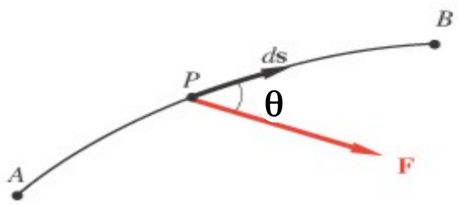
Dinamica II: Lavoro

Se il punto di applicazione di una forza subisce un certo spostamento ed esiste una componente della forza parallela allo spostamento, **la forza compie un lavoro**.

Si consideri un punto che si muove su una generica traiettoria e sia **F** la risultante delle forze che agiscono sul punto. Si definisce ***lavoro della forza F***, compiuto durante lo spostamento dalla posizione A a B, la quantità *scalare*:

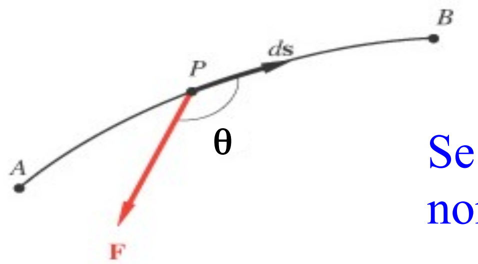


$$W = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_A^B F\cos\theta\, ds = \int_A^B F_T\, ds$$

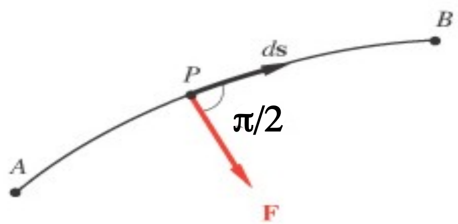
Se $\theta < \pi/2$, $\Rightarrow \cos\theta > 0 \Rightarrow$ *Lavoro **positivo***

Se $\theta > \pi/2$, $\Rightarrow \cos\theta < 0 \Rightarrow$ *Lavoro **negativo***

Se $\theta = \pi/2$, $\Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow$ *Lavoro **nullo***



Se **F** è ortogonale alla traiettoria, F è puramente centripeta e non compie lavoro



Dimensioni $[W]=[F][L]$ Unità di misura $J = N\cdot m$

$J = \text{joule}$

Il joule è l'unità di misura del lavoro

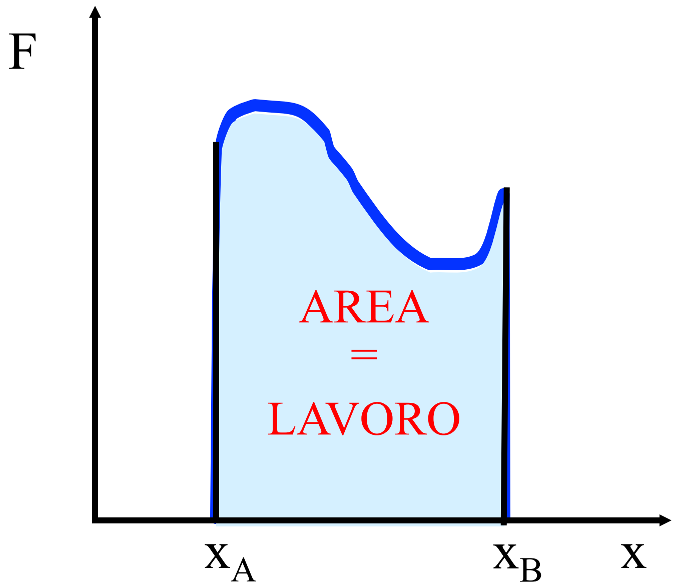
Lavoro

se su un corpo agiscono più forze **F** è la somma di più forze e il lavoro è la somma dei lavori delle singole forze

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B (\mathbf{F}_1 + ... + \mathbf{F}_n) \cdot d\mathbf{s}$$

$$W = \int_A^B \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s} + ... + \int_A^B \mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{s} = W_1 + ... + W_n$$

Il lavoro di una forza è uguale **all'area della figura delimitata dall'asse x, dalla curva** che rappresenta la forza e dalle parallele all'asse delle ordinate condotte per gli estremi dello spostamento (deriva dalla definizione di integrale)



Potenza

Il lavoro nell'unità di tempo prende il nome di *potenza*: misura la rapidità con cui si compie un lavoro.

$$P = \frac{dW}{dt} = F\frac{ds}{dt} = \qquad F \cdot v = F_T \cdot v$$

La *potenza* sopra descritta prende il nome di ***potenza istantanea***.

La ***potenza media*** è il rapporto fra il lavoro totale e il tempo durante il quale il lavoro viene svolto.

$$P = \frac{W}{\Delta t}$$

Dimensioni $[P]=[F][L][T]^{-1}$ Unità di misura $W = J \cdot s^{-1}$

$$W = \mathrm{Watt}$$

Il Watt *è l'unità di misura della potenza*

Esempio

Che potenza deve sviluppare motore di seggiovia che trasporta 2400 persone all'ora superando un dislivello di 500 m. Supponiamo la massa delle persone di circa 70 Kg

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{W}{\Delta t}$$

Lavoro W=F.Δy con F forza peso, quindi costante, e Δy spazio parallelo a forza

peso

$$W = mg \cdot 2400 \cdot 500 = 70 \cdot 9.8 \cdot 2400 \cdot 500$$

P= W/Δt

$$P = 70 \cdot 9.8 \cdot 2400 \cdot 500 / 3600 = 70 \cdot 9.8 \cdot 2 \cdot 500 / 3$$

.

=228670 W =229 KW

Esercizio Lavoro

Una particella si muove di moto rettilineo con velocità rappresentata in figura.

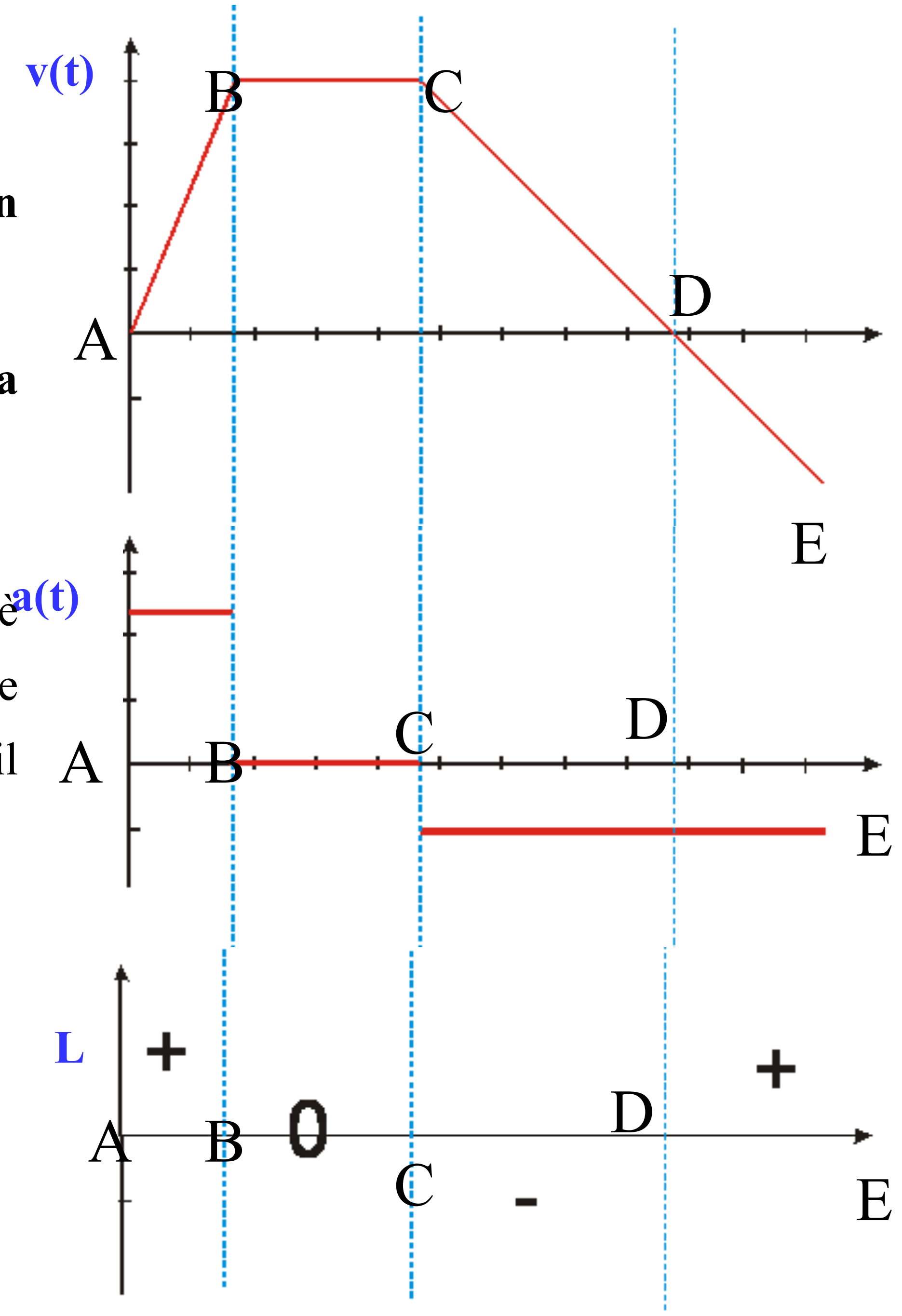
Determinare il segno del lavoro compiuto dalla forza F che agisce sulla particella.

