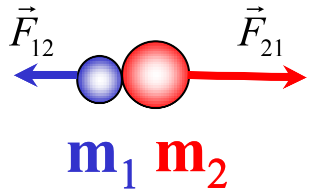
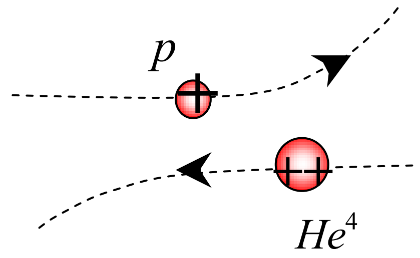
Urti tra due punti materiali

URTO: *evento* ***isolato*** *nel quale una* ***forza*** *relativamente* ***intensa*** *agisce per un* ***tempo*** *relativamente* ***breve*** *su due o più corpi in contatto tra loro*

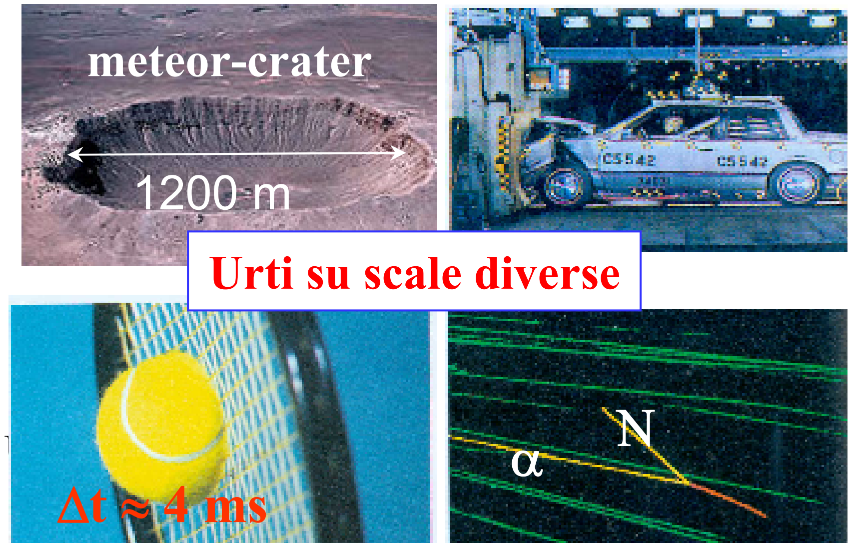
- × risultato di un **contatto fisico**



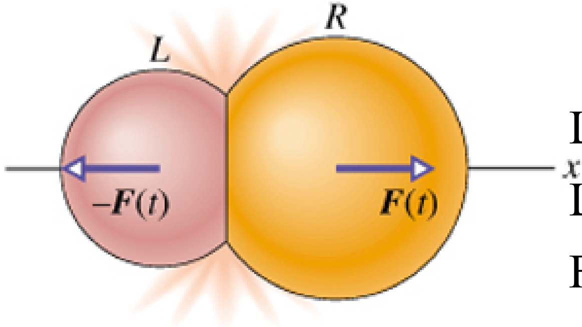
- × risultato di una **interazione** tra particelle



Le forze che, come nel caso di un urto ***agiscono per un tempo breve*** rispetto al tempo di osservazione sono chiamate **forza impulsive**



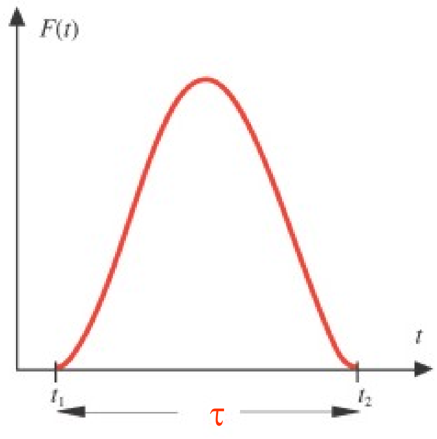
Urti tra due punti materiali



L'oggetto L esercita su R una forza **F(t)**

L'oggetto R esercita su L forza **–F(t)**

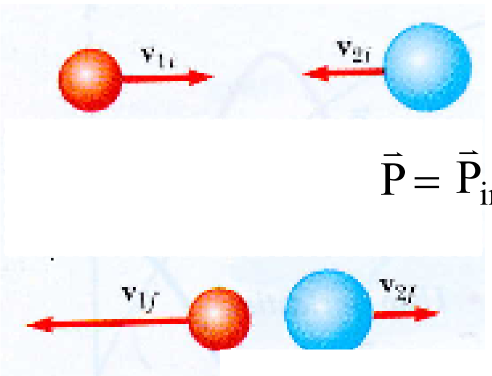
F(t) può avere un'intensità che ***varia nel tempo***



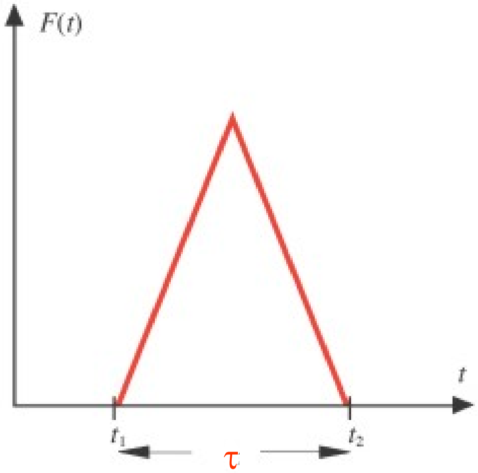
Nelle figure sono rappresentati due possibili andamenti di F(t).

