Dinamica I

Dinamica del punto

La **dinamica** del punto materiale si occupa di studiare gli effetti che l'applicazione di una **forza** produce sul moto di un oggetto le cui dimensioni siano trascurabili.

Da sempre è stato evidente che la variazione di stato di quiete o di moto di un corpo dipende dalle **interazioni** che esso ha **con altri oggetti** o con **l'ambiente esterno**.

Nel linguaggio comune ci si riferisce quasi sempre a queste interazioni come a **forze che agiscono sul corpo**.

Dinamica del punto

A cavallo fra i secoli XVII e XVIII, Isaac Newton compì un importante passo nella comprensione dei fenomeni fisici, stabilendo una relazione che lega l'accelerazione subita da un oggetto alle forze che agiscono su di esso.

Questa relazione è alla base di tutta la meccanica newtoniana, che oggi sappiamo essere un caso limite di teorie più generali (la meccanica relativistica e la meccanica quantistica), ma che è utile per descrivere gran parte dei fenomeni meccanici che avvengono in condizioni "*standard*" ovvero quando:

- ***non* siano implicate *velocità prossime a quella della luce***
- ***non* siano implicati oggetti di *massa comparabile o inferiore a quella degli atomi.***

Principi della dinamica

La dinamica newtoniana si fonda su tre principi

(detti anche "le tre leggi di Newton"),

che sono giustificati da una vasta attività sperimentale; le loro conseguenze descrivono correttamente un gran numero di fenomeni.

I tre principi sono i seguenti:

- ✓ **Principio di inerzia:**

  definisce cosa succede se non ci sono forze agenti su un corpo;
- ✓ **(II) Legge di Newton:**

  definisce cosa succede quando su un corpo agiscono delle forze;
- ✓ **Principio di azione e reazione:**

  definisce cosa succede se un corpo esercita una forza su un altro corpo.

Primo principio della dinamica: il principio di inerzia

Un corpo non soggetto a forze, non subisce cambiamenti di velocità, ovvero mantiene il suo stato di quiete, se era in quiete ($v=0$) o di moto rettilineo uniforme ($v=\text{costante}\neq 0$)

Questo principio, noto come principio di inerzia, ci dice che lo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme sono dinamicamente equivalenti.

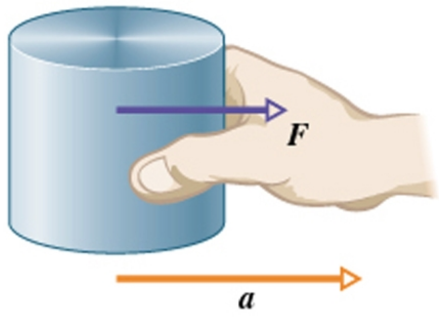
Se su un corpo non agisce nessuna forza, la sua velocità non può cambiare, ossia il corpo non può accelerare. In altre parole, se il corpo è in stato di quiete, vi resterà; *se si sta muovendo*, continuerà a farlo con la *stessa velocità (in modulo e direzione). Ad esempio* per avere moto circolare uniforme ho quindi bisogno di una forza.

La prima legge vale non solo quando il corpo non è sottoposto ad alcuna forza, ma anche quando la somma di tutte le forze agenti su di esso (la forza risultante) è nulla.

Forze

***La forza è una grandezza che esprime e misura l'interazione tra sistemi fisici*.**

Nel principio di inerzia è implicitamente contenuta l'idea che la variazione di velocità in modulo o direzione è dovuta all'azione di una forza



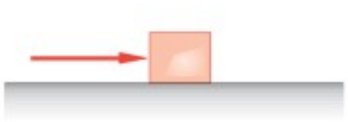
L'effetto di una forza è quello di imprimere un'accelerazione ad un oggetto.

Dall'esperienza possiamo dedurre che le forze possono avere diversa intensità (se spingiamo un oggetto più o meno "forte" otteniamo un'accelerazione maggiore o minore…).

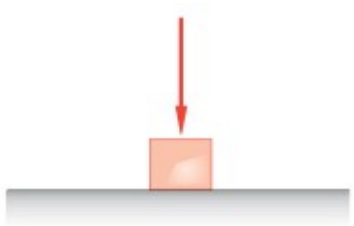
Forze

Intuitivamente si può affermare che alla nozione di forza è associata oltre alla nozione di intensità, quella di direzione.

