, 950 g d'acqua e 50 g di soluto

Attenzione !!

- **Aumentare e successivamente diminuire una grandezza della medesima percentuale NON riporta al valore di partenza.**

Es. Aumentare e successivamente diminuire del 20% una grandezza Q

$$Q \Rightarrow 1{,}2 \cdot Q \Rightarrow 1{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot Q = 0{,}96 \cdot Q$$

- **Se due grandezze sono direttamente proporzionali, un aumento o diminuzione percentuale della prima equivale al medesimo aumento o diminuzione percentuale della seconda.**

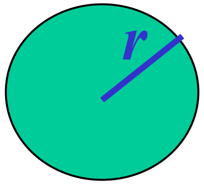
Es. Se aumenta il prezzo in euro del 20%, anche il prezzo in lire aumenta del 20%

- **Se due grandezze sono inversamente proporzionali, un aumento o diminuzione percentuale della prima NON equivale alla diminuzione o aumento della seconda della medesima percentuale.**

Es. Se la velocità di un’auto **raddoppia (+100%)** il tempo impiegato a percorrere una distanza **dimezza (-50%)**

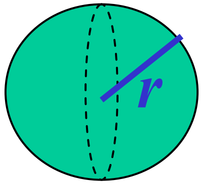
Superfici e volumi

Il perimetro di una figura si misura sempre in m, cm, …
L'area della superficie di un corpo si misura sempre in m^2, cm^2,…
Il volume (o capacità) di un corpo si misura sempre in m^3, cm^3,…



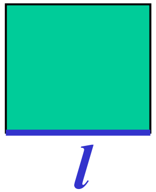
cerchio

$c=2\pi r \qquad A=\pi r^2$



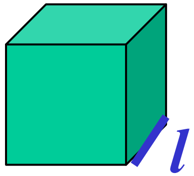
sfera

$S=4\pi r^2 \qquad V=(4/3)\pi r^3$



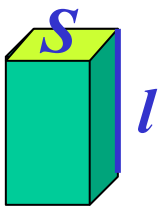
quadrato

$P=4l \qquad A=l^2$



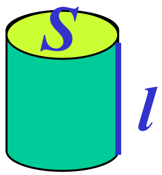
cubo

$S=6l^2 \qquad V=l^3$



parallelepipedo

$V = S\cdot l$



cilindro

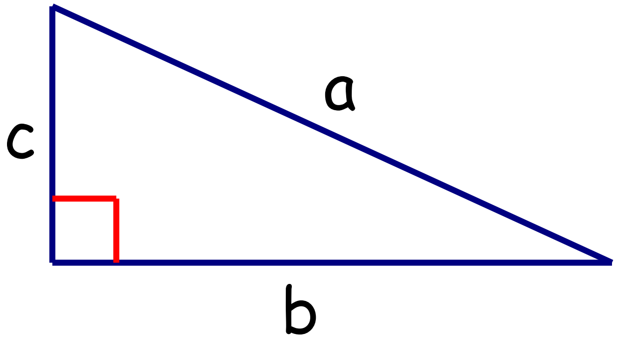
$V = S\cdot l = \pi r^2\cdot l$

$1\ m^2 = (1\ m)^2 = (10^2\ cm)^2 = 10^4\ cm^2 = 10000\ cm^2$
$1\ m^3 = (1\ m)^3 = (10^2\ cm)^3 = 10^6\ cm^3 = 1000000\ cm^3$

$1\ cm^2 = (1\ cm)^2 = (10^{-2}\ m)^2 = 10^{-4}\ m^2 = 0.0001\ m^2$
$1\ cm^3 = (1\ cm)^3 = (10^{-2}\ m)^3 = 10^{-6}\ m^3 = 0.000001\ m^3$

$\underline{1\ \text{litro} = 1\ dm^3} = (1\ dm)^3 = (10^{-1}\ m)^3 = 10^{-3}\ m^3$
$= (10^1\ cm)^3 = 10^3\ cm^3 \Rightarrow \underline{1\ ml = 1\ cm^3}$

Triangolo rettangolo

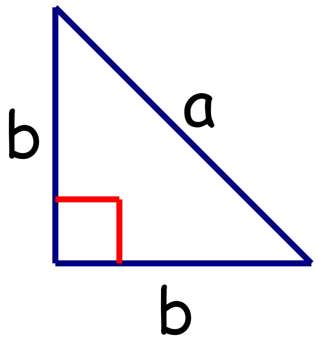


Teorema di Pitagora

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Esempio: $b = \sqrt{a^2 - c^2}$