Il segno del lavoro dipende dal segno di **F** che è lo stesso di **a** e da quello di **v** quindi inizio a capire il segno di a dal grafico di v e poi faccio il prodotto dei segni in ogni intervatto di tempo

$$L = P \cdot t$$

con:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$



Esercizio - Potenza

Un'automobile ha massa m=800 kg. Calcolare la potenza che deve erogare il motore per imprimere un'accelerazione di $a=3\ m/s^2$ alle velocità di 36 km/h e 108 km/h

$$36\frac{km}{h} = 36\frac{1000}{3600}\frac{m}{s} \qquad v_1 = \quad = 10\frac{m}{s}$$

$$108\frac{km}{h} = 108\frac{1000}{3600}\frac{m}{s} \qquad v_2 = \quad = 30\frac{m}{s}$$

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} = m\vec{a}\cdot\vec{v} = ma\cdot v = 800\cdot 3\cdot v$$

$$\vec{a}//\vec{v}$$

$$P_1 = 800\cdot 3\cdot v_1 = 800\cdot 3\cdot 10 = 24000W$$

$$P_2 = 800\cdot 3\cdot v_2 = 800\cdot 3\cdot 30 = 72000W = 72KW$$

Teorema dell'energia cinetica

Il lavoro compiuto dalla forza risultante che agisce su un corpo è uguale alla variazione dell'energia cinetica del corpo infatti:

$$dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = F\cos\theta ds = F_T ds = ma_T ds = m\frac{dv}{dt}ds = m\frac{ds}{dt}dv = mv\cdot dv$$

$$dW = mv\cdot dv \longrightarrow$$ *Legame tra lavoro infinitesimo e variazione infinitesima del modulo della velocità*

Per un percorso finito dalla posizione A a B si ha, definendo la nuova quantità energia cinetica E_k: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

$$W = \int_A^B dW = \int_A^B mv\cdot dv = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k$$

Variazione dell'energia cinetica

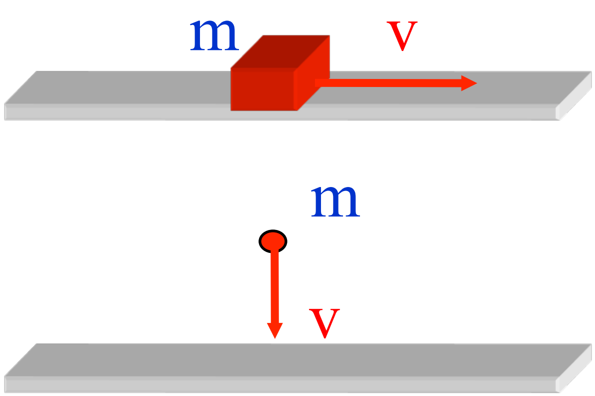
Se W>0 $\Rightarrow$ $E_{k,Finale} > E_{k,Iniziale}$

Se W<0 $\Rightarrow$ $E_{k,Finale} < E_{k,Iniziale}$

Se W=0 $\Rightarrow$ $E_{k,Finale} = E_{k,Iniziale}$

Energia cinetica costante. Ad esempio nel moto circolare uniforme, il lavoro compiuto dall'unica forza presente, la forza centripeta, è nullo ⇒la velocità è costante in modulo, forza è perpendicolare a spostamento

Energia cinetica



L'energia cinetica è una forma di energia legata al movimento.

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \qquad \vec{p} = m\vec{v}$$

$$E_k = \frac{p^2}{2m} \qquad p = \sqrt{2mE_k}$$

Lavoro. Il lavoro è la manifestazione dell'azione di una forza ed è quindi conseguenza dell'interazione con l'ambiente. Si parla di **lavoro scambiato, mai di lavoro posseduto da un sistema.**

Energia. Si parla di **energia posseduta** dal sistema, che viene modificata dall'interazione con l'ambiente esterno. Un effetto misurabile di un'interazione è la variazione di energia.

Dimensioni $[E_c] = [M][L]^2[T]^{-2}$ Unità di misura $J = N \cdot m$

$J = \text{joule}$ *Il joule è l'unità di misura dell'energia*

*Per studio di atomi e particelle J=V*C , (eV 1,6 10^-19 J)*

Teorema dell'energia cinetica con F costante

Per una forza costante l'accelerazione è costante e si può mettere in relazione la distanza percorsa con la velocità iniziale e quella finale:

$$W = F_x \Delta x = m a_x \Delta x$$

definizione di lavoro

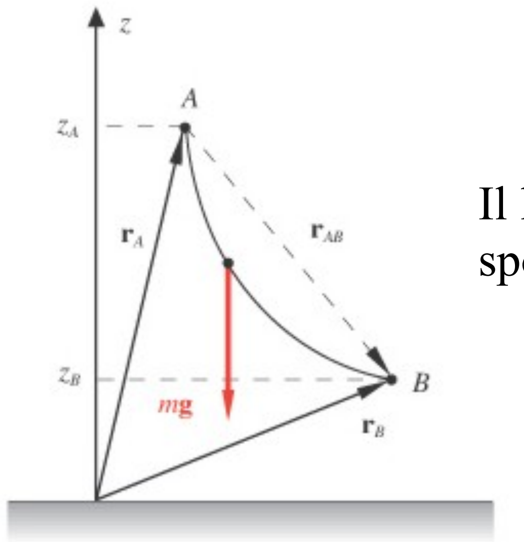
II principio della dinamica

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_x t^2 \qquad v(t) = v_0 + a_x t$$

$$\Rightarrow \quad v_{finale}^2 = v_{iniziale}^2 + 2a_x \Delta x \rightarrow \qquad a_x \Delta x = \frac{1}{2}\left(v_{finale}^2 - v_{iniziale}^2\right)$$

Moltiplicando per la massa

$$W = \frac{1}{2} m\left(v_{finale}^2 - v_{iniziale}^2\right) = E_{k,finale} - E_{k,iniziale} = \Delta E_k \quad \Rightarrow \quad \boxed{W = \Delta E_k}$$



Lavoro della forza peso

Il lavoro compiuto dalla forza peso m**g** (costante) per un generico spostamento da A a B.

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{F} \cdot \int_A^B d\mathbf{s} = \quad m\mathbf{g} \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_{AB}$$

$$m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_{AB} = (m\mathbf{g})_z \cdot (\mathbf{r}_{AB})_z = -mg(z_B - z_A)$$

m**g** ha una sola componente non nulla ed è diretta lungo z (verso opposto), dunque nel prodotto scalare compare la sola componente z:

$$W = -mg(z_B - z_A) = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p$$

dove si è indicato con $E_p = mgz$

In questo passaggio è stata definita la funzione E_p di z : ***Energia potenziale della forza peso*** che dipende solo dalla posizione e ha la seguente proprietà:

Il lavoro è uguale all'opposto della variazione dell'energia potenziale durante lo spostamento tra A e B quindi non dipende dalla particolare traiettoria che collega A e B.

Energia potenziale gravitazionale: significato

L'energia potenziale è l'energia posseduta da un corpo in virtù della sua **posizione**. Un masso poggiato in cima ad una roccia ha energia potenziale gravitazionale. Se gli si dà una spinta, esso rotola giù aumentando la sua velocità e quindi la sua energia cinetica: mentre il masso cade **la sua energia potenziale si converte in energia cinetica**.

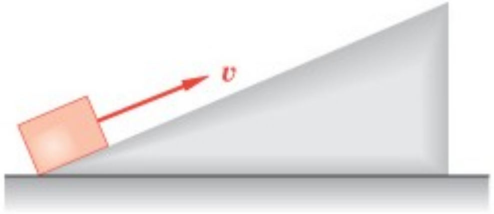
L'energia potenziale gravitazionale E_p di un corpo di massa m a una certa quota h è data da:

$$E_p = mgh$$

NOTA: il valore di E_p dipende dal punto rispetto al quale si misura h, che è arbitrario: ciò che importa è solo la **variazione** dell'energia potenziale.

Uno scalatore compie lavoro nell'aumentare la sua energia potenziale gravitazionale.

ESEMPIO



Un punto di massa m si trova alla base di un piano inclinato liscio. Se la velocità iniziale è v_A ed è diretta come in figura, qual è l'altezza rispetto alla base della posizione in cui il punto si ferma?

Il lavoro compiuto per alzare il punto dall'altezza z_A all'altezza z_B:

$$W = -\Delta E_p = -mg(z_B - z_A) = -mgh_B$$

Per il teorema dell'energia cinetica: $W = -mgh_B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 - mgh_B$

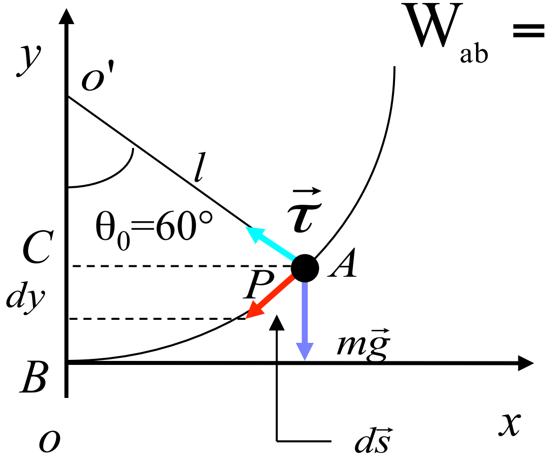
Il corpo riesce a salire poiché possiede una certa energia cinetica. Si ferma quanto la sua energia cinetica è nulla ovvero quando v_B=0. Dalla relazione precedente si ricava dunque la quota a cui si ferma:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - mgh_B = 0 \qquad \Rightarrow h_B = \frac{v_A^2}{2g}$$

Esempio

Una massa ***m=50g*** è appesa, tramite un filo inestensibile di lunghezza ***l=25cm*** e di massa trascurabile, ad un punto di sospensione. Il filo viene spostato di un angolo di 60° rispetto alla verticale ed abbandonato da fermo.