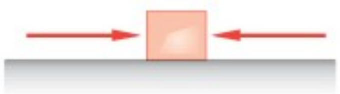
L'effetto di una forza cambia con la direzione: l'accelerazione ha la stessa direzione della forza (se spingiamo un mobile in avanti, questo non si sposta di lato…). Lo stesso vale per il verso nel quale applichiamo la forza.



L'effetto dell'applicazione della forza è un moto



L'effetto dell'applicazione della forza non è un moto ma una deformazione del corpo

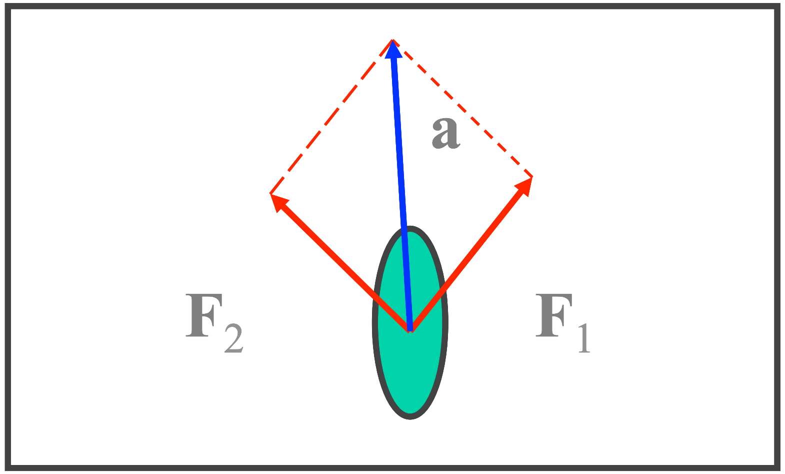


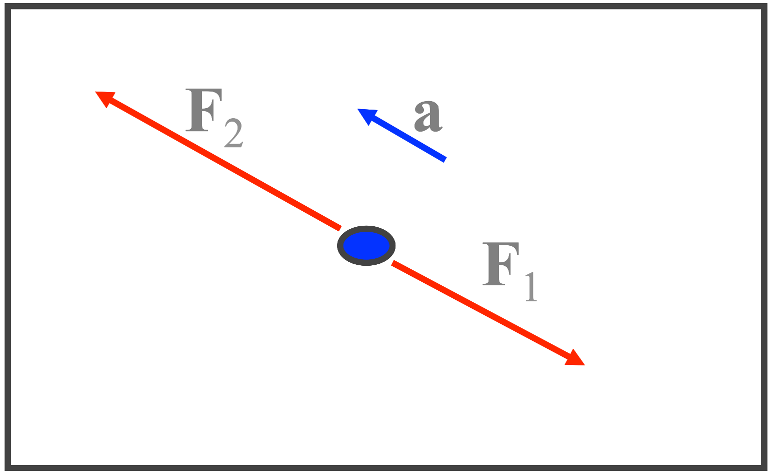
Non si manifesta alcun moto (→ concetto di equilibrio)

Dall'esperienza → la forza è una quantità di tipo vettoriale.

Forze

La natura vettoriale delle forze si manifesta nel modo in cui esse si combinano fra loro:





La somma vettoriale di tutte le forze agenti su un corpo è chiamata **risultante delle forze** e viene indicata con l'espressione:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{ris}$$

Massa

Per descrivere il comportamento dinamico di un punto materiale

occorre conoscere la sua massa

L'esperienza ci dice che se vogliamo imprimere la stessa accelerazione a oggetti diversi, l'intensità della forza da applicare deve essere diversa

(per trainare un treno occorre un locomotore, per trainare una slitta una persona…).

Normalmente si associa all'intensità della forza necessaria per muovere un certo oggetto la definizione di "massa" (tanto più l'oggetto è "*massiccio*", più forza occorre per spostarlo).

La massa di un corpo è anche definita ***massa inerziale***, in quanto ***esprime l'inerzia del corpo, ovvero la sua resistenza a variare il proprio stato di moto, cioè a modificare la velocità***

L'unità di misura SI della massa è il kilogrammo (kg).

La massa è una caratteristica intrinseca del corpo che mette in relazione forza applicata e accelerazione che ne risulta.

II principio della dinamica: la legge di Newton

La formulazione quantitativa del legame tra la forza e lo stato del moto è data dalla legge di Newton. Newton raccolse tutte le osservazioni sperimentali in un'unica legge che lega fra loro la risultante di tutte e solo le forze esterne (di qualsivoglia natura) agenti su un corpo, con l'accelerazione ad esso impressa.