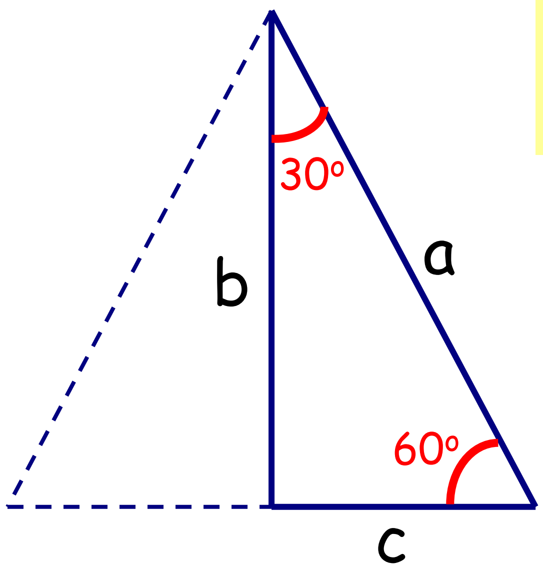
Casi particolari



$$a^2 = 2 \cdot b^2$$

$$a = \sqrt{2} \cdot b$$

$$b = \frac{a}{\sqrt{2}}$$



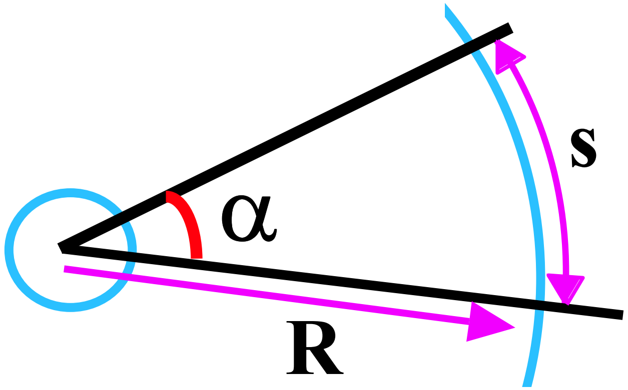
$$c = \frac{1}{2} a$$

$$b^2 = a^2 - c^2 =$$

$$= a^2 - \left(\frac{1}{2} a\right)^2 = \frac{3}{4} a^2$$

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

Angolo piano α



Unità di misura

- gradi, minuti, secondi

  $1° = 60'$ $\qquad 1' = 60''$

  es: $32°\ 27'\ 38''$

- $\alpha\ (\text{rad}) = \dfrac{\text{lunghezza arco s}}{R}$

angolo giro $\longrightarrow$ **$360° \equiv 2\pi$ rad**
angolo piatto $\longrightarrow$ **$180° \equiv \pi$ rad**
angolo retto $\longrightarrow$ **$90° \equiv \pi/2$ rad**

Per convertire tra gradi e radianti si può utilizzare la **semplice proporzione**

$$x \text{ rad} : y \text{ gradi} = \pi : 180°$$

Sulla calcolatrice: RAD
DEG
~~GRAD~~

Esempio: convertire 60° in radianti

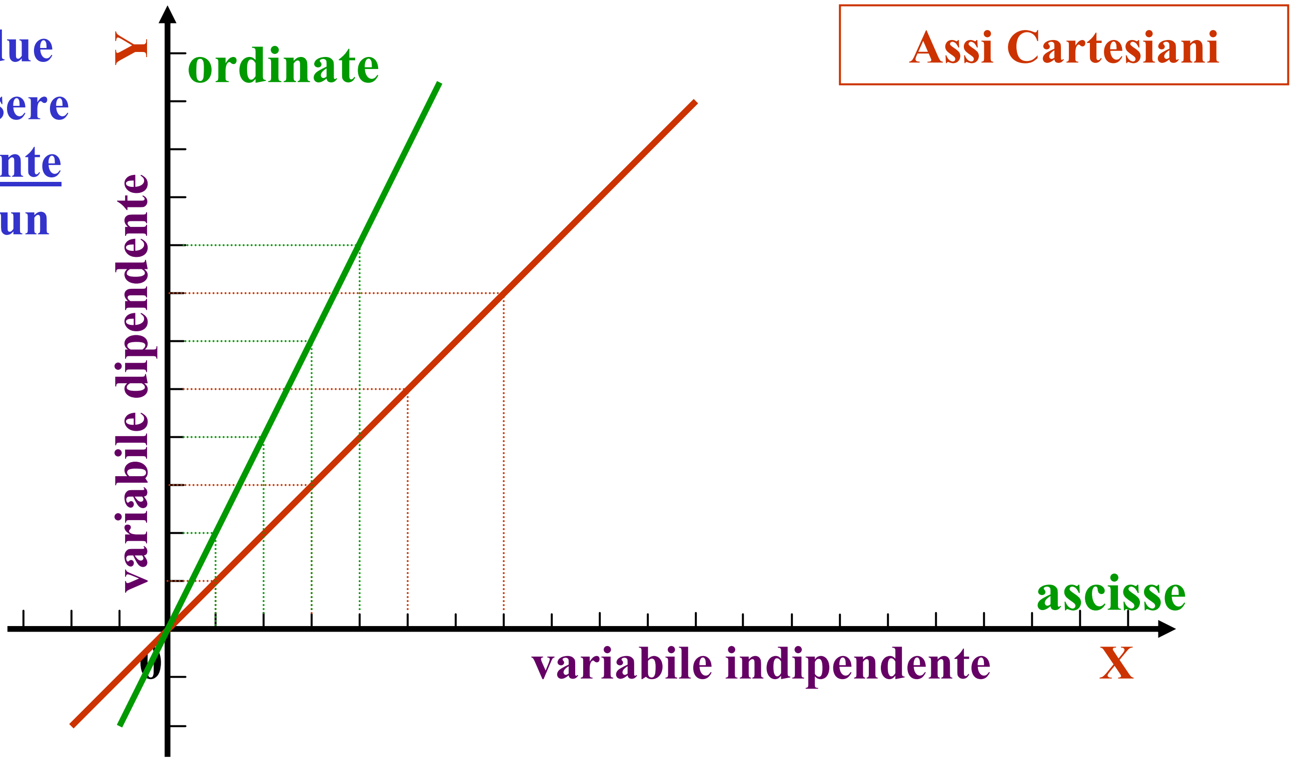
Funzioni e loro rappresentazione grafica

Funzione = relazione univoca tra due grandezze variabili

variabile dipendente → $y=f(x)$ ← variabile indipendente

Definire la funzione $y=f(x)$ significa stabilire come varia la variabile dipendente y al variare della variabile indipendente x.