Quanto vale la velocità di ***m*** quando passa per la verticale?



$$W_{ab} = \int_a^b \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_a^b (\vec{\tau} + m\vec{g})\cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{\tau}\cdot d\vec{s} + \int_a^b m\vec{g}\cdot d\vec{s}$$

=0 perché **τ⊥ ds**

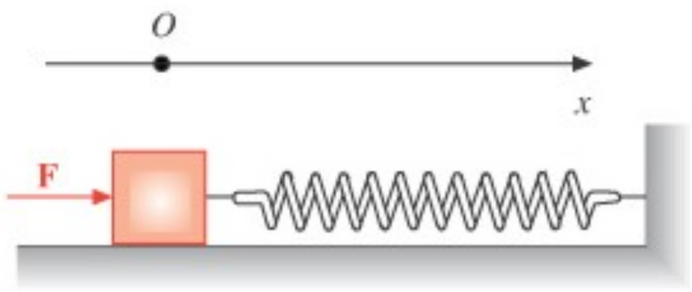
$$W_{a,b} = \int_a^b m\vec{g}\cdot d\vec{s} = m\int_a^b \vec{g}\cdot d\vec{s}$$

ma $\vec{g}\cdot d\vec{s}$ è il prodotto del modulo di $\vec{g}$ per la proiezione di *ds* sulla direzione di g (cioè y):

$$d\vec{s}\cdot\hat{j} = dy \Rightarrow -m\int_a^b g\,dy = mg(y_a - y_b) \Rightarrow W_{a,b} = mgy_a - mgy_b \quad \text{Con } y_b\text{=0:} \quad W_{a,b} = mgy_a$$

teorema energia cinetica→ $W_{a,b} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$ punto parte da fermo: $W_{a,b} = \frac{1}{2}mv_b^2$

$\frac{1}{2}mv_b^2 = mgy_a$ Con y_a= l-lcos60°=l/2: $\Rightarrow \frac{1}{2}mv_b^2 = mg\frac{l}{2}$ ⇒ $v_b = \sqrt{gl} = 1.58\,ms^{-1}$



Lavoro di forza elastica

per uno spostamento sull'asse x lavoro fatto da molla vale:

$$W_{A\to B} = \int_A^B F ds = \int_A^B -kxu_x \cdot dxu_x = \int_A^B -kx dx = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right)$$

$$W_{A\to B} = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$ ***Energia potenziale elastica***

E' stata cosi definita E_p: ***Energia potenziale della forza elastica***, funzione solo della posizione x che ha la proprietà:

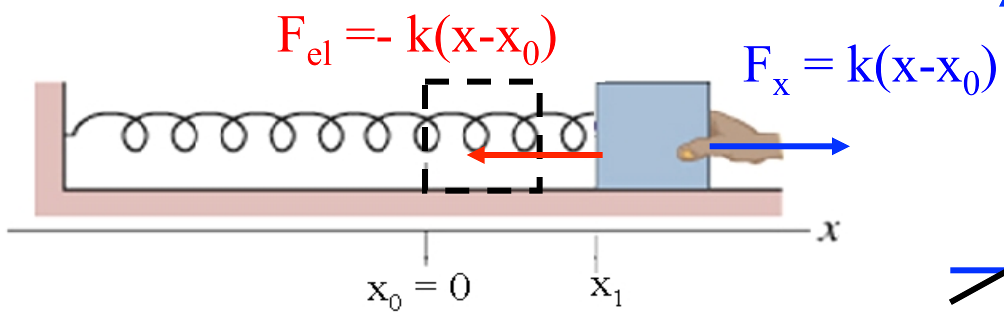
Il lavoro è uguale all'opposto della variazione della funzione E_p e dipende esclusivamente dalla posizione iniziale e finale.

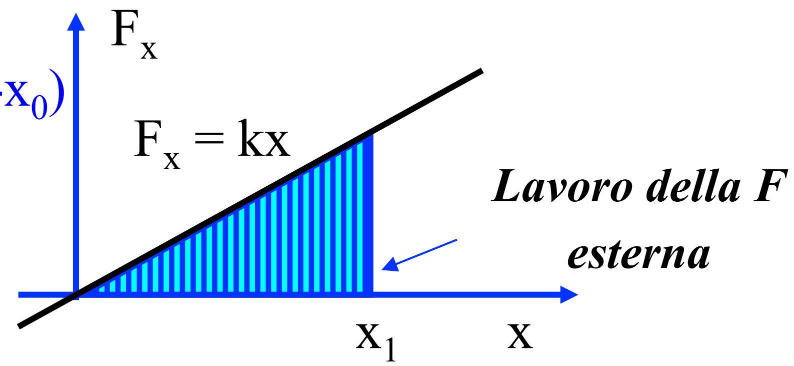
Se il punto si muove verso il centro della forza → W >0, E_p diminuisce

Se il punto si allontana dal centro → W <0, E_p aumenta

Energia potenziale di una molla

Per allungare o accorciare una molla devo applicare una forza esterna F_{ext} eguale e contraria alla F_{el} (di richiamo) della molla. La F_{ext} compie lavoro per accorciare o allungare una molla. Tale lavoro è immagazzinato nella molla sotto forma di energia potenziale.



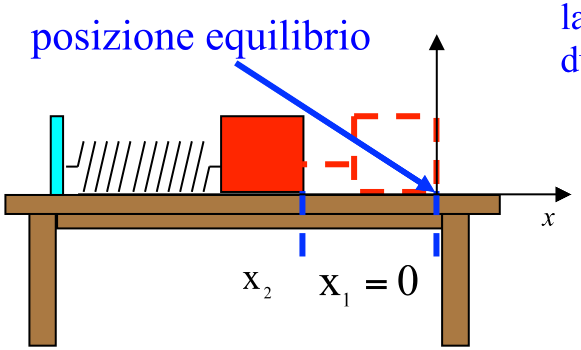


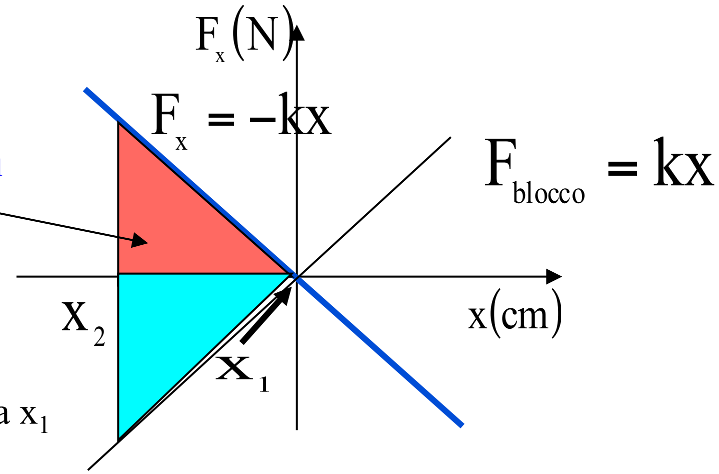
Per allungare la molla bisogna quindi applicare una forza $F_x = k(x-x_0)$; in particolare per spostarla dal punto $x_0 = 0$ al punto x_1 dobbiamo compiere il lavoro indicato dall'area tratteggiata in figura. Questo lavoro è dato da:

$$W = \frac{1}{2}(x_1)(kx_1) = \frac{1}{2}kx_1^2 \xrightarrow{\text{in generale}} E_{p,molla} = \frac{1}{2}kx^2$$

Esempio

Un blocco appoggiato su una superficie orizzontale liscia è attaccato ad una molla orizzontale il cui comportamento ubbidisce alla legge di Hooke ed esercita sul blocco una forza F_x=-kx, dove x è misurata a partire dalla posizione di equilibrio della molla e la costante elastica è k = 400N/m. La molla viene compressa fino a x_2=-5cm dalla sua posizione di equilibrio x_1=0. Qual'è il lavoro compiuto dal blocco?



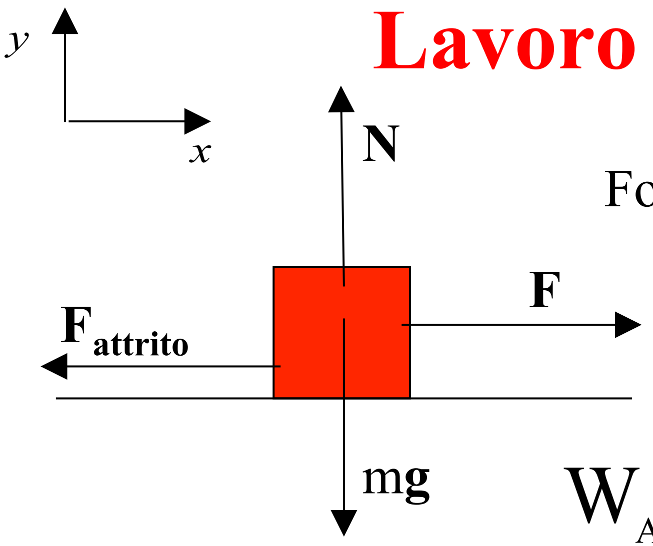


$$W = \frac{1}{2}\boxed{k\Delta x^2} = \frac{1}{2}(-0.05m)^2 400N/m = 0.5J$$

Area sotto la curva F=F(x).

W>0 perchè F e Δx sono concordi

Lavoro di una forza d'attrito radente



Forza di attrito radente dinamico: $\mathrm{F}_{ad} = -\mu_d \mathrm{N} \mathrm{u}_v$

Lavoro compiuto nel percorso tra A e B:

$$W_{A \to B} = \int_A^B F_{ad} ds = \int_A^B -\mu_d N u_v ds = -\mu_d N \int_A^B ds$$

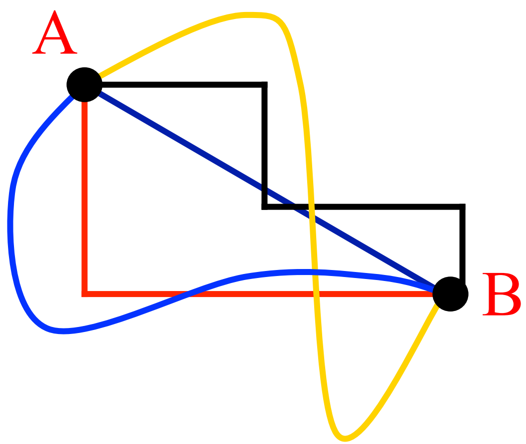
L'integrale è la **lunghezza del percorso da A a B**, misurata lungo la **traiettoria effettiva del punto materiale.**

***NOTA**: Il lavoro NON è esprimibile con una differenza dei valori di una funzione delle coordinate nei punti A e B, ma dipende dal tipo di traiettoria percorsa*

Il lavoro della forza di attrito radente è sempre negativo, cioè è sempre lavoro resistente. (Infatti se cambia il verso del moto, cambia anche quello della forza di attrito, sempre opposta alla velocità)

Forze conservative

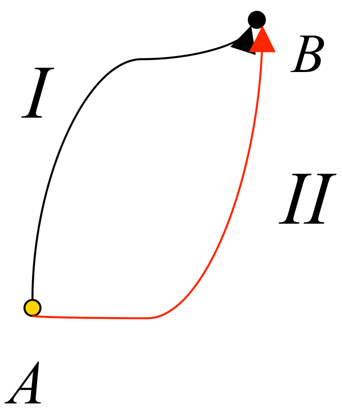
La forza peso e la forza elastica sono chiamate **forze *conservative perché*** **il lavoro** compiuto non dipende dal particolare percorso ma **dipende solo dalle posizioni iniziale e finale** del corpo a cui la forza è applicata



nel caso della forza d'attrito il lavoro invece dipende dalla traiettoria del punto materiale e la forza è detta non conservativa