L'azione della forza si esplica nell'intervallo $\tau = t_2 - t_1$

Le ***forze impulsive*** che si manifestano durante un urto sono ***interne al sistema*** dei due punti materiali interagenti In assenza di forze esterne si verifica durante l'urto ***la conservazione della quantità di moto totale***

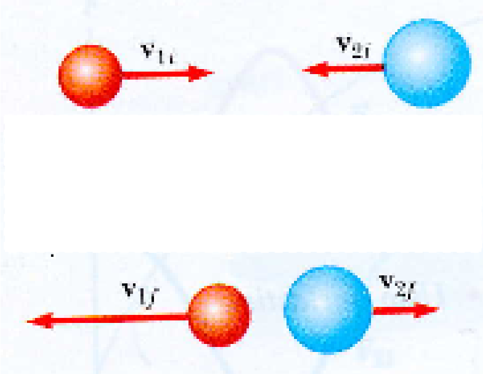


$$\vec{P} = \vec{P}_{in} = m_1\vec{v}_{1,in} + m_2\vec{v}_{2,in} = m_1\vec{v}_{1,fin} + m_2\vec{v}_{2,fin} = \vec{P}_{fin}$$



Durante l'urto ***la quantità di moto del centro di massa rimane invariata:***

$$\vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM} \qquad = \vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin} = \text{costante}$$



Urti tra due punti materiali

Il moto del centro di massa non viene alterato dall'urto. ***Variano*** invece le quantità di moto di ciascun punto materiale per l'effetto dell'impulso della forza di interazione

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)dt = \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

$$m_1\vec{v}_{1,fin} - m_1\vec{v}_{1,in} = \vec{J}_{2,1} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{2,1}(t)dt = \Delta\vec{p}_1 \qquad m_2\vec{v}_{2,fin} - m_2\vec{v}_{2,in} = \vec{J}_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{1,2}(t)dt = \Delta\vec{p}_2$$

Dato che : $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} \Rightarrow \vec{J}_{1,2} = -\vec{J}_{2,1}$

Le variazioni di quantità di moto sono uguali ed opposte

***La conservazione della quantità di moto totale* è possibile in presenza di forze esterne?**

Si se la durata dell'impulso τ è sufficientemente **piccola** e le forze esterne **non sono impulsive**.
Infatti la variazione della quantità di moto totale dovuta alle forze esterne:

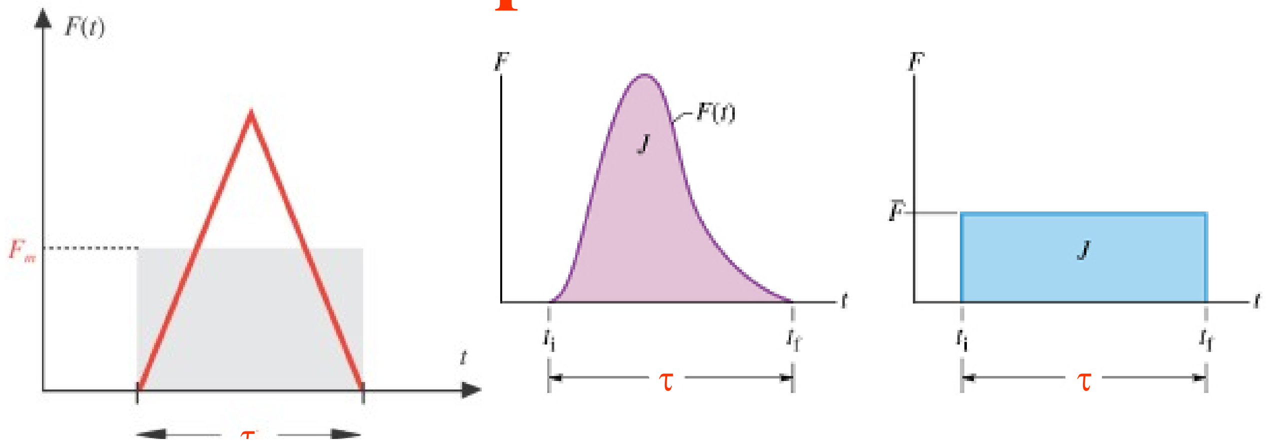
$$\Delta\vec{P} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}^{(E)}(t)dt = \vec{F}_m^{(E)}\tau$$

$J_{1,2}$ e $J_{2,1}$, prima considerati, per le forze interne impulsive che si sviluppano nell'urto, si possono scrivere:

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(t)dt = \vec{F}_m\tau$$

Urti tra due punti materiali

Conservazione della quantità di moto



$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt = \vec{F}_m \tau$$

F_m: valor medio della forza impulsiva nell'intervallo τ

Dato che **J** assume un valore finito e che τ è molto breve, *F_m può assumere valori estremamente grandi, rispetto a cui $F_m^{(E)}$ è certamente trascurabile*

⇩

La forza esterna, se non è impulsiva, ***non modifica i singoli impulsi durante l'urto*** e quindi rimane vera l'uguaglianza $\mathbf{J}_{2,1}=-\mathbf{J}_{1,2}$, e ***valida la conservazione della quantità di moto totale***

Nel caso dell'urto la **conservazione del momento angolare** non aggiunge alcuna informazione Infatti: durante l'urto $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}$ e quindi se **Pin =Pfin**

$$\vec{L}_{in} = \vec{r} \times \vec{P}_{in} \quad = \vec{L}_{fin} = \vec{r} \times \vec{P}_{fin}$$

Nel caso dell'urto il principio di conservazione della quantità di moto ed il principio di conservazione del momento angolare sono equivalenti

Urti tra due punti materiali **Energia**

A priori non è noto se le forze interne sono conservative. Non si può assumere la **conservazione dell'energia meccanica** del sistema durante l'urto nè che l'Energia cinetica si conservi

Dato che la **posizione dei punti non varia** nell'urto, eventuali energie potenziali non variano nell'urto e quindi: $\Delta E_m = \Delta E_k$

L'energia cinetica del sistema può essere espressa utilizzando il secondo teorema di Konig:

$$E_k = \underbrace{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\cdot v_{CM}^2} + E'_k$$

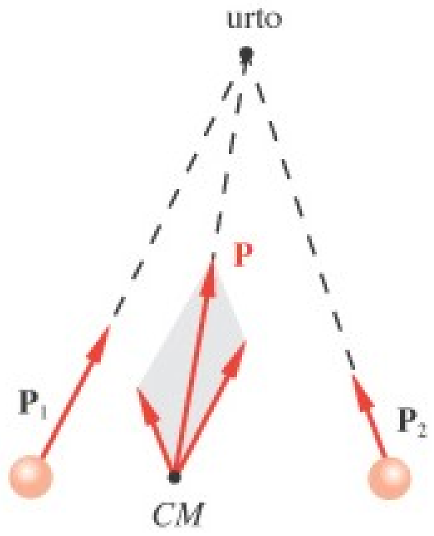
Energia cinetica del centro di massa: non varia se vale la conservazione della quantità di moto

Energia cinetica dei due punti rispetto al sistema del centro di massa.

$$E'_k = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$$

Può rimanere costante o variare a seconda che le forze interne siano conservative o non siano conservative

Sistema del laboratorio e sistema del centro di massa



nel laboratorio

Sistemi di riferimento in cui può essere studiato l'urto:

- Sistema del laboratorio (sistema inerziale)
- Sistema del centro di massa

Legame tra le velocità nei due sistemi, in qualsiasi istante:

$$v_1 = v'_1 + v_{CM} \qquad v_2 = v'_2 + v_{CM}$$

nel centro di massa

Come già dimostrato, nel sistema del centro di massa, la quantità di moto totale è nulla:

$$m_1\vec{v}'_{1,in} + m_2\vec{v}'_{2,in} = m_1\vec{v}'_{1,fin} + m_2\vec{v}'_{2,fin} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{p}'_{1,in} = -\vec{p}'_{2,in}$$

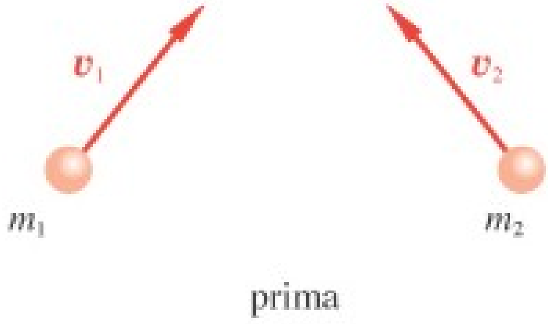
$$\vec{p}'_{1,fin} = -\vec{p}'_{2,fin}$$

Dal centro di massa si vedono i punti arrivare verso il centro di massa con ***quantità di moto uguali in modulo ed opposte in verso***. I punti si urtano nella posizione occupata dal centro di massa e ripartono dopo l'urto con quantità di moto ancora uguali in modulo ed opposte in verso.

In generale per ogni punto : $\vec{p}'_{in} \neq \vec{p}'_{fin}$

A. Romero

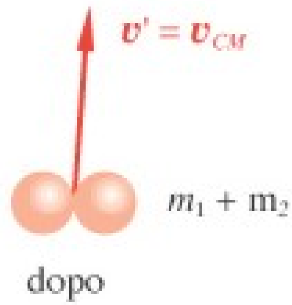
Urto completamente anelastico



L'urto si chiama ***completamente anelastico*** quando i ***due punti restano attaccati dopo l'urto, formando un unico corpo puntiforme di massa m_1+m_2***

Se v_1 e v_2 sono le velocità dei due punti prima dell'urto e v' la velocità comune immediatamente dopo l'urto si ha:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}' \quad = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{(m_1 + m_2)}$$



Subito dopo l'urto i ***due punti si muovono con la velocità che aveva il centro di massa un istante prima dell'urto*** (v_{CM} resta invariata nell'urto)

Le variazioni di quantità di moto dei singoli punti sono:

$$\Delta\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_{CM} - m_1\vec{v}_1$$

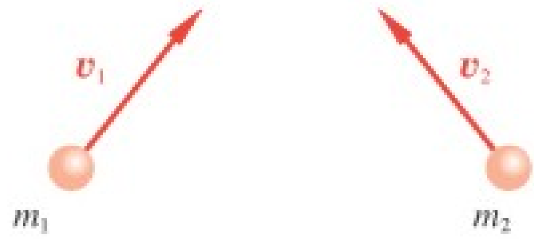
$$\Delta\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_{CM} - m_2\vec{v}_2$$

Si verifica dalla relazione sopra, che queste due variazioni sono uguali ed opposte:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \quad = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM} \quad \Longrightarrow \quad (m_1\vec{v}_{CM} - m_1\vec{v}_1) = -(m_2\vec{v}_{CM} - m_2\vec{v}_2)$$

Urto completamente anelastico

Energia cinetica



prima

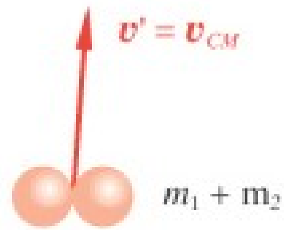
Energia cinetica prima dell'urto:

$$E_{k,in} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2 + E'_k$$

Applicando il teorema di Konig

Energia cinetica nel sistema del centro di massa

Energia cinetica dopo l'urto:



dopo

$$E_{k,fin} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2 < E_{k,in}$$

In un urto completamente anelastico, l'energia totale diminuisce.

L'energia che viene assorbita è E'_k e corrisponde all'energia cinetica rispetto al centro di massa che i punti hanno prima dell'urto :

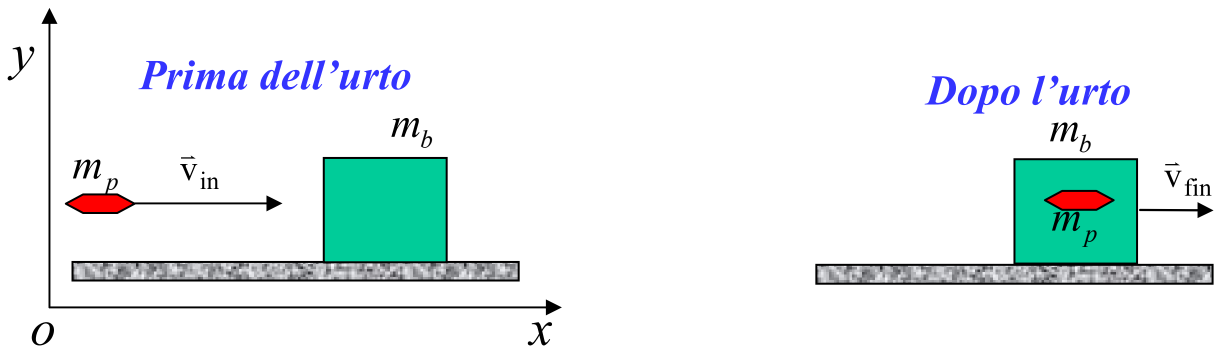
$$\Delta E_k = E_{k,fin} - E_{k,in} = -E'_k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

NOTA: ***Dove finisce l'energia persa?***.

I due corpi durante l'urto **si deformano in modo permanente** e restano compenetrati. **Il lavoro compiuto, a spese dell'energia cinetica iniziale**, per fare avvenire la deformazione non viene più recuperato, ovvero **le forze interne che si sviluppano non sono conservative**.

Esempio

Un proiettile di massa m_p =10g si muove orizzontalmente con v=400ms^{-1} e penetra in un blocco di massa m_b=390g inizialmente in quiete su una superficie priva di attrito.Quali sono le velocità finali del proiettile e del blocco?