La funzione che lega le due grandezze X ed Y può essere rappresentata graficamente attraverso una curva in un piano cartesiano



Esempi:

$y=x$

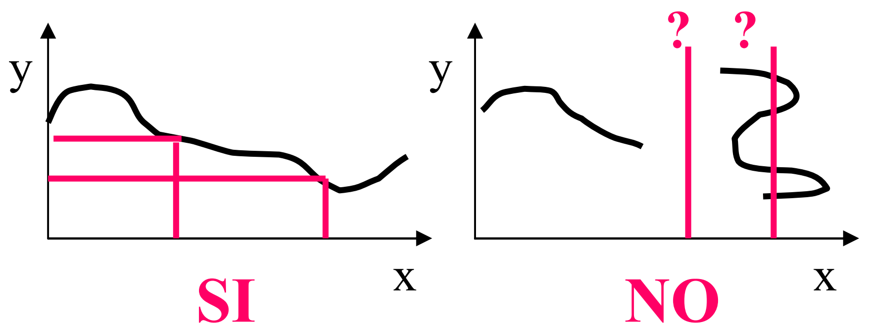
$y=2x$

Attenzione:

Una relazione di dipendenza e' una funzione se per ogni valore della variabile indipendente x esiste uno e un solo valore della variabile dipendente y

Esempio:

persona → data di nascita	SI
←	NO
persona → targa auto	NO
←	SI
$x = n \rightarrow y = n^2$	SI
$x = n \rightarrow y = \sqrt{n}$	NO



Una funzione e' invertibile se a ogni valore della variabile dipendente y corrisponde uno e un solo valore della variabile indipendente x.

Relazioni tra grandezze fisiche: proporzionalità lineare diretta

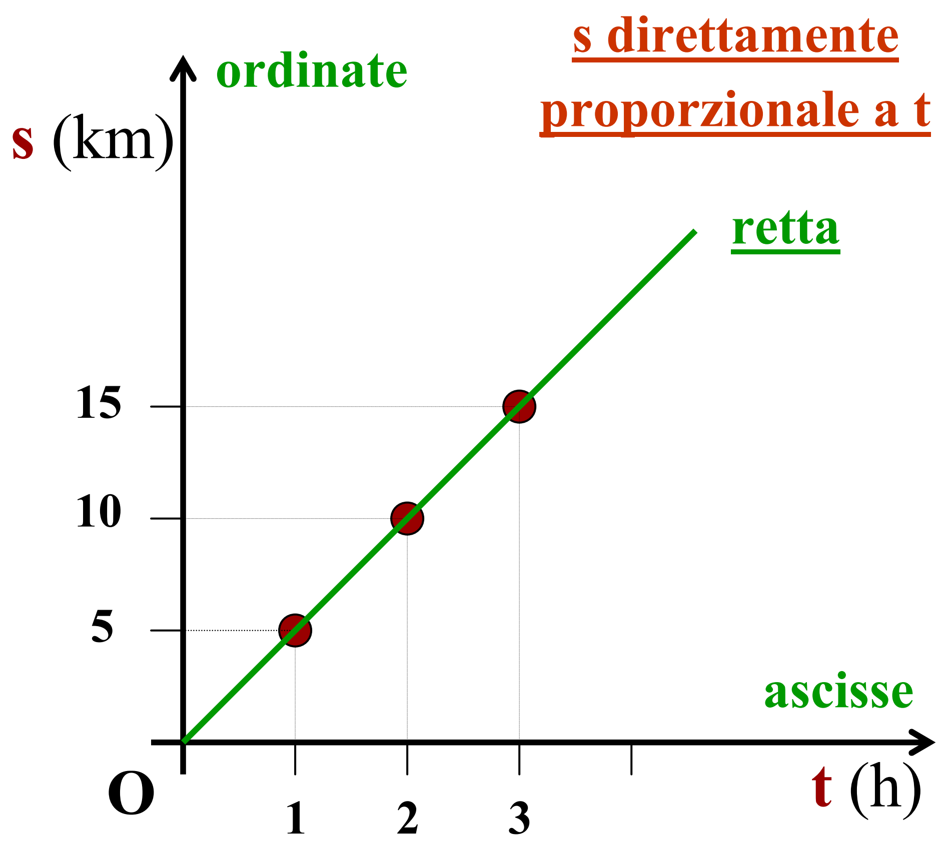
La relazione tra due grandezze fisiche può essere rappresentata in modo grafico nel piano cartesiano (x,y):