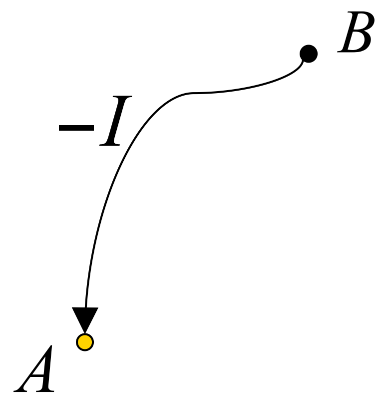
Nel caso di forze *conservative:*

$$L_{A\to B} = \int_A^B (\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s})_I = \int_A^B (\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s})_{II} = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

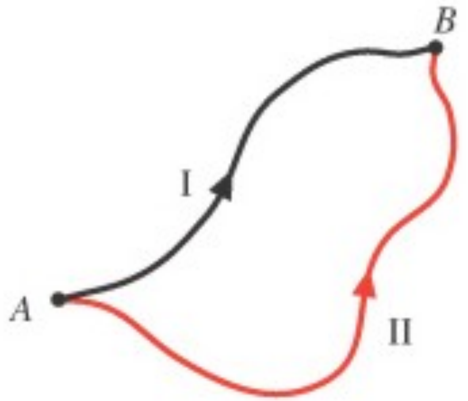


Il lavoro lungo il percorso I coincide con quello lungo il percorso II o lungo qualsiasi altro, dipende solo da A e B

$$\int_A^B \mathbf{F}d\mathbf{s} = -\int_B^A \mathbf{F}d\mathbf{s}$$



Invertendo il senso di percorrenza cambia solo il segno del lavoro



Forze conservative ed Energia potenziale

$$\int_A^B (Fds)_I + \int_B^A (Fds)_{II} = \int_A^B (Fds)_I - \int_A^B (Fds)_{II} = 0$$

Lungo un qualsiasi percorso chiuso il lavoro è nullo

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

⇓

E' possibile definire una **funzione della sola posizione** la cui ***variazione tra A e B è pari al lavoro,*** questa funzione si chiama ***energia potenziale*** e per tutte le forze conservative

$$L_{A \to B} = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p$$

Non esiste una formulazione generale dell'espressione **dell'energia potenziale**, ma **dipende dalla forza a cui si riferisce**

La relazione permette il calcolo esplicita dell'energia potenziale e ne precisa il **significato fisico, legandola alla capacità di fornire il lavoro.**

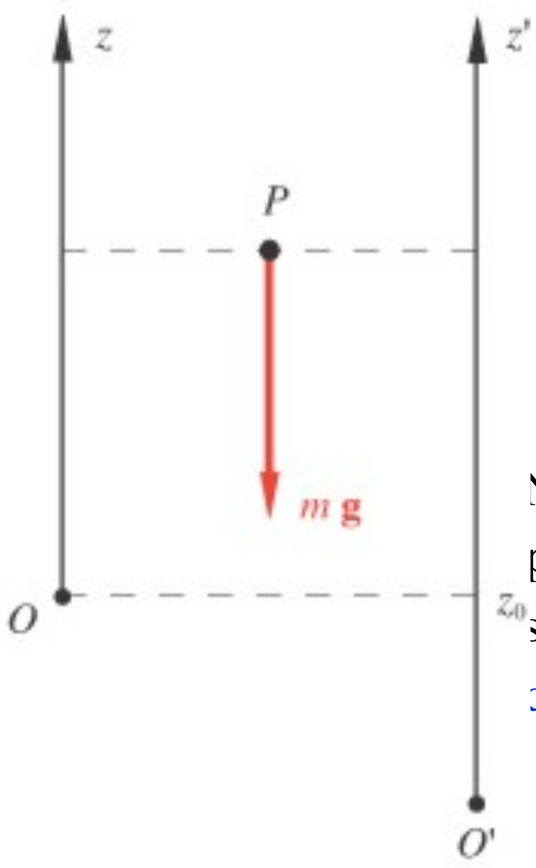
Energia potenziale

L'energia potenziale viene definita a meno di una costante.

Esempio.

Se si assume come livello 0 l'origine dell'asse z $$E_p = mgz$$

Se si sceglie invece il sistema di z':
$$E'_p = mgz' = mg(z + z_0)$$



$$E'_p = E_p + mgz_0 = E_p + \text{cost}$$

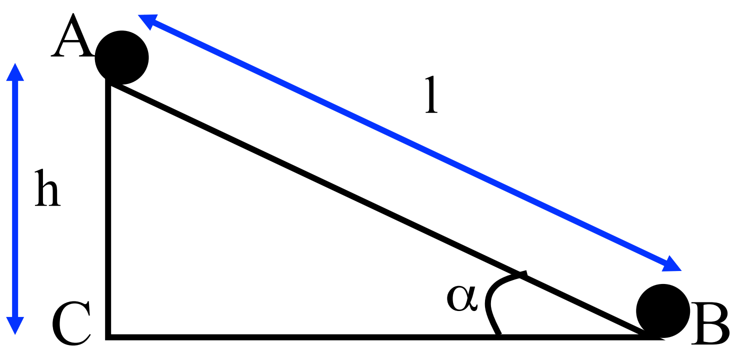
Essendo il lavoro così definito:

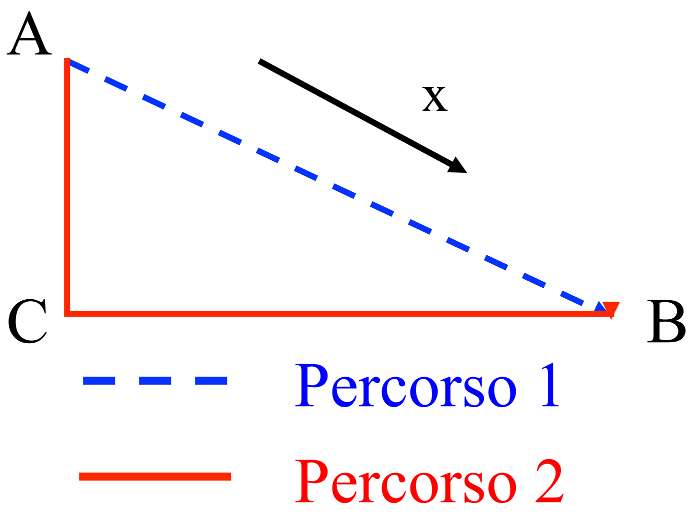
$$L_{A\rightarrow B} = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p$$

Nell'espressione del lavoro compare la **variazione dell'energia potenziale e la costante viene eliminata.** Pur dipendendo E_p dalla scelta dell'origine, il **lavoro** compiuto dalla forza peso **non** dipende dalla scelta del sistema di referimento

Forze conservative (esempio)

Se agisce solo la forza peso





Percorso 1: Un corpo di massa m scivola lungo un piano inclinato privo di attrito sotto l'azione della forza peso. Il lavoro da essa compiuto è:

$$L_{AB} = F_{\text{nella direzione di AB}}\,\overline{AB} = (mg \cdot \text{sen}\ \alpha)l =$$

$$= mg(l\text{sen}\ \alpha) = mgh$$

Percorso 2: Immaginiamo adesso che il corpo cada **verticalmente da A a C** e poi sia spostato orizzontalmente da C a B.

$$L = L_{AC} + L_{CB} =$$

$$= F_{\text{nella direzione di AC}}\,\overline{AC} + F_{\text{nella direzione di CB}}\,\overline{CB} =$$

$$= mgh + 0 = mgh$$

Allo stesso risultato si perviene attraverso un **qualunque percorso** a scalini o anche curvilineo.

Forze non conservative

Tutte le **forze** per cui non vale l'invarianza del lavoro rispetto al percorso (esempio: forza di attrito radente) sono chiamate **non conservative. Per le forze non conservative non si può introdurre il concetto di energia potenziale**

Continua a **valere il teorema dell'energia cinetica**.

$$L_{A\to B} = \int_A^B mvdv = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k$$

All'interno delle forze di tipo non conservativo una particolare classe è costituita dalle forze di attrito, dette anche forze ***dissipative*** perché il lavoro compiuto dall'attrito dissipa l'energia meccanica, trasformandola in energia termica.

Un altro tipo di forza non conservativa è quella connessa a **grandi deformazioni di un corpo**. Se per esempio una molla viene allungata oltre il suo limite elastico, essa si deforma permanentemente e il lavoro compiuto nell'allungamento non viene recuperato quando la molla viene lasciata libera. Di nuovo, il lavoro compiuto nel deformare la molla viene dissipato in energia termica: la molla diventa più calda.

Il **lavoro compiuto da forze non conservative dipende**, in generale, **da parametri diversi dalle posizioni iniziale e finale** del corpo. Può dipendere per esempio dalla velocità del corpo, dallo spazio totale percorso o dal particolare percorso seguito.

Conservazione dell'energia meccanica

- ***Riassumendo:*** nel caso siano presenti **solo forze conservative**, vale:

$$L_{A\to B} = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p$$

- secondo il teorema dell'energia cinetica il **lavoro totale** compiuto da tutte le forze che agiscono su un corpo è uguale alla variazione di energia cinetica del corpo.

$$L_{A\to B} = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k$$

Se le forze che compiono lavoro sono **solo di tipo conservativo**: $L = -\Delta E_p = \Delta E_k$

$$L_{A\to B} = E_{p,A} - E_{p,B} = E_{k,B} - E_{k,A} \Rightarrow (E_{k,B} + E_{p,B}) = (E_{k,A} + E_{p,A})$$

Se le sole forze che compiono lavoro sono conservative, l'energia meccanica totale *(cioè la somma di energia cinetica ed energia potenziale)* ***del sistema resta costante.***

$$E_m = E_k + E_p = \text{cost}$$

Nel caso di forze conservative ***il lavoro ottenuto a spese della diminuzione di energia potenziale causa l'aumento dell'energia cinetica e viceversa***. Durante il moto avviene ***una trasformazione da una forma all'altra di energia per tramite di lavoro compiuto o assorbito***, ma il contenuto energetico totale dato dall'energia meccanica non cambia.