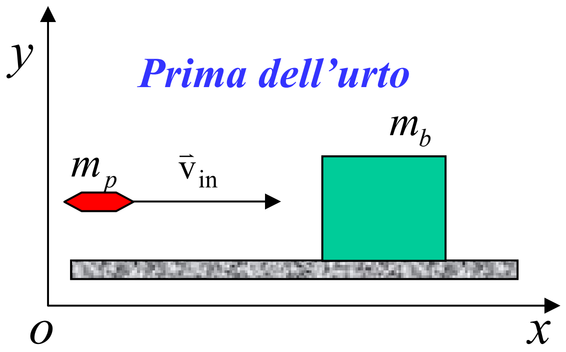
Sol.:

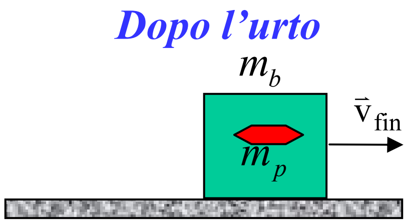
Quantità di moto totale iniziale $\quad P_{in,x} = m_p v_{in,x} = 10 \cdot 400 g \cdot ms^{-1} = 4 \cdot 10^3 gms^{-1} = 4kg \cdot ms^{-1}$

Quantità di moto totale finale $\quad P_{fin,x} = (m_p + m_b) v_{fin,x} = 400g \cdot v_{fin,x} = 0.4kg \cdot v_{fin,x}$

$$P_{in,x} = P_{fin,x} \Rightarrow 4kg \cdot ms^{-1} = 0.4kg \cdot v_{fin,x} \Rightarrow v_{fin,x} = 10ms^{-1}$$

Esempio - continuazione





NOTA 1: $K_i = \frac{1}{2} m_p v_{in,x}^2 = 800J$ $\qquad$ $K_f = \frac{1}{2}(m_p + m_b)v_{fin,x}^2 = 20J$

L' energia non si conserva: calore, deformazione.

NOTA 2: Qual è la variazione di quantità di moto del proiettile e del blocco?

$v_{fin,x} = 10ms^{-1}$

Proiettile: $\Delta P_p = p_{p,fin} - p_{p,in} = (10^{-2}Kg)(10ms^{-1}) - (10^{-2}Kg)(400ms^{-1}) = \boxed{-3.9Ns}$

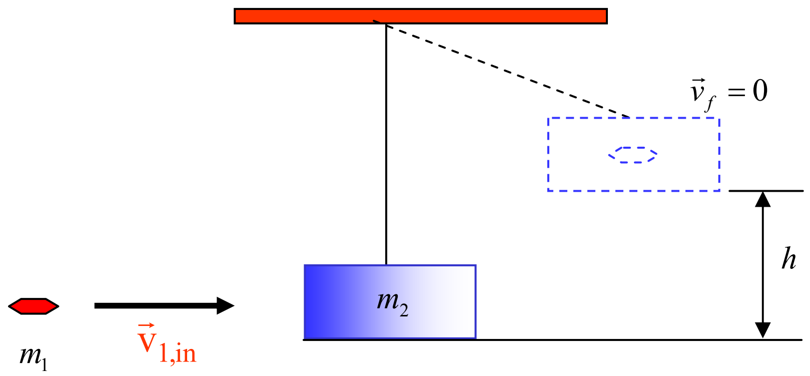
Blocco: $\Delta P_b = (0.39Kg)(10ms^{-1}) - (0) = \boxed{+3.9Ns}$

Opposti!

Esempio: pendolo balistico

Dispositivo per determinare ***la velocità dei proiettili***

Una pallottola di massa m_1, che viaggia orizzontalmente con velocità $v_{1,in}$ urta il pendolo di massa m_2 rimanendovi conficcata. Nessuna forza esterna agisce sul sistema.



per m_2:

- $v_{2,in}=0$
- v del sistema subito dopo l'urto: $v_{2,fin} = v_{fin}$

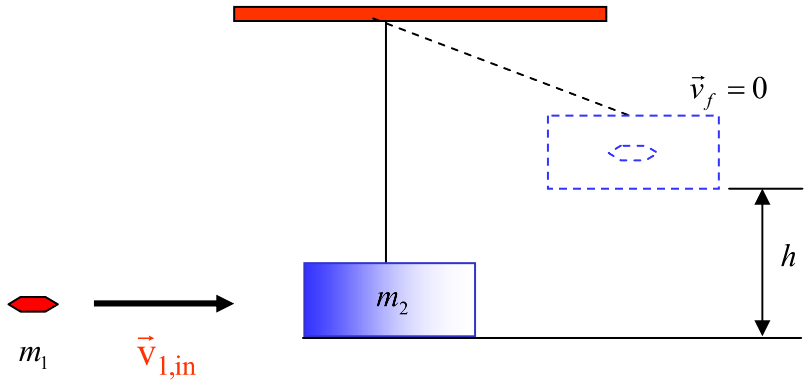
per m_1:

- $v_{1,in}=v_1$
- v del sistema subito dopo l'urto: $v_{1,fin} = v_{fin}$

conservazione della **quantità di moto** $P_{in,x} = P_{fin,x}$

$$m_1 v_{1,in} = (m_1 + m_2) v_{fin} \qquad v_{fin} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1,in}$$

Esempio: pendolo balistico - continuazione



v del sistema subito dopo l'urto: v_{fin} $\quad v_{fin} = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1,in}$

Terminata la collisione, il pendolo con la pallottola inizia ad oscillare raggiungendo un'altezza h, misurata rispetto alla posizione di equilibrio, tale che ***l'energia potenziale eguagli l'energia cinetica del sistema subito dopo l'urto***

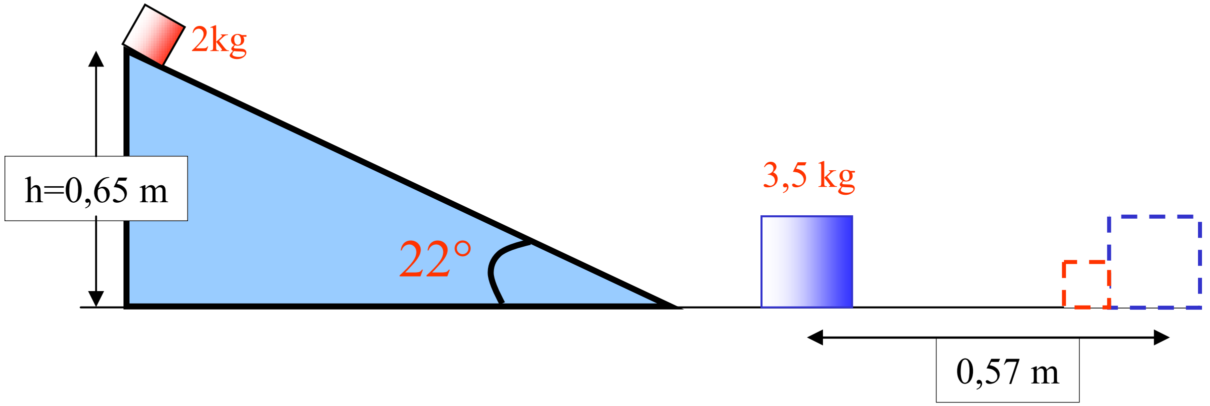
Conservazione dell' **energia meccanica**