Proporzionalità diretta

Es.: $\boxed{s = v \cdot t}$ $[L] = \left[\frac{L}{\cancel{t}}\right] \cdot [\cancel{t}]$

t	s
1 h	5 km
2 h	10 km
3 h	15 km

$$v = 5\,\frac{km}{h}$$



Proporzionalità inversa

Proporzionalità inversa

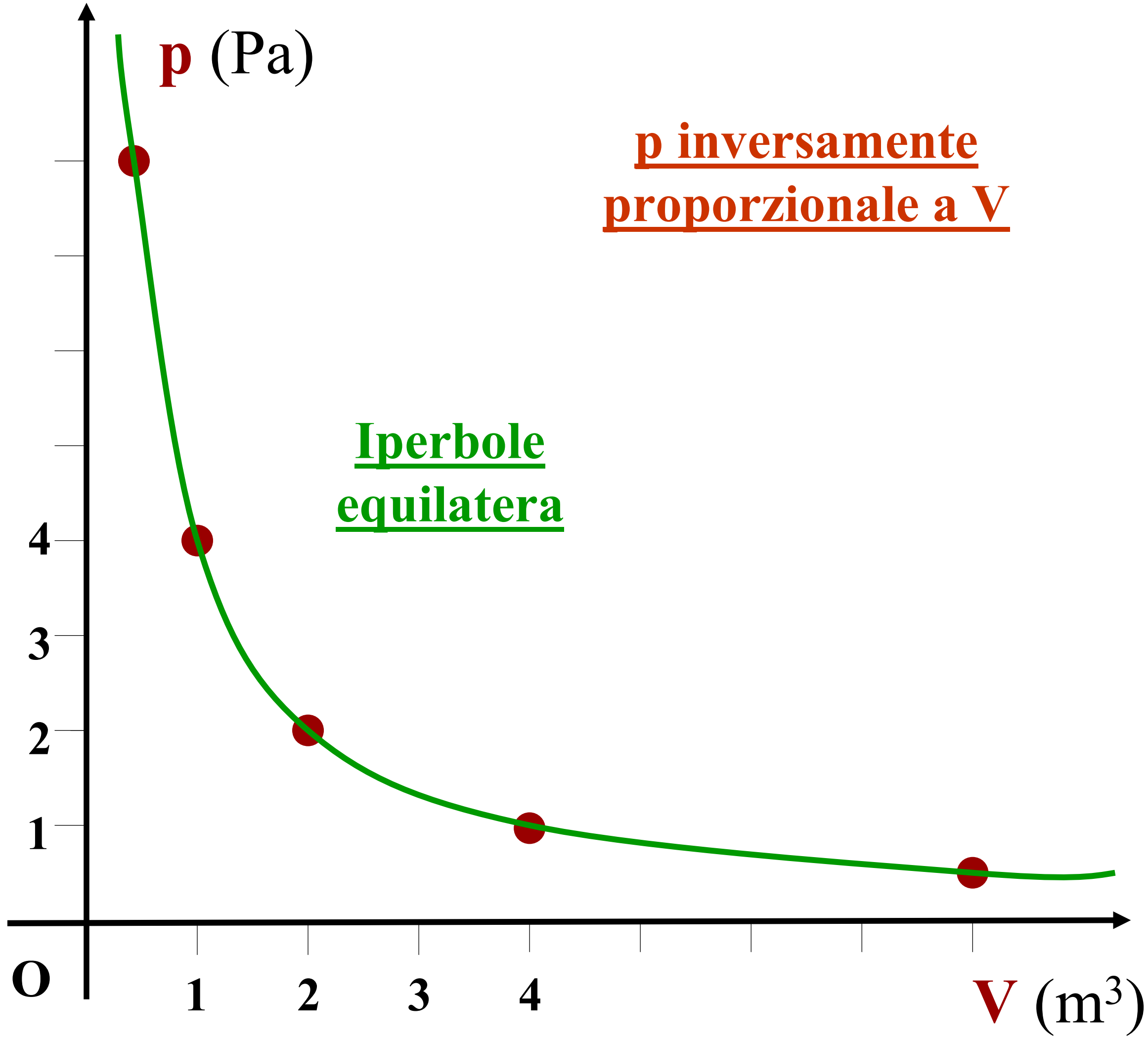
Es.: $\boxed{pV = nRT}$

con **nRT = costante**

$\Longrightarrow \quad p = \dfrac{cost}{V}$

V	p
1 m^3	4 Pa
2 m^3	2 Pa
3 m^3	4/3 Pa

cost = 4



Proporzionalità quadratica diretta

Proporzionalità quadratica

Es.:

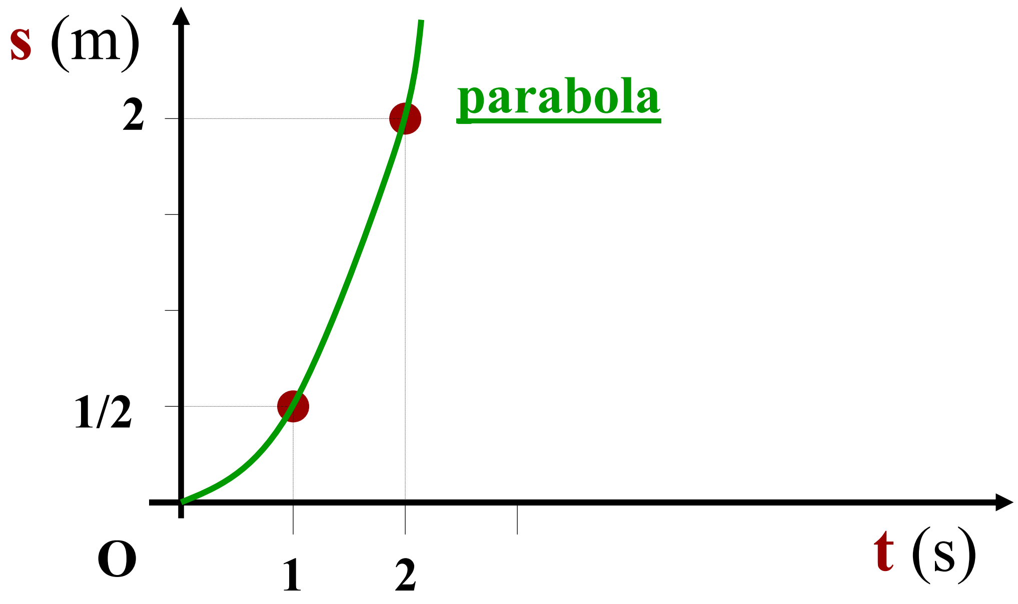
$$s = \frac{1}{2}at^2$$

$$[\mathbf{L}] = \left[\frac{\mathbf{L}}{\cancel{\mathbf{t}^2}}\right]\left[\cancel{\mathbf{t}^2}\right]$$

t	s
1 s	0.5 m
2 s	2 m

$a = 1\ m/s^2$

s quadraticamente proporzionale a t



Esempi di funzioni in Fisica

1° grado

y raddoppia — *al raddoppiare di x* — *y si dimezza*

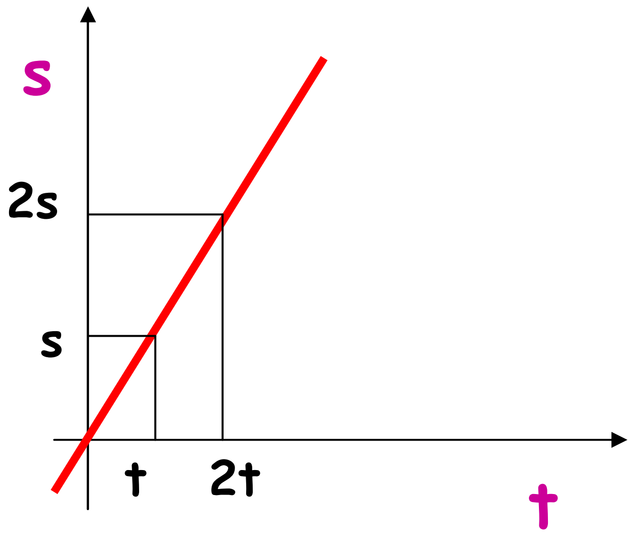
⇒ proporz.diretta

$s = v \cdot t$

$\lambda = c \cdot T$

$F = m \cdot a$

$\Delta V = R \cdot I$

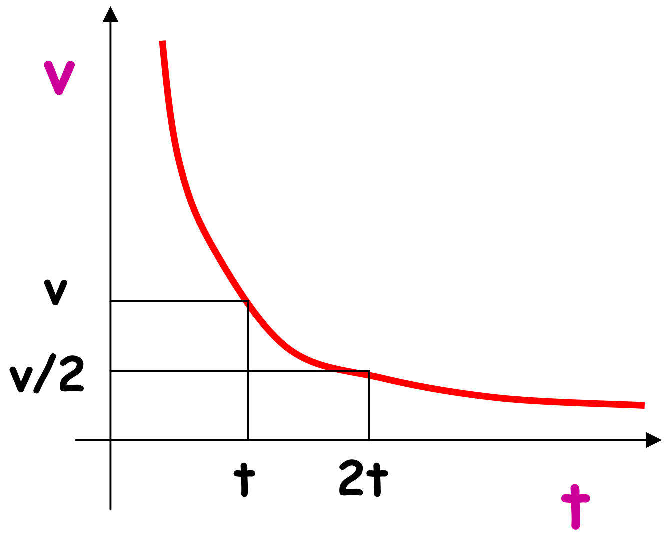


Retta

⇒ proporz.inversa

$v = s/t$

$\lambda = c/f$



Iperbole

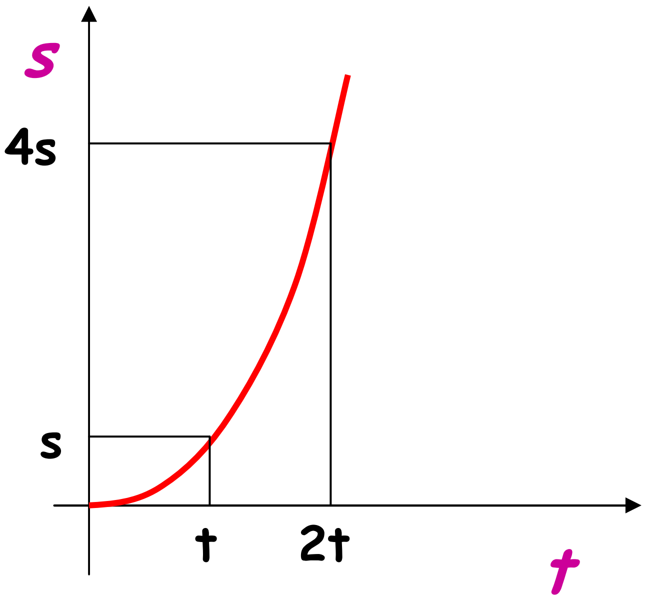
Esempi di funzioni in Fisica

y quadruplica **al raddoppiare di x** **y si riduce a ¼**

⇒ proporz.dir. quadr.