Conservazione dell'energia meccanica

Generalmente sono presenti **sia** forze **conservative** **che** forze **non conservative**, il lavoro è:

$$L_{A\to B} = L_c + L_{nc} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

Lavoro delle forze conservative

Lavoro delle forze non conservative

$$L_c = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p$$

$$L_{A\to B} = E_{p,A} - E_{p,B} + L_{nc} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

$$L_{nc} = \left(E_{k,B} + E_{p,B}\right) - \left(E_{k,A} + E_{p,A}\right)$$

$$L_{nc} = E_{m,B} - E_{m,A}$$

In presenza di forze non conservative l'energia meccanica non rimane costante e la sua variazione è uguale al lavoro delle forze non conservative

Se sul sistema compiono lavoro anche forze non conservative, allora il lavoro svolto da queste ultime è uguale alla variazione dell'energia meccanica totale del sistema.

$$\boxed{L_{nc} = \Delta(E_c + E_p) = \Delta E_{tot}}$$

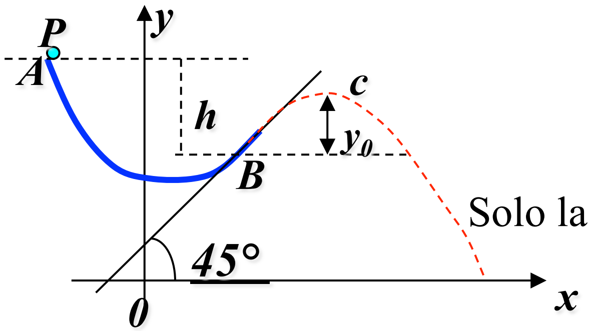
Energie: ordini di grandezza

Combustibile nucleare nel sole	$1\ 10^{45}$ J
Esplosione di una supernova	$1\ 10^{44}$ J
Combustibile fossile terrestre	$2.0\ 10^{23}$ J
Energia usata in USA in un anno	$8\ 10^{19}$ J
Esplosione vulcanica (KraKatoa)	$6\ 10^{18}$ J
Annichilazone di 1 Kg materia/antimateria	$9\ 10^{16}$ J
Combustibile nucleare in un reattore tipico	$1\ 10^{16}$ J
Esplosione nucleare (1 Mton)	$4.2\ 10^{15}$J
Fissione di 1Kg di uranio	$8.2\ 10^{13}$ J
fulmine	$3.4\ 10^{7}$ J
Combustione di 1 litro di benzina	$3.4\ 10^{7}$ J
Energia alimentare umana (3000 Kcal)	$1.3\ 10^{7}$ J
Esplosione di 1 Kg di tritolo	$4.6\ 10^{6}$ J
Metabolizzazione di una mela (110 Kcal)	$4.6\ 10^{5}$ J
Energia cinetica di un uomo di corsa	$4\ 10^{3}$ J
Sollevamento sulle braccia	$3\ 10^{2}$ J
Fissione di un nucleo di Uranio	$3.2\ 10^{-11}$ J
Annichilazione e^+e^-	$1.6\ 10^{-13}$ J
Energia di ionizzazione dell' atomo di idrogeno	$2.2\ 10^{-18}$ J

Altre unità di misura usate:
1cal= 4,187 J
1 eV=1,602 10^{-19}J

Esempio

Un punto materiale è posto, inizialmente in quiete, in **A**. Viene abbandonato, sotto l'azione della forza peso, lasciandolo scivolare lungo la guida il cui attrito è trascurabile. Calcolare la velocità con cui arriva in **B**, più in basso, rispetto ad **A**, di un dislivello pari ad **h.** Calcolare inoltre la quota massima $\mathbf{y_0}$, rispetto a **B**, raggiunta dal punto P nel vertice **C** della traiettoria, se nel punto estremo la guida forma un angolo di 45° rispetto all' orizzontale.



Quali forze agiscono?

$$\vec{P} = m\vec{g} \quad e \quad \vec{N}$$

Solo la forza peso compie lavoro dato che N è normale allo spostamento

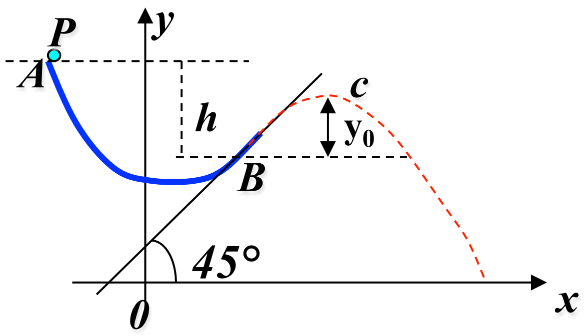
Possiamo applicare la conservazione dell' energia meccanica

$$\frac{1}{2}mv_a^2 + mgy_a = \frac{1}{2}mv_b^2 + mgy_b$$

$$\text{con}: \quad v_a = 0; (y_a - y_b) = h \qquad v_b^2 = 2gh \qquad v_b = \sqrt{2gh}$$

Il punto materiale cade con la stessa velocità che avrebbe avuto in caduta libera da una altezza h

Esempio



Arrivato in B si muove sotto l' azione della **sola forza peso** come nel moto dei proiettili. Applichiamo il principio di conservazione dell' energia tra i punti B e C:

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_b^2 + \cancel{m}gy_b = \frac{1}{2}\cancel{m}v_c^2 + \cancel{m}gy_c$$

Divido per g

$$\left.\begin{aligned} v_b^2 &= v_{bx}^2 + v_{by}^2 \\ v_c^2 &= v_{cx}^2 + v_{cy}^2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} v_{bx} &= v_{by} \\ v_{cx} &= v_{bx} \\ v_{cy} &= 0 \end{aligned}$$

perché θ=45°

$$v_c^2 = v_{cx}^2 = \frac{1}{2}v_b^2$$

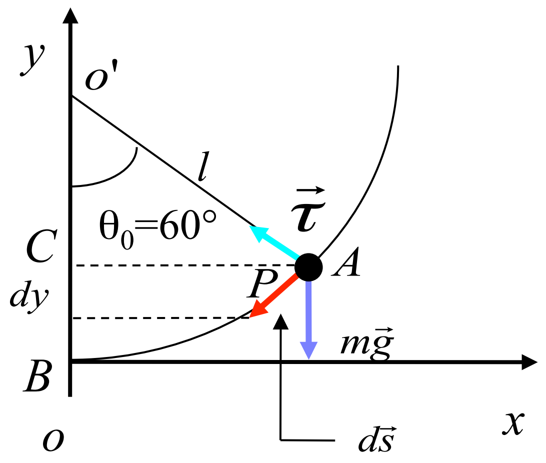
perché θ=45°

$$y_0 = y_c - y_b = \frac{1}{2g}\left(v_b^2 - v_c^2\right) = \frac{1}{2g}\left(v_b^2 - \frac{v_b^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{v_b^2}{2g}$$

$$\text{ma} \quad v_b = \sqrt{2gh} \quad \Longrightarrow \quad y_0 = \frac{1}{2}\frac{2gh}{2g} \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2}h$$

Esempio

Riprendiamo l'esempio del pendolo: utilizzando la conservazione dell'energia meccanica, trovo subito la velocità nel punto più basso



$$E_{in.} = E_{fin}$$

$$\underbrace{\cancel{\frac{1}{2} m v_A^2}}_{=0} + m g y_A = \frac{1}{2} m v_B^2 + \underbrace{\cancel{m g y_B}}_{=0}$$

$$m g y_a = \frac{1}{2} m v_b^2$$

$$m g l (1 - \cos\theta) = \frac{1}{2} m v_b^2$$

$$v_b = \sqrt{2gh}$$

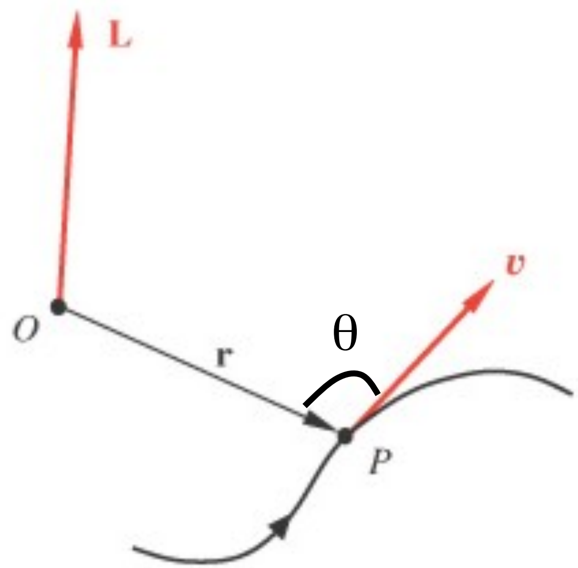
Momento angolare

Il **momento angolare L**, detto anche momento della quantità di moto, di una particella rispetto all'origine O del sistema di riferimento è una grandezza vettoriale definita come:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

Il punto **O** è il **polo** rispetto a cui è calcolato **L**.

- il modulo è dato da: $|\mathbf{L}| = |\mathbf{r}||\mathbf{v}| \operatorname{sen}\theta$
- **L** è perpendicolare sia al vettore **r** che al vettore **p**;
- il verso è dato dalla regola della mano destra.