$$(m_1 + m_2) gh = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{fin}^2 \quad = \frac{m_1^2}{2(m_1 + m_2)} v_{1,in}^2$$

$$v_{1,in} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh}$$

Esercizio: urto completamente anelastico

Un blocco di m_1=2 kg parte da fermo, senza attrito, lungo un piano inclinato di 22° rispetto al piano orizzontale dall'altezza di 0,65 m. All'arrivo, sul piano a quota zero, urta, attaccandovisi, un blocco di massa m_2=3,5 kg. I due blocchi congiunti slittano per una distanza di 0,57m sul piano orizzontale fino ad arrestarsi. Qual è il coefficiente di attrito della superficie orizzontale?



Sol.:

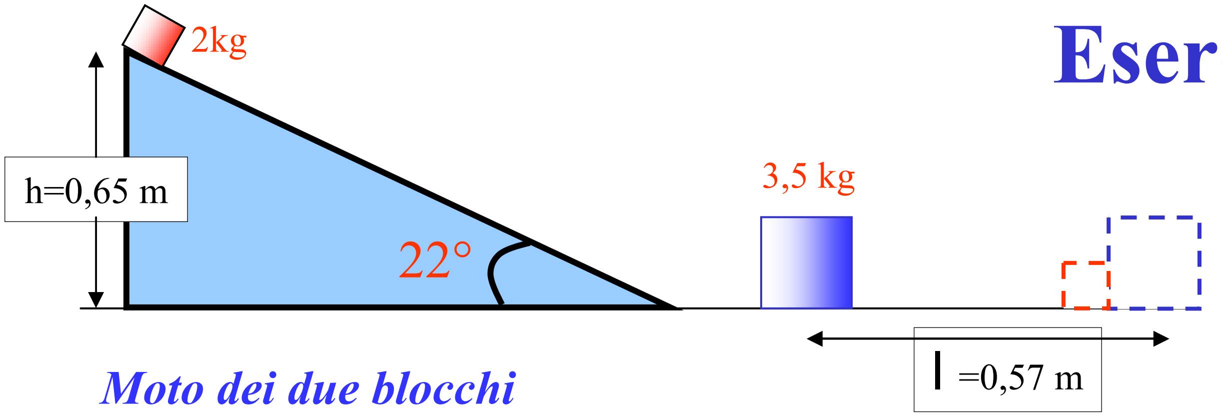
Moto del blocco di 2 kg Per trovare la velocità finale di m_1, prima dell'urto con m_2 applichiamo la conservazione dell'energia

$$m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}65} = 3{,}57 \frac{m}{s}$$

Subito ***dopo l'urto*** i due punti blocchi si muovono insieme con la velocità (v_f):

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_{fin} \Rightarrow v_{fin} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2}{5{,}5} 3{,}57 = 1{,}3 \frac{m}{s} \Rightarrow v_{fin} = 1{,}3 \frac{m}{s}$$

Esercizio: continuazione



$v_{fin} = 1{,}3 \dfrac{m}{s}$

Moto dei due blocchi

Dall'istante dopo l'urto i due blocchi si muovono sul piano orizzontale con velocità iniziale v_f e decelerazione costante data dall'attrito dinamico:

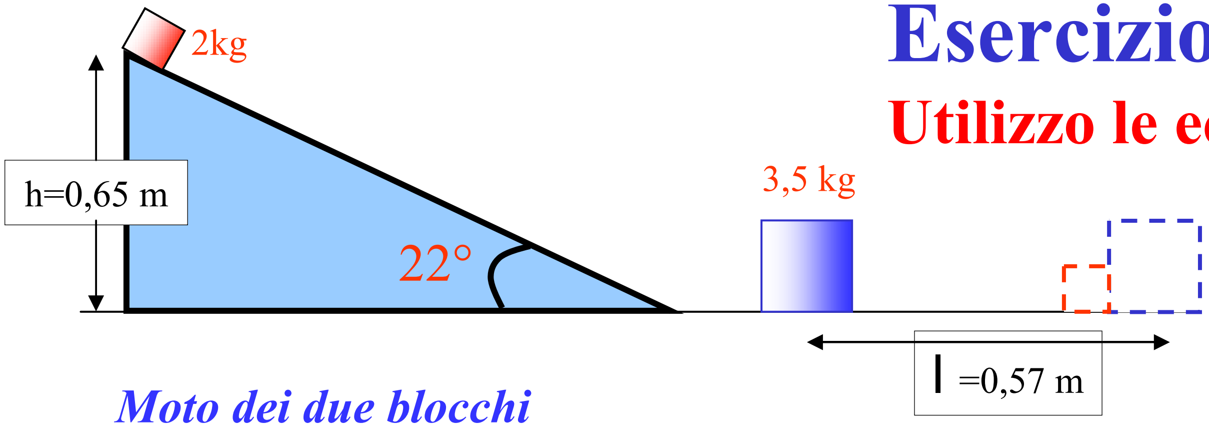
Utilizzando il legame tra variazione dell'energia cinetica e lavoro

$$\Delta E_k = W_{at} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 = \mu_k (m_1 + m_2) g \cdot l$$

$$\Rightarrow \quad \mu_k = \frac{v_f^2}{2 \ell g} = 0{,}15$$

Esercizio: continuazione

Utilizzo le equazioni del moto



$$v_{fin} = 1{,}3\,\frac{m}{s}$$

Moto dei due blocchi

Dall'istante dopo l'urto i due blocchi si muovono sul piano orizzontale con velocità iniziale v_f e decelerazione costante data dall'attrito dinamico: $a = \frac{f_k}{m} = \frac{\mu_k m g}{m}$ ⇨ $a = \mu_k g$

Utilizzando le equazioni del moto uniformemente decelerato:

$$\begin{cases} v(t) = v_f - at \\ x(t) = v_f t - \frac{1}{2} a t^2 \end{cases}$$

Per x(t)=l, v(t)=0 ⇨

$$\begin{cases} 0 = v_f - (\mu_k g)t \\ \ell = v_f t - \frac{1}{2}(\mu_k g) t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \frac{v_f}{\mu_k g} \\ \ell = v_f\left(\frac{v_f}{\mu_k g}\right) - \frac{1}{2}(\mu_k g)\left(\frac{v_f}{\mu_k g}\right)^2 \end{cases}$$

$$\ell = \frac{v_f^{\,2}}{2\mu_k g} \quad ⇨ \quad \mu_k = \frac{v_f^{\,2}}{2\ell g} = 0{,}15$$

Urto elastico

Si definisce urto elastico, ***un urto durante il quale si conserva anche l'energia cinetica del sistema***

$\Downarrow$

Le forze interne sono conservative.