$s = \frac{1}{2} a t^2$

$E_k = \frac{1}{2} m v^2$

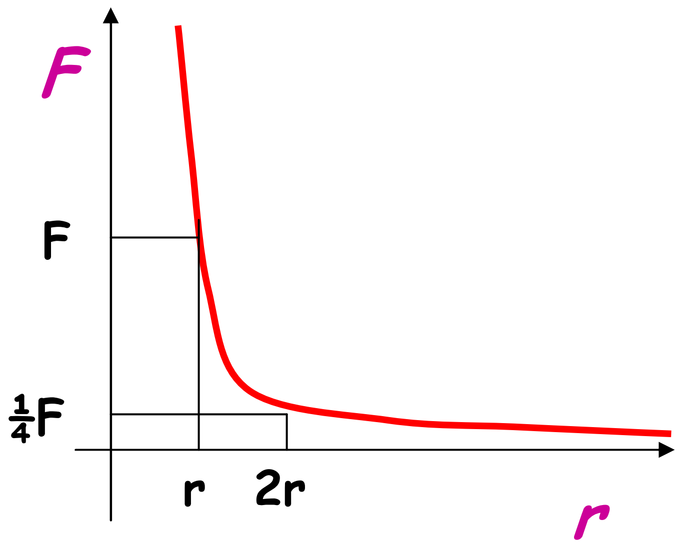


Parabola

⇒ proporz.inv. quadr.

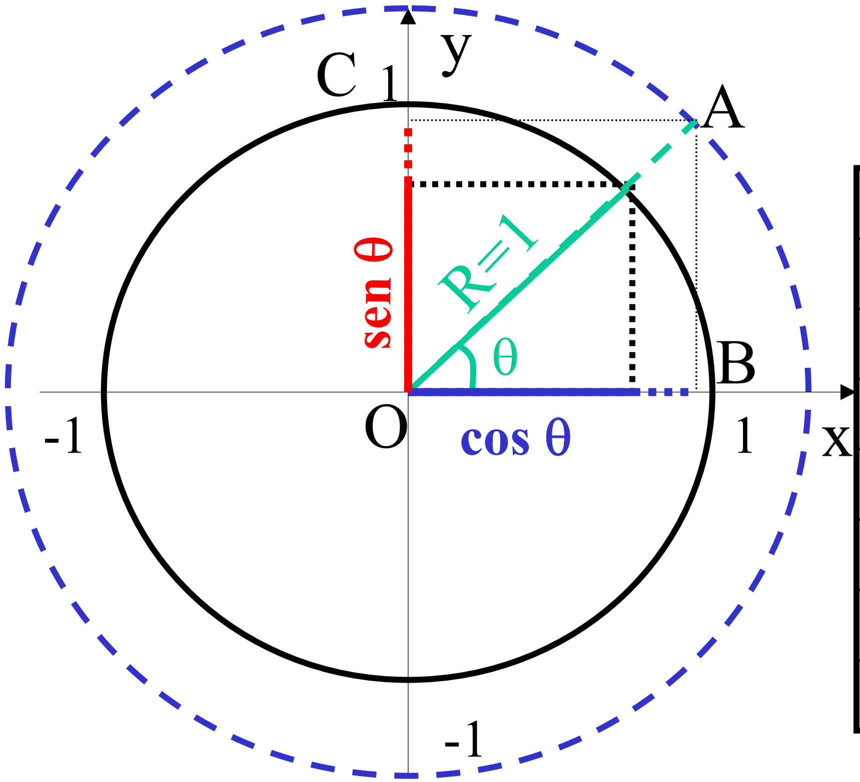
$F_g = G \cdot m_1 m_2 / r^2$

$F_e = K \cdot q_1 q_2 / r^2$



Proporz.inv.quadr

Trigonometria di base



$$\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \text{tg}\,\theta$$

θ	cos θ	sen θ	tg θ
0^o	1	0	0
$30^o = \pi/6$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}/3$
$45^o = \pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$60^o = \pi/3$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
$90^o = \pi/2$	0	1	∞
$180^o = \pi$	-1	0	0
$270^o = 3\pi/2$	0	-1	∞

Per definizione: $-1 \leq \text{sen}\,\theta, \cos\theta \leq 1$

dal teorema di Pitagora: $\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$

Le funzioni trigonometriche sono funzioni del solo angolo θ: se scegliamo R≠1

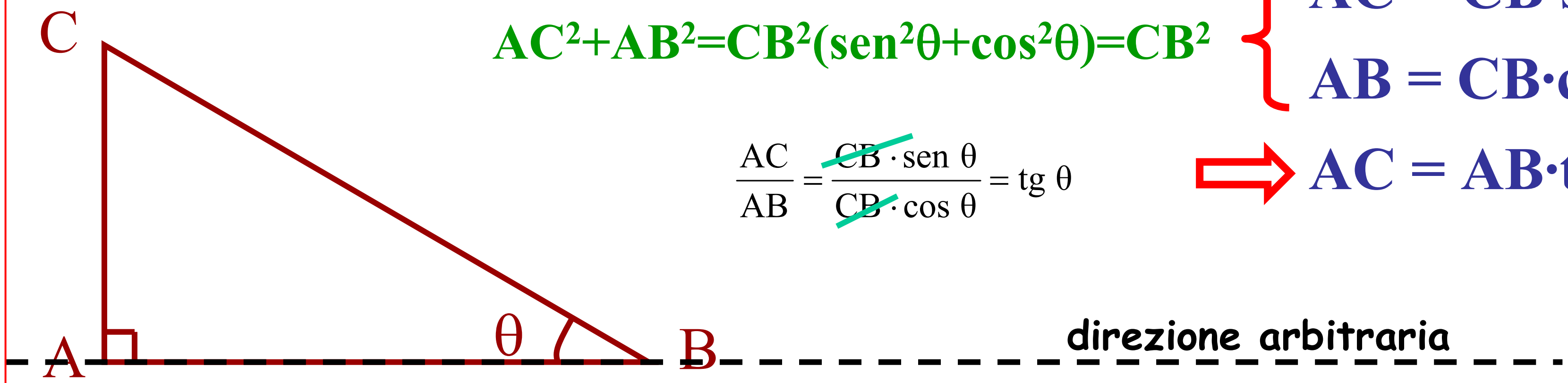
$$\cos\theta = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \qquad \sin\theta = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} \qquad \tan\theta = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}$$