- Se cambio il polo O→O' :

$$\vec{L}_{O'} = \vec{L}_O + \overrightarrow{O'O} \times m\vec{v}$$

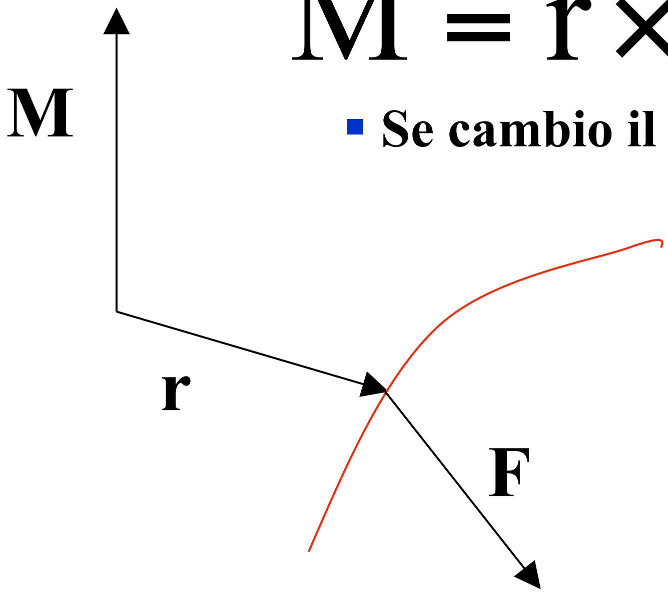
Unità di misura $\quad kg \cdot m^2 s^{-1} = J \cdot s$

***J·s** è l'unità di misura del momento angolare*

Momento di una forza

Si definisce *momento della forza* la seguente grandezza:

$$\overrightarrow{M} = \vec{r} \times \overrightarrow{F} \qquad M = rF\sin\vartheta$$



- **Se cambio il polo O→O' :**

$$\overrightarrow{M}_{O'} = \overrightarrow{M}_O + \overrightarrow{O'O} \times \vec{F}$$

Quando ad un punto sono applicate più forze con risultante: **R**=Σ**F**$_i$, si ha che il **momento** complessivo è uguale al **momento della forza risultante**

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \ldots\ldots + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_n = \mathbf{r} \times \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{r} \times \mathbf{R}$$

Tale proprietà è **valida solo se le forze hanno un unico punto di applicazione**

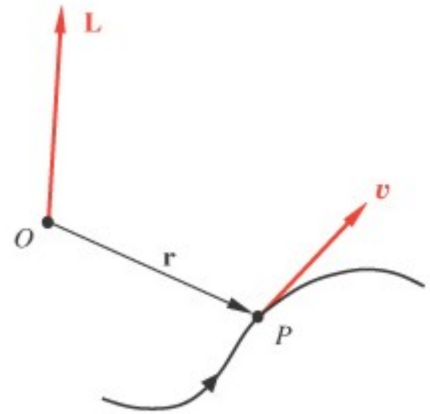
Teorema del momento angolare

Il **momento angolare L** è una funzione del tempo L(t). Se si calcola la variazione nel tempo del momento angolare di un punto materiale in movimento si ha:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Velocità del punto P: **v**

F=ma



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

v x **v**=0

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Questa relazione rappresenta ***il teorema del momento angolare per un punto materiale***:

La derivata temporale del momento angolare è uguale al momento della forza

se entrambi i momenti sono riferiti allo stesso polo fisso

Conservazione del momento angolare

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Il momento della forza **M** può essere **nullo,** sia quando la **forza è nulla,** sia quando la **forza è parallela a r.** In questo caso si ha M=0:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{costante}$$

Il momento angolare di un punto rimane costante nel tempo se il momento delle forze è nullo.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad \Rightarrow \quad d\vec{L} = \vec{M}dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^t \vec{M}dt = \int_0^t d\vec{L} = \Delta L = L_{fin} - L_{in}$$

$$\int_0^t \vec{M}dt = \int_0^t (\vec{r} \times \vec{F})dt = \vec{r} \times \int_0^t \vec{F}dt = \vec{r} \times \vec{J} = \Delta\vec{L}$$

J: Impulso della forza

r x ***J****: momento dell'impulso*

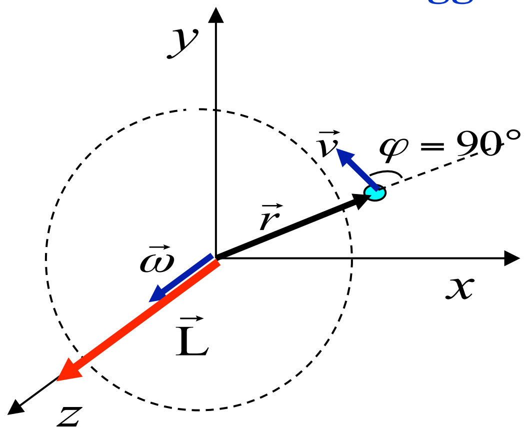
Teorema del momento dell'impulso: la variazione del momento angolare è uguale al momento dell'impulso applicato al punto

Momenti angolari: ordini di granedzza

Moto orbitale di tutti i pianeti del sistema solare	$3.2\ 10^{43}$Js
Moto orbitale della Terra	$2.7\ 10^{40}$Js
Rotazione della Terra	$5.8\ 10^{33}$Js
Rotore di un elicottero(320giri/min)	$5\ 10^{4}$Js
Ruota automobile (90 Km/h)	10^{2}Js
Ventilatore elettrico	1Js
frisbee	10^{-1}Js
Piccolo giroscopio	10^{-1}Js
Disco fonografico (33.3giri/min)	$6\ 10^{-3}$Js
Proiettile di fucile a canna rigata	$2\ 10^{-3}$Js
Moto orbitale dell' elettrone in un atomo	$1.05\ 10^{-34}$Js
Spin dell' elettrone	$0.53\ 10^{-34}$Js

Esempio

Trovare il momento angolare di una massa puntiforme che si muove su una **circonferenza di raggio r** (nel piano x,y) con velocità angolare ω.



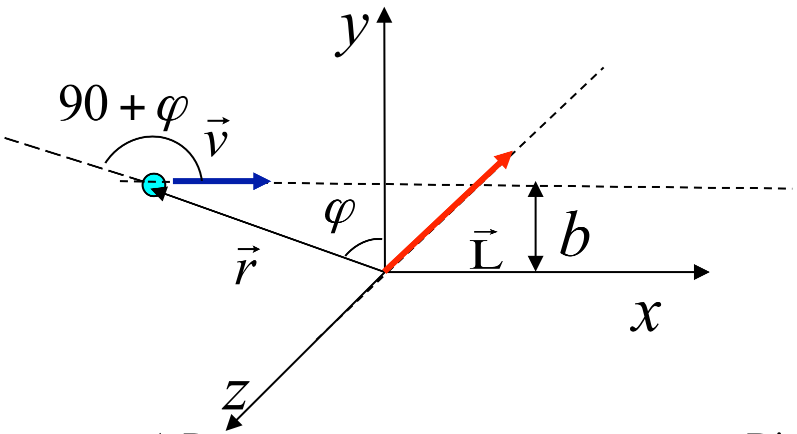
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = r\,m\,v\,\vec{k}$$

$$\vec{L} = mr^2\omega\vec{k}$$

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega}$$

Esempio

Trovare il momento angolare, rispetto all' origine, di una particella che si muove con velocità costante su una linea retta, parallela all' asse x, distante b dall'origine.

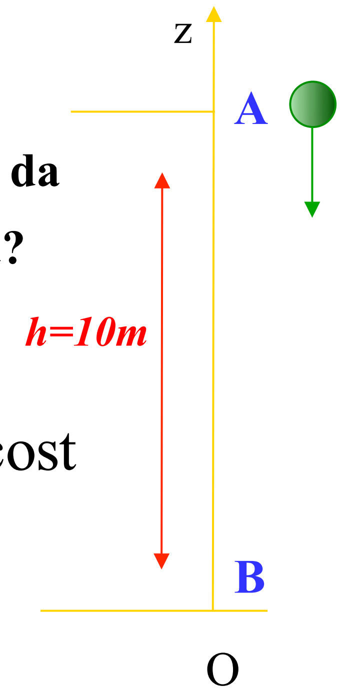


$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = -r\,m\,v\sin(90 + \varphi)\vec{k}$$

$$\vec{L} = -r\,mv\cos\varphi\,\vec{k}$$

$$\vec{L} = -mvb\vec{k}$$

Esercizio Conservazione energia meccanica



Un corpo di massa m=10 kg, è lasciato cadere con velocità iniziale nulla da un'altezza di 10 m. Quanto vale la velocità poco prima che raggiunga terra?

Dal teorema di conservazione dell'energia meccanica: $E_m = E_k + E_p = \text{cost}$

$$E_{p,A} - E_{p,B} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

$z_A = h = 10$ m $v_A = 0$

$z_B = 0$ $v_B = ?$

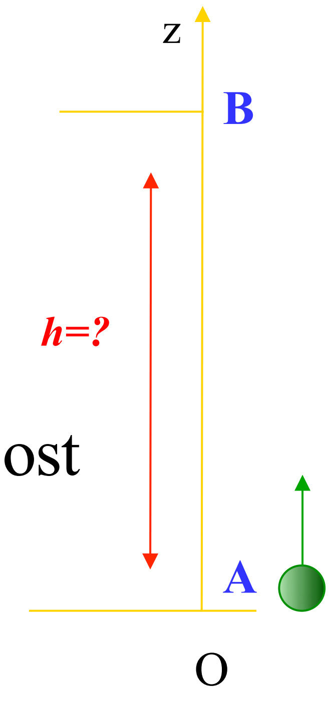
$$mgz_A - \cancel{mgz_B} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}\cancel{mv_A^2}$$

=0, perché $z_B = 0$ =0, perché $v_A = 0$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh} \Rightarrow v_B = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 10} = 14\frac{m}{s}$$

Esercizio Conservazione energia meccanica

Un corpo di massa m=10 kg, da terra viene tirato verso l'alto con velocità v=14 m/s. Che altezza raggiunge?