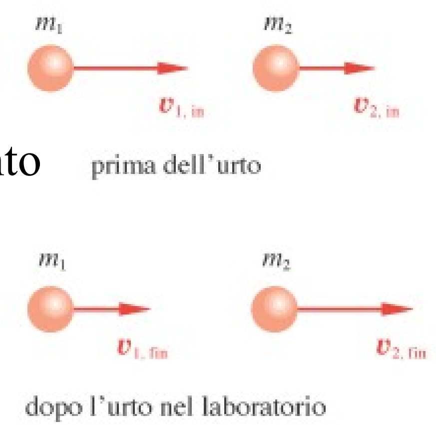
I due corpi che urtano subiscono, durante l'urto, delle deformazioni elastiche, riprendendo la configurazione iniziale subito dopo l'urto.

Nell'urto elastico sono dunque valide le equazioni:

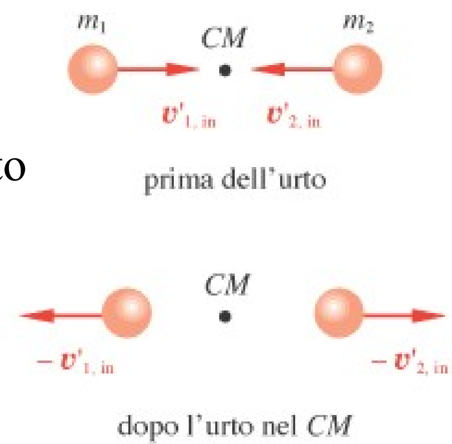
$$\vec{P}_{fin} = \vec{P}_{in}$$

$$E_{k,fin} = E_{k,in}$$

Sistema di riferimento del laboratorio



Sistema di riferimento del centro di massa



Urto elastico

Caso unidimesionale

I due corpi si muovono prima e dopo l'urto elastico lungo la stessa direzione.

Supponendo di conoscere le masse e le velocità iniziali dei due corpi che urtano, attraverso le due equazioni di conservazione:

$$\begin{cases} \vec{P}_{fin} = \vec{P}_{in} \\ E_{k,fin} = E_{k,in} \end{cases}$$

possiamo ricavare il valore delle due velocità finali incognite:

$$\vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin} \quad \Rightarrow \quad m_1\vec{v}_{1in} + m_2\vec{v}_{2in} = m_1\vec{v}_{1fin} + m_2\vec{v}_{2fin} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM}$$

$$E_{k,fin} = E_{k,in} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1 v_{1in}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i,in}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1,fin}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,fin}^2$$

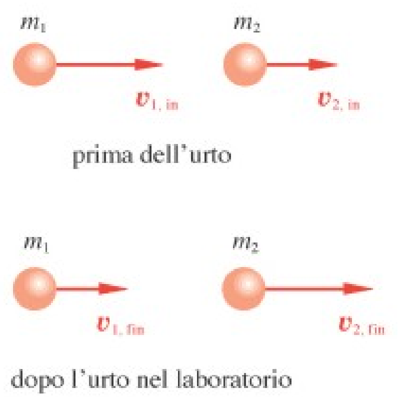
$$\Downarrow$$

$$v_{1,fin} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1,in} + 2m_2 v_{2,in}}{m_1 + m_2}$$

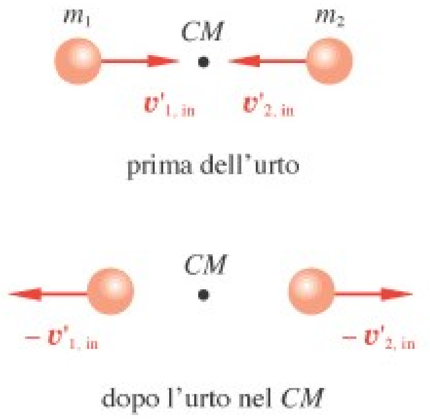
$$v_{2,fin} = \frac{2m_1 v_{1,in} + (m_2 - m_1)v_{2,in}}{m_1 + m_2}$$

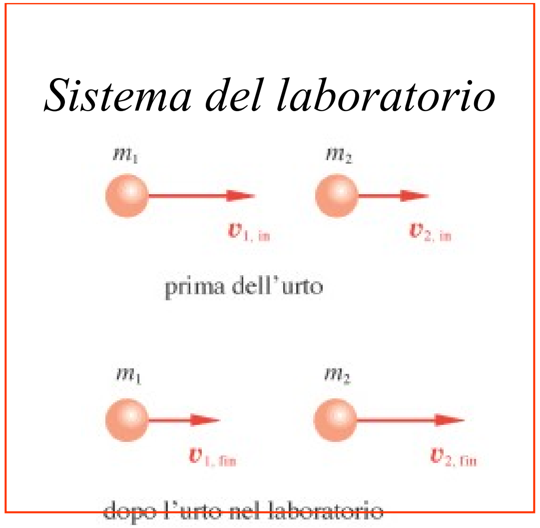
A. Romero

Sistema del laboratorio



Sistema del centro di massa





Urto elastico

Caso unidimesionale

$$
\begin{cases}
v_{1,fin} = \dfrac{(m_1 - m_2)v_{1,in} + 2m_2 v_{2,in}}{m_1 + m_2} \\
v_{2,fin} = \dfrac{2m_1 v_{1,in} + (m_2 - m_1)v_{2,in}}{m_1 + m_2}
\end{cases}
$$

Attenzione ai segni delle velocità! Prendendo come riferimento il verso di $\mathbf{v}_{1,in}$, allora $v_{2,in}$ va considerata con segno positivo se è concorde a $\mathbf{v}_{1,in}$, o negativo se è discorde.