Trigonometria di base: il triangolo rettangolo

Le principali applicazioni della trigonometria sono:

- descrizione dei fenomeni di tipo periodico (es. oscillazioni ed onde)
- proiezioni parallele e perpendicolari rispetto ad una direzione scelta

… riprendiamo il notro triangolo rettangolo: si ha



$$AC^2+AB^2=CB^2(sen^2\theta+cos^2\theta)=CB^2$$

$$\begin{cases} AC = CB\cdot sen\ \theta \\ AB = CB\cdot cos\ \theta \end{cases}$$

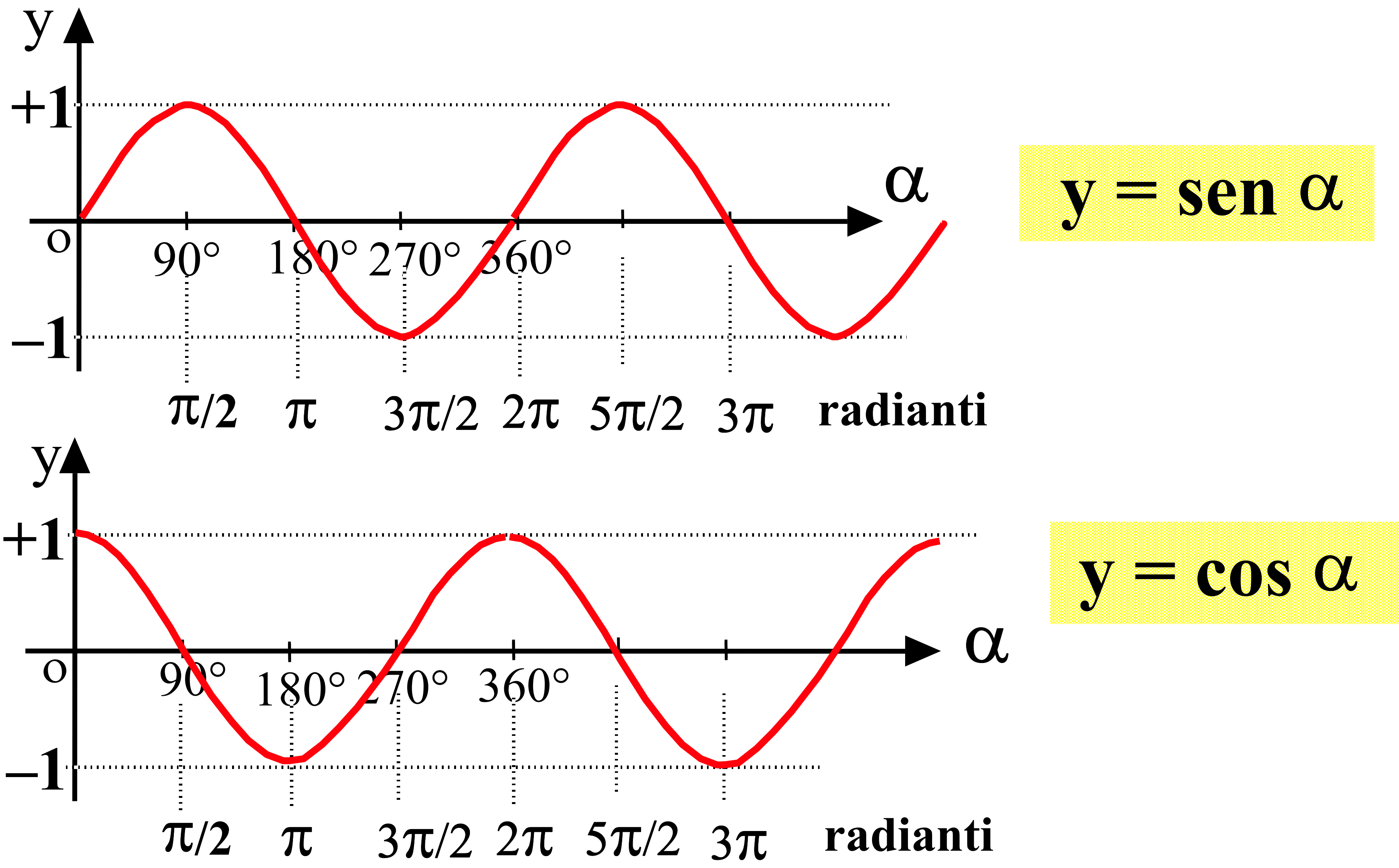
$$\frac{AC}{AB}=\frac{\cancel{CB}\cdot sen\ \theta}{\cancel{CB}\cdot cos\ \theta}=tg\ \theta \quad\Rightarrow\quad AC = AB\cdot tg\ \theta$$