Dal teorema di conservazione dell'energia meccanica: $E_m = E_k + E_p = \text{cost}$

$$\Downarrow$$

$$E_{p,A} - E_{p,B} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

$$\Downarrow$$

$z_A=0$ $v_A=14\text{m/s}$

$z_B=?$ $v_B=0$

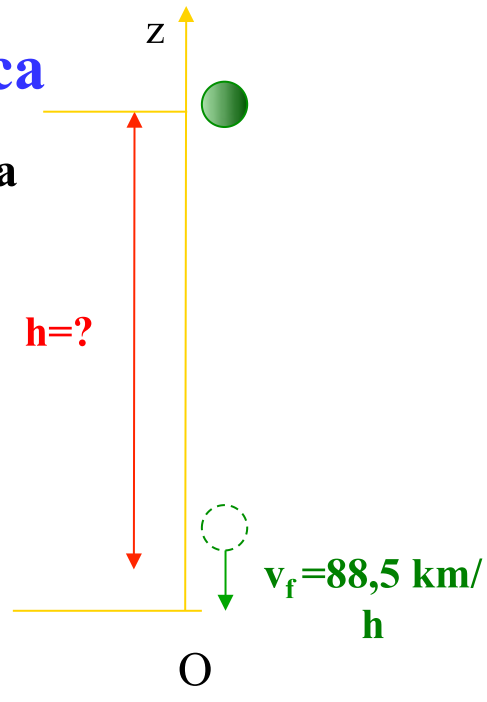
$$mgz_A - mgz_B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

$=0$, perché $z_A = 0$ $=0$, perché $v_B = 0$

$$\cancel{m}gz_B = \frac{1}{2}\cancel{m}v_A^2 \Rightarrow z_B = \frac{v_A^2}{2g} \Rightarrow z_B = \frac{14^2}{2 \cdot 9.8} = 10\text{m}$$

Esercizio Conservazione energia meccanica

Da che altezza deve cadere un corpo di m=1300 kg per avere una velocità finale di 88,5 km/h?



$$v_f = 88{,}5\frac{km}{h} = 88{,}5\frac{1000}{3600}\frac{m}{s} = 24{,}58\frac{m}{s}$$

Dal teorema di conservazione dell'energia meccanica:

$$E_{p,in} + E_{k,in} = E_{k,f} + E_{p,f}$$

$$\Downarrow$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$h = \frac{v_f^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{24{,}58^2}{2 \cdot 9.8} = 30{,}8m$$

La carrucola

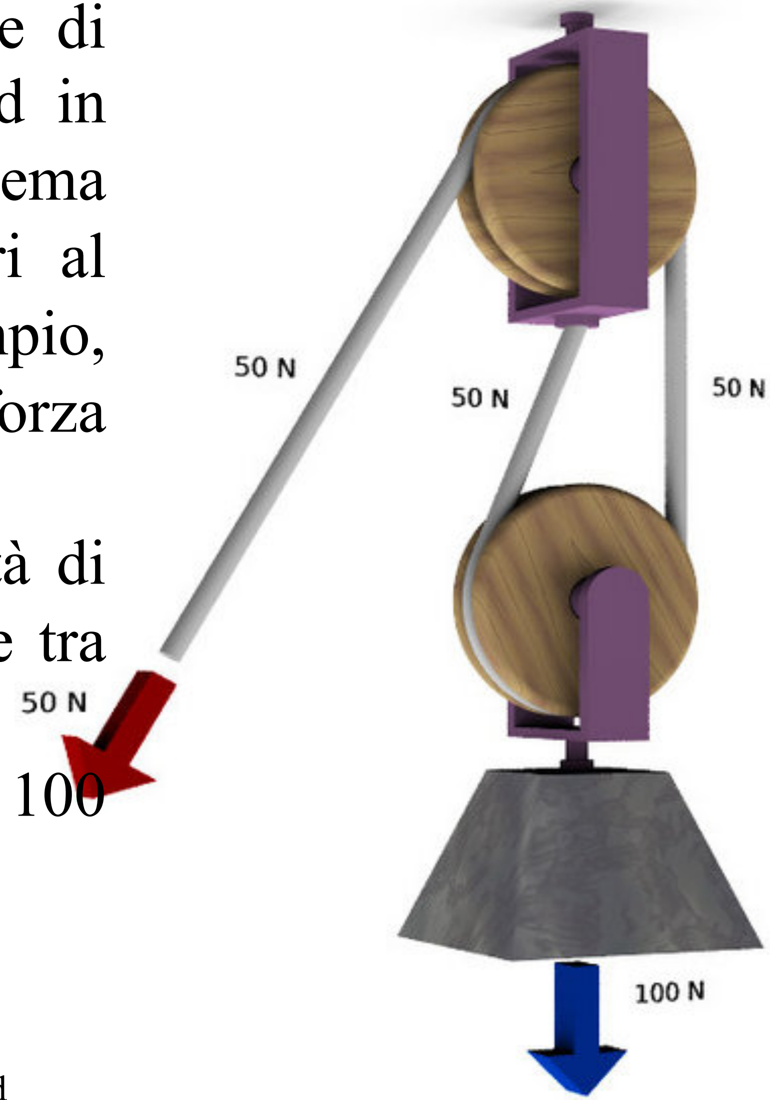
Una carrucola composta è un insieme di due o più carrucole, in parte fisse ed in parte mobili. Il vantaggio di questo sistema è di avere un rapporto di forze pari al numero di carrucole presenti. Per esempio, se ho due ruote, il rapporto tra la forza sollevata e la forza applicata è di 2 a 1.

Lo stesso rapporto si ha tra la velocità di trazione e la velocità di sollevamentoe tra gli spazi percorsi

Il Lavoro fatto per sollevare il peso di 100 N di 1 m è

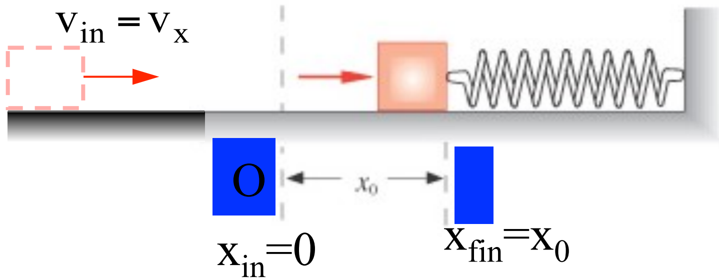
50N ·2m=100 J

(devo tirare il doppio di corda)



Esercizio Conservazione energia meccanica

Un corpo di massa m=10kg viaggia con velocità v_x=14m/s contro una molla, sapendo che K= 7000N/m, di quanto si deforma, la molla (spostamento x_0 dal punto di riposo)?



Dal teorema di conservazione dell'energia meccanica:

$$E_{p,in} + E_{k,in} = E_{k,f} + E_{p,f}$$

$$\frac{1}{2}Kx_{in}^2 + \frac{1}{2}mv_{in}^2 = \frac{1}{2}Kx_{fin}^2 + \frac{1}{2}mv_{fin}^2$$

=0, perché $x_{in} = 0$

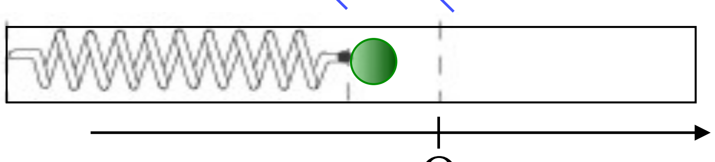
=0, perché $v_{fin} = 0$

$$\frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}Kx_0^2 \Rightarrow x_0^2 = \frac{mv_x^2}{K} = \frac{10\cdot 196}{7000} = 0,28 \quad x_0 = 0,52\text{m}$$

Inizialmente l'energia potenziale elastica è nulla

Nello stato finale l'energia cinetica è nulla. Tutta l'energia cinetica si trasforma in energia potenziale elastica

Esercizio Conservazione energia meccanica

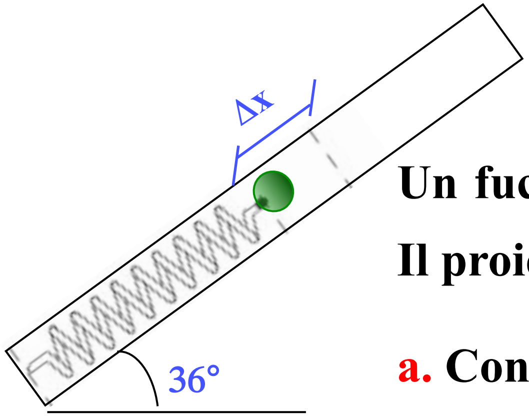


La molla di un fucile è compressa di Δx=3,2cm e spara un proiettile di massa m=12 g. Sapendo che la costante elastica della molla è di k=750 N/m, determinare con quale velocità esce il proiettile

$$\left(\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{=0,\ \text{perché } v_{in}=0}+\frac{1}{2}kx^2\right)_{in}=\left(\frac{1}{2}mv^2+\underbrace{\frac{1}{2}kx^2}_{=0,\ \text{perché } x_{fin}=0}\right)_{fin} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \Rightarrow v=\sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x$$

$$v=\sqrt{\frac{750}{12\cdot 10^{-3}}}0{,}032=8\frac{m}{s}$$

Esercizio **Conservazione energia meccanica**

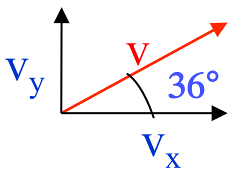


Un fucile, inclinato di $\theta=36°$, spara un proiettile di massa $m=79{,}4g$. Il proiettile raggiunge un'altezza massima di $h=2m$.

a. Con quale velocità esce il proiettile?

b. Sapendo che la costante elastica della molla del fucile è di $k=726{,}8\ N/m$, calcolare di quanto era compressa la molla.

Sol.: **a)**



$$mgh_{max} = \frac{1}{2}mv_y^2 \Rightarrow v_y = \sqrt{2gh_{max}} = \sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 2} = 6{,}26\frac{m}{s}$$

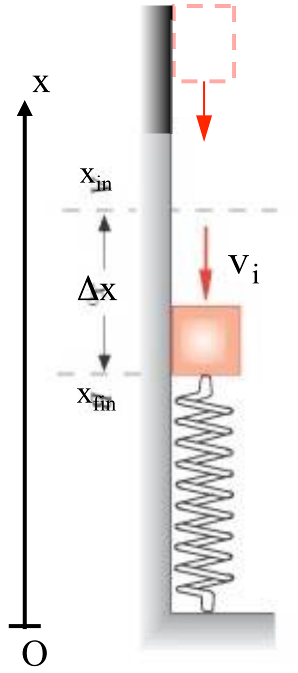
$$v_y = v\cdot sen36° \Rightarrow v = \frac{v_y}{sen36°} = 11\frac{m}{s}$$

b)

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}79{,}4\cdot 10^{-3}(11)^2 = \frac{1}{2}726{,}8(\Delta x)^2 \Rightarrow (\Delta x)^2 = 12\cdot 10^{-3}m^2$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta x = 11cm$$



Esercizio **Conservazione energia meccanica**

Un corpo di massa m=0,263kg cade su una molla di costante elastica k=252N/m che si accorcia di Δx=11,8cm prima che il corpo si fermi.

a. Calcolare il lavoro fatto dalla forza elastica ed il lavoro della forza peso da quando il corpo arriva sulla molla.