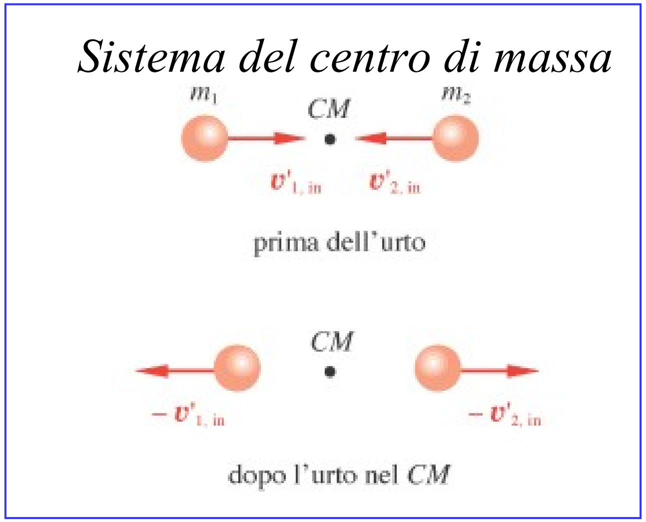
Segno delle velocità finali: - positivo $\Rightarrow$ velocità concorde a $\mathbf{v}_{1,in}$

- negativo $\Rightarrow$ velocità discorde a $\mathbf{v}_{1,in}$

Nel sistema del centro di massa per l'urto elastico si ricava:

$$
\begin{cases}
\vec{v}'_{1,fin} = -\vec{v}_{1,in} \\
\vec{v}'_{2,fin} = -\vec{v}_{2,in}
\end{cases}
$$

Velocità e quantità di moto di ciascun punto rimangono invariate in modulo, cambiano solo il verso



Esempio – urto elastico

Un neutrone di massa m_1 urta frontalmente, in modo elastico un bersaglio costituito da un nucleo atomico di massa m_2 inizialmente fermo. Qual è la diminuzione percentuale dell'energia del neutrone? Fare il calcolo nei casi in cui il nucleo bersaglio sia:

1) Piombo; (massa atomica: A=206)
2) Carbonio; (massa atomica: A=12)
3) Idrogeno. (massa atomica: A=1)

Sol.: $E_{k,in} = E_{k,1,in} = \frac{1}{2} m_1 v_{1,in}^2 \qquad E_{k,2,fin} = E_{k,1,in} - E_{k,1,fin} = \frac{1}{2} m_2 v_{2,fin}^2$

$$v_{2,fin} = \frac{2m_1 v_{1,in} + (m_2 - m_2) v_{2,in}}{m_1 + m_2}$$ dove in questo caso $v_{2,in}$=0 ⇨ $$v_{2,fin} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1,in}$$

$$E_{k,2,fin} = \frac{1}{2} m_2 v_{2,fin}^2 \qquad E_{k,2,fin} = \frac{1}{2} m_2 \frac{4m_1^2 v_{1,i}^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_{k,1,in} \Rightarrow \frac{E_{k,2,fin}}{E_{k,1,in}} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

Caso: 1) A= 206: m_2=206m_1 ⇨ $\frac{E_{k,2,fin}}{E_{k,1,in}} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4 \cdot 206}{(207)^2} = 0{,}02$ ⇨ 2%

Caso: 2) A= 12: m_2=12m_1 ⇨ $\frac{E_{k,2,fin}}{E_{k,1,in}} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4 \cdot 12}{(13)^2} = 0{,}28$ ⇨ 28%

Caso: 3) A= 1: m_2=1m_1 ⇨ $\frac{E_{k,2,fin}}{E_{k,1,in}} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4 \cdot 1}{(2)^2} = 1$ ⇨ 100%

Urti tra punti materiali e corpi rigidi e urti tra corpi rigidi

Riassunto per la risoluzione degli esercizi:

Se urto è elastico ⇒ Conservazione dell'energia cinetica

Se agiscono solo forze interne o quelle esterne non sono impulsive ⇒ Conservazione della quantità di moto totale

Se esiste un vincolo che tiene fermo un punto del corpo rigido ⇒ Esiste una forza esterna di tipo impulsivo ⇒ La quantità di moto non si conserva

Se agiscono solo forze interne o quelle esterne non sono impulsive ⇒ Conservazione del momento angolare L, indipendentemente dalla scelta del polo O

Se agiscono forze esterne, il cui momento M è nullo rispetto ad un dato polo ⇒ Conservazione del momento angolare L calcolato rispetto allo stesso polo O

Quando il corpo urtato è vincolato, il sistema di vincoli può esplicitare, durante l'urto, un sistema di ***forze di risultante R*** e un ***momento risultante M.***

L'effetto complessivo nel brevissimo tempo di durata dell'urto è dato dall'impulso della forza e dall'impulso angolare:

$$\begin{cases} \vec{J} = \int \vec{R}\,dt \\ \vec{r} \times \vec{J} = \int \vec{M}\,dt \end{cases}$$

Esercizio – urti tra punti materiali e corpo rigido

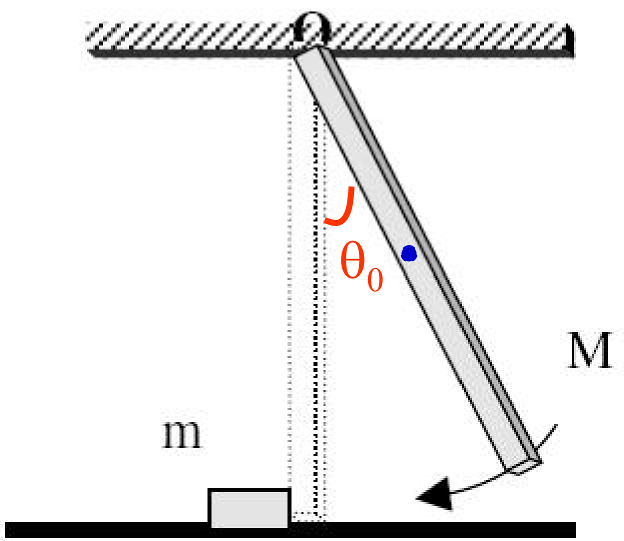
Una sbarra omogenea di lunghezza L e massa M, è sospesa nel punto O ed è libera di ruotare nel piano verticale attorno ad un asse orizzontale passante per tale punto. Inizialmente la sbarra è inclinata di un angolo θ_0, rispetto alla direzione verticale (vedi figura) e da questa posizione ad un dato istante viene lasciata cadere.