AB è la proiezione di CB nella direzione parallela ad AB

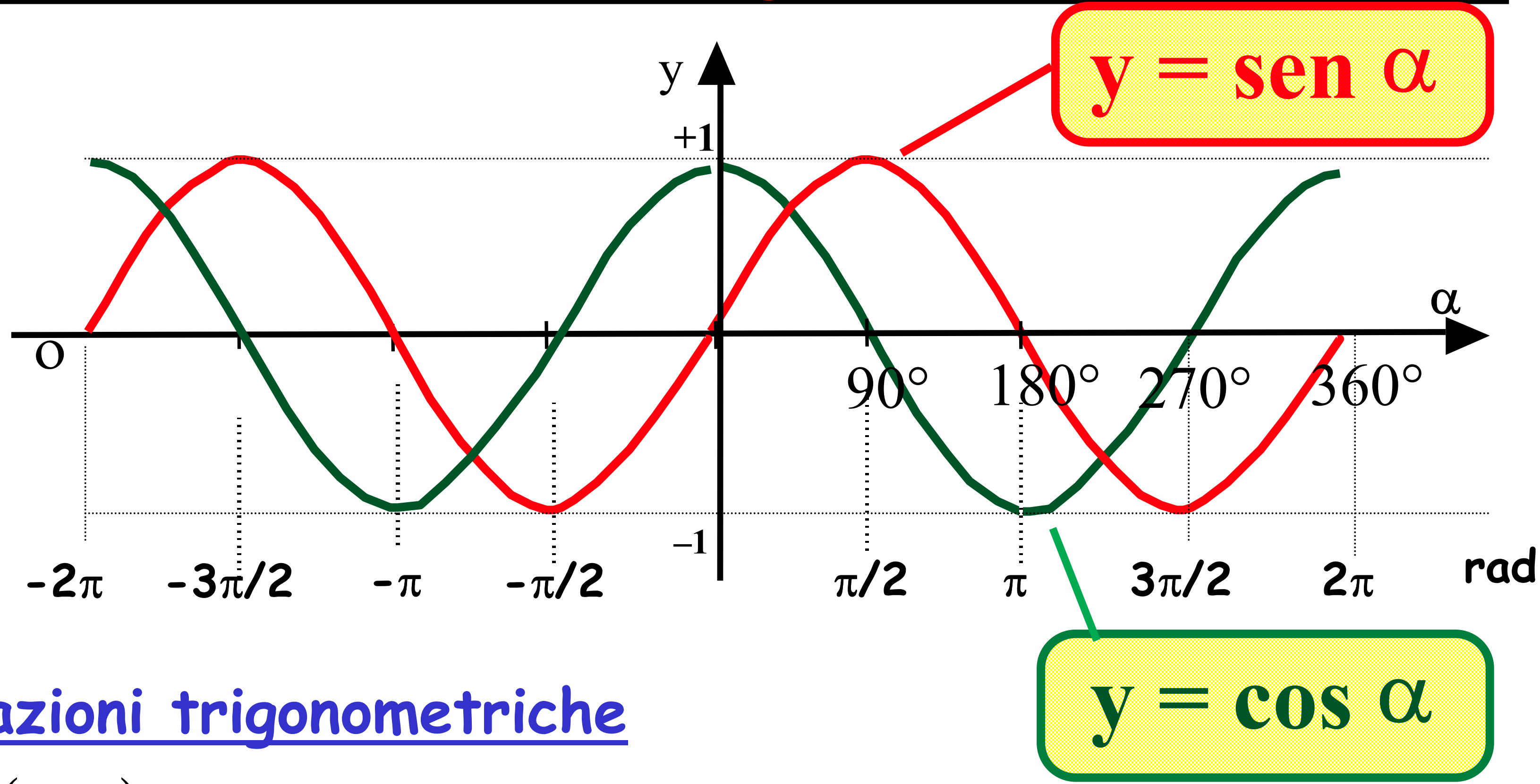
AC è la proiezione di CB nella direzione perpendicolare ad AB

Le funzioni trigonometriche

seno e coseno



Le funzioni trigonometriche



Relazioni trigonometriche

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$$

Funzioni dipendenti dal tempo

Vasta classe di fenomeni della Fisica (e della vita quotidiana)

Le leggi fisiche in cui il tempo appare come variabile indipendente sono dette Leggi Orarie

Tempo (t) = variabile indipendente

Alcuni esempi:

- **Moti:** $s=s(t)$, $v=v(t)$, $a=a(t)$
- **Oscillazioni:** $s(t) = A\cos(\omega t)$
- **Decadimenti:** $n(t) = n_0\, e^{-\lambda t}$

Simbologia Matematica

$=$	uguale a
$\cong$	approssimativamente uguale a
$\approx$ oppure $\sim$	circa uguale, dell’ordine di grandezza di
$\neq$	diverso da
$>$ ($<$)	maggiore (minore) di
$>>$ ($<<$)	molto maggiore (minore) di
$\leq$ ($\geq$)	maggiore (minore) o uguale
$\propto$	direttamente proporzionale a
$\vert\mathbf{x}\vert$	modulo (o valore assoluto) di x
$\Delta \mathbf{x}$	variazione (aumento) di x (x_{dopo}-x_{prima})
$-\Delta \mathbf{x}$	diminuzione (o differenza) di x (x_{prima}-x_{dopo})