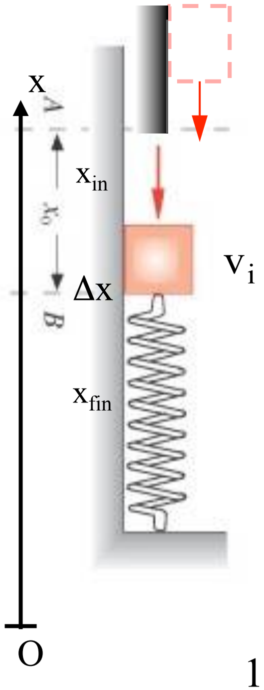
b. Calcolare il valore di $v_{i,1}$, corrispondente alla velocità del corpo appena prima di colpire la molla

c. Se poco prima di colpire la molla il corpo viaggia con $v_{i,2}= 2v_{i,1}$, di quanto si comprime la molla?

$$L_{elastica} = \frac{1}{2}k\left(x^2_{in} - x^2_{fin}\right) = -\frac{1}{2}k\Delta x^2 = -\frac{1}{2}252(0,118)^2 = -1,75J$$

$$L_{gravità} = -mg(x_{fin} - x_{in}) = -mg(-\Delta x) = mg\Delta x = 0,263\cdot 9,8\cdot 0,118 = 0,304J$$

Lavoro forza elastica è negativo infatti forza e spostamento sono antiparalleli, quello della forza di gravità positivo perché forza e spostamento sono paralleli



Esercizio – continuazione

Sol.:

b)

$$\Delta E_{cinetica} = L_{totale}$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_{i,1}^2 = -\frac{1}{2}k\Delta x^2 + mg\Delta x$$

=0 perché il corpo alla fine è fermo

$$-\frac{1}{2}mv_{i,1}^2 = -\frac{1}{2}k\Delta x^2 + mg\Delta x \Rightarrow \frac{1}{2}mv_{i,1}^2 = +\frac{1}{2}k\Delta x^2 - mg\Delta x$$

$$\frac{1}{2}0{,}263v_{i,1}^2 = +\frac{1}{2}252(0{,}118)^2 - 0{,}263 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}118 \Rightarrow v_{i,1}^2 = 10{,}996 \Rightarrow v_{i,1} = 3{,}31\frac{m}{s}$$

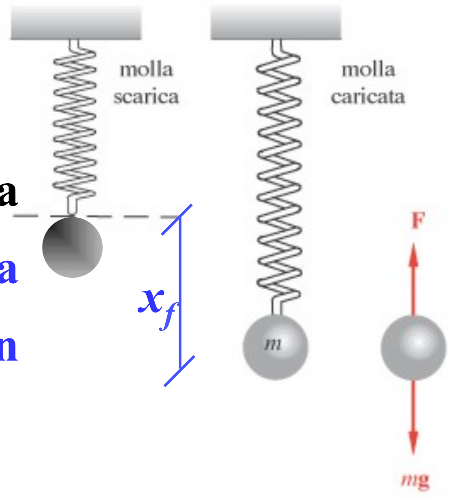
c) Se $v_i = v_{i,2} = 2v_{i,1}$,

$$\frac{1}{2}mv_{i,2}^2 = +\frac{1}{2}k\Delta x^2 - mg\Delta x \Rightarrow \frac{1}{2}0{,}263(2 \cdot 3{,}31)^2 = +\frac{1}{2}252(\Delta x)^2 - 0{,}263 \cdot 9{,}8 \cdot \Delta x$$

$$126(\Delta x)^2 - 2{,}57\Delta x - 5{,}8 = 0 \Rightarrow \Delta x = \frac{2{,}57 \pm \sqrt{(2{,}57)^2 + 4 \cdot 126 \cdot 5{,}8}}{2 \cdot 126} \qquad \Delta x = \frac{2{,}57 \pm 54{,}1}{252}$$

$$\Delta x = 0{,}225m = 22{,}5cm$$

Esercizio Lavoro



Una molla è appesa verticalmente come è mostrato in figura. Con la mano la massa è fatta scendere lentamente con v costante fino alla massima elongazione, poi viene tolta la mano e la massa rimane in equilibrio. Sapendo che *$m = 10kg$ e $x_f = 0,14m$*

Calcolare: ***a.Lavoro della forza di gravità***

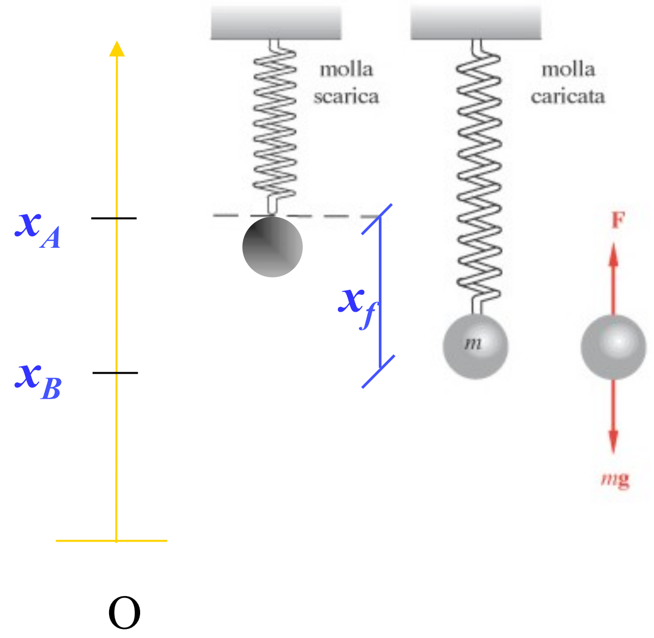
b. Lavoro della forza elastica

c.Lavoro della mano

Alla fine il corpo è in equilibrio $\Rightarrow$ $F_{peso} + F_{elastica} = 0$ $\Rightarrow$ $mg - kx_f = 0$

$$k = \frac{mg}{x_f} = \frac{10 \cdot 9,8}{0,14} = 700\frac{N}{m}$$

Esercizio Lavoro - continuazione



a. Lavoro della forza di gravità

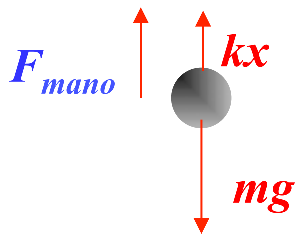
$$L_{gravità} = -\Delta E_p \quad = -mg(x_B - x_A) = mgx_f$$

$$L_{gravità} \quad = 10 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}14 \qquad = 13{,}72 \ \ J$$

b. Lavoro della forza elastica

$$L_{elastica} = -\Delta E_{el} = -\frac{1}{2}k(x_A - x_B)^2 = -\frac{1}{2}kx_f^{\ 2}$$

$$L_{elastica} \ = -\frac{1}{2} \cdot 700 \cdot 0{,}14^2 \qquad = -6{,}86 \ \ J$$



b. Lavoro della mano

Durante lo spostamento la velocità è costante $\Rightarrow F_{mano} + F_{elastica} + F_{peso} = 0 \Rightarrow F_{mano} = kx - mg$

$$L_{mano} = \int_{x_A}^{x_B} F_{mano}dx \quad = \int_0^{x_f} (kx - mg)dx = \left[\frac{1}{2}kx^2 - mgx\right]_0^{x_f} = 6{,}86 - 13{,}72 \quad = -6{,}86J$$

Esercizio **Un punto è lanciato con velocità v_0, lungo una guida circolare e liscia di raggio R che giace in un piano verticale (v figura) . Calcolare la velocità e la reazione del vincolo in B e C. Quale è il valore minimo di v_0 affinchè il punto arrivi in C senza staccarsi dalla guida ?** **applico la conservazione dell'energia ponendo l'altezza h_A =0**

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

in B h=R $\Rightarrow$ $v_B = \sqrt{v_0^2 - 2gR}$

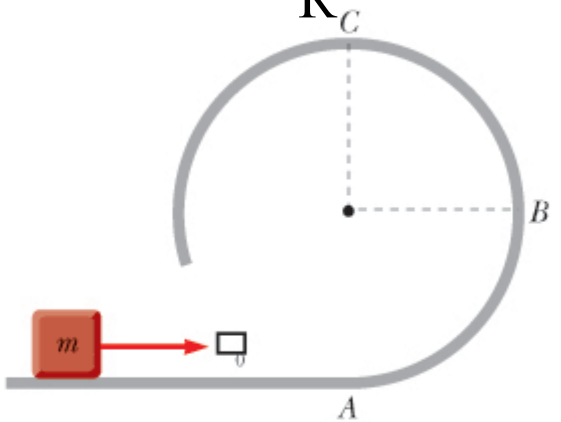
in C h=2R $\Rightarrow$ $v_C = \sqrt{v_0^2 - 4gR}$

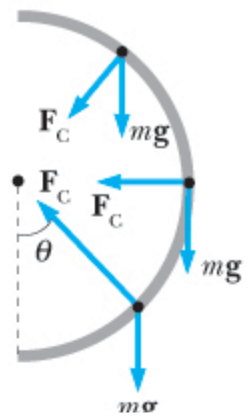
reazione è massima in A e decresce andando verso C

Infatti lungo la normale ho in ogni punto: $\vec{F}_N = \vec{N} + m\vec{g} = m\frac{v^2}{R}\vec{u}_N$

$$N_A - mg = m\frac{v_0^2}{R} \Rightarrow N_A = m\frac{v_0^2}{R} + mg \quad \text{in B} \quad N_B - 0 = m\frac{v_B^2}{R} \Rightarrow N_B = m\frac{v_B^2}{R} = m\frac{v_0^2}{R} - 2mg$$

$$N_C + mg = m\frac{v_c^2}{R} \Rightarrow N_c = m\frac{v_c^2}{R} - mg = m\frac{v_0^2}{R} - mg - 4mg = m\frac{v_0^2}{R} - 5mg$$





valore minimo di v_0 è per N_C=0 (N_C mai negativo)

$$m\frac{v_0^2}{R} = 5mg \Rightarrow v_0 = \sqrt{5gR}$$