Raggiunta la posizione verticale essa colpisce, una massa puntiforme m appoggiata sul piano.

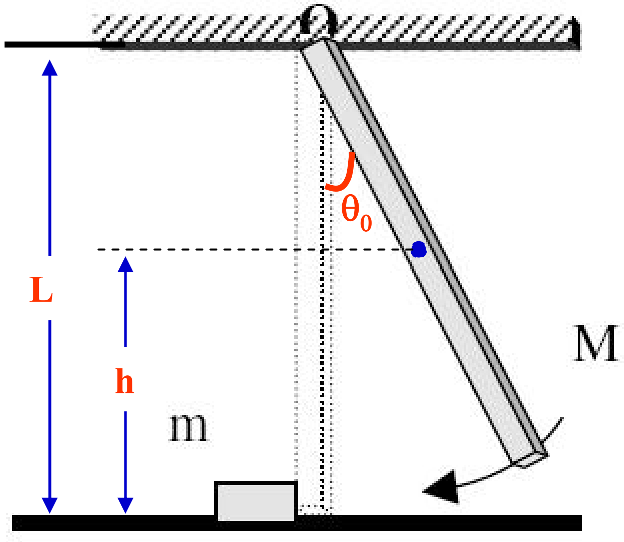
Nell'ipotesi in cui l'asta ruoti attorni ad O senza attrito e che l'urto con la massa m sia completamente anelastico, calcolare:

•**A.** Il modulo della **velocità angolare ω_0** con cui la sbarra urta la massa m appoggiata sul piano.

•**B. L'angolo θ_{fin}**, rispetto alla direzione verticale, del quale si sposta la sbarra, in seguito all'urto con la massa puntiforme.



Esercizio – urti tra punti materiali e corpo rigido



Sol.: Il moto della sbarra può essere schematizzato in 3 fasi:

1. fase di discesa della sbarra
2. urto completamente anelastico con m
3. risalita del sistema sbarra + massa

Fase 1: E' possibile applicare la conservazione dell'energia meccanica per la sbarra tra l'istante iniziale in cui la sbarra è ferma a θ_0 rispetto alla direzione verticale e l'istante finale immediatamente precedente all'urto con la massa m:

$$E_{k,in} + E_{p,in} = E_{k,fin} + E_{p,fin} \Rightarrow 0 + Mgh = \frac{1}{2} I\omega^2 + Mg\frac{L}{2} \Rightarrow Mg\left(L - \frac{L}{2}\cos\theta_0\right) = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^{\,2} + Mg\frac{L}{2}$$

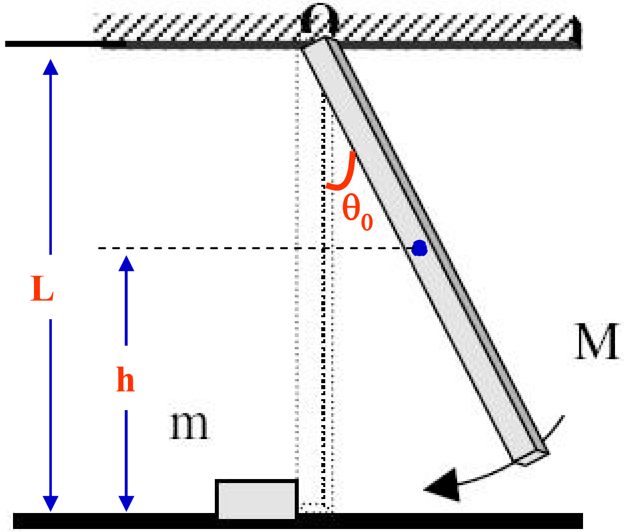
$$\boxed{h = \left(L - \frac{L}{2}\cos\theta_0\right)} \qquad \boxed{I_0 = \frac{1}{3} ML^2}$$

$$Mg\left(L - \frac{L}{2}\cos\theta_0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega_0^{\,2} + Mg\frac{L}{2} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{L}(1 - \cos\theta_0)}$$

Esercizio – urti tra punti materiali e corpo rigido

Sol. - continuazione:

Fase 2: Durante l'urto si ha la CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE TOTALE del sistema barra+massa rispetto al polo O:



$$L_{in}(\text{sbarra}) + L_{in}(m) = L_{fin}(\text{sbarra} + m)$$

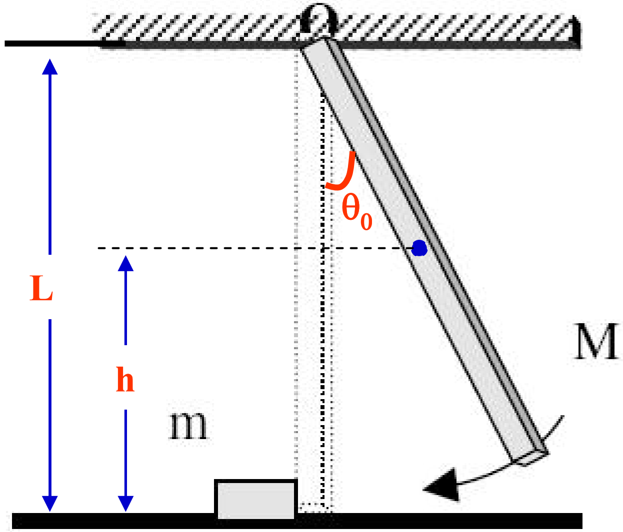
$$I_0 \omega_0 + 0 = (I_0 + mL^2)\omega'$$

$$\boxed{I_0 = \frac{1}{3} ML^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\omega' = \frac{\frac{1}{3} ML^2}{\frac{1}{3} ML^2 + mL^2}\omega_0$$

Esercizio – urti tra punti materiali e corpo rigido



Sol. - continuazione:

Fase 3: Durante la risalita del sistema sbarra + m si ha la CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

$$E_{k,in}(\text{sbarra}+m)+E_{p,in}(\text{sbarra}+m)=E_{k,fin}(\text{sbarra}+m)+E_{p,fin}(\text{sbarra}+m)$$

$$\frac{1}{2}\left(I_0+mL^2\right)\omega'^2+Mg\frac{L}{2}=0+mg\left(L-L\cos\theta_{fin}\right)+Mg\left(L-\frac{L}{2}\cos\theta_{fin}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(1-\cos\theta_{fin}\right)=\frac{\frac{1}{2}\left(I_0+mL^2\right)\omega'^2}{\left(\frac{M}{2}+m\right)gL}$$