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}$$

la forza F risultato dell'***interazione del corpo con l'ambiente circostante, determina l'accelerazione del punto materiale, cioè la variazione della sua velocità nel tempo; m rappresenta la massa inerziale del corpo***

La legge di Newton mette in evidenza che il rapporto tra la massa di un corpo e quella di un altro è uguale all'inverso del rapporto delle accelerazioni prodotte dalla stessa forza come si era visto negli esperimenti che hanno portato Newton a formulare la sua legge

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}$$

La legge di Newton e le sue componenti

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$ **dove:** $$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

La relazione vettoriale separata in componenti è:

$$\begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \\ F_z = ma_z \end{cases}$$ **dove:** $$\begin{cases} F_x = \sum_i F_{x,i} \\ F_y = \sum_i F_{y,i} \\ F_z = \sum_i F_{z,i} \end{cases}$$

Ciò significa che la componente dell'accelerazione lungo un asse è causata solo dalla somma delle componenti delle forze lungo quell'asse e non da componenti lungo gli altri assi.

in assenza di interazione con l'esterno, ovvero se il vettore *risultante* di *tutte* le forze agenti sul *punto materiale* è nullo, l'accelerazione a=0, e quindi la velocità è costante.
La legge di Newton contiene come caso particolare il principio di inerzia:

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{cost.}$$

Unità di misura di forza

Il secondo principio della dinamica dice anche quale sono

dimensioni e unità di misura delle forze:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$[F] = [M][L][T]^{-2}$$

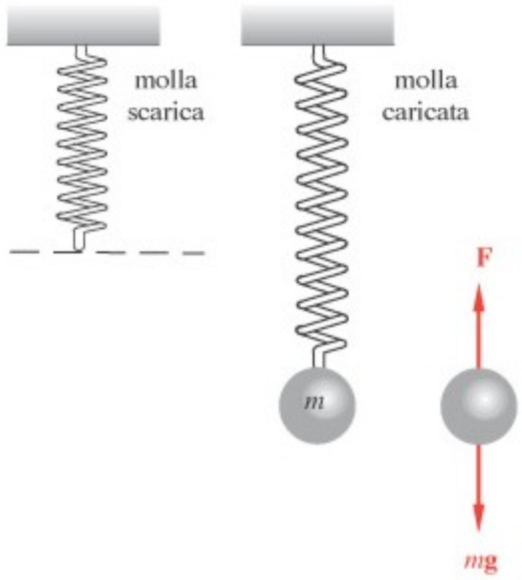
Dimensioni
Unità di misura

$$\frac{Kg \times m}{s^2} = N$$

N = **newton**

Il newton è l'unità di misura della forza

Una forza ha l'intensità di 1 N se imprime a un oggetto di massa 1 kg un'accelerazione di 1 m/s².



Misura statica delle forze

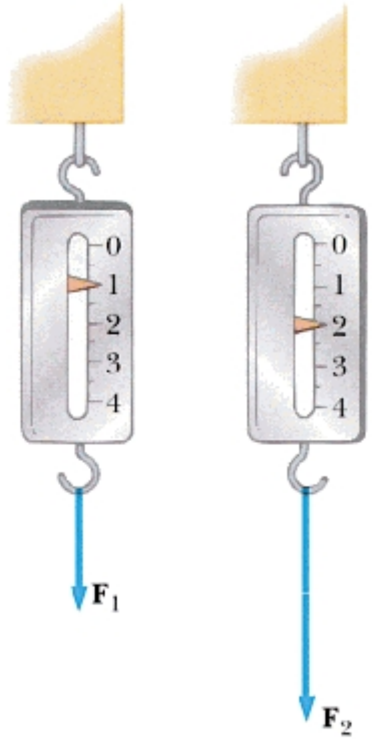
Lo strumento utilizzato per misurare le forze è il dinamometro.

Una molla allungata esercita una forza di richiamo che entro certi limiti di estensione rispetto da posizione di equilibrio, Δx, è proporzionale all'allungamento stesso.

$$\vec{F} = -k\Delta\vec{x}$$

Se si appende alla molla un corpo di massa *m*, che risente della forza di attrazione della terra mg, in condizioni di equilibrio la forza F sviluppata dalla molla eguaglia quella esercitata dalla terra, che attira il corpo.

***L'allungamento della molla è proporzionale alla forza applicata all'estremità della molla*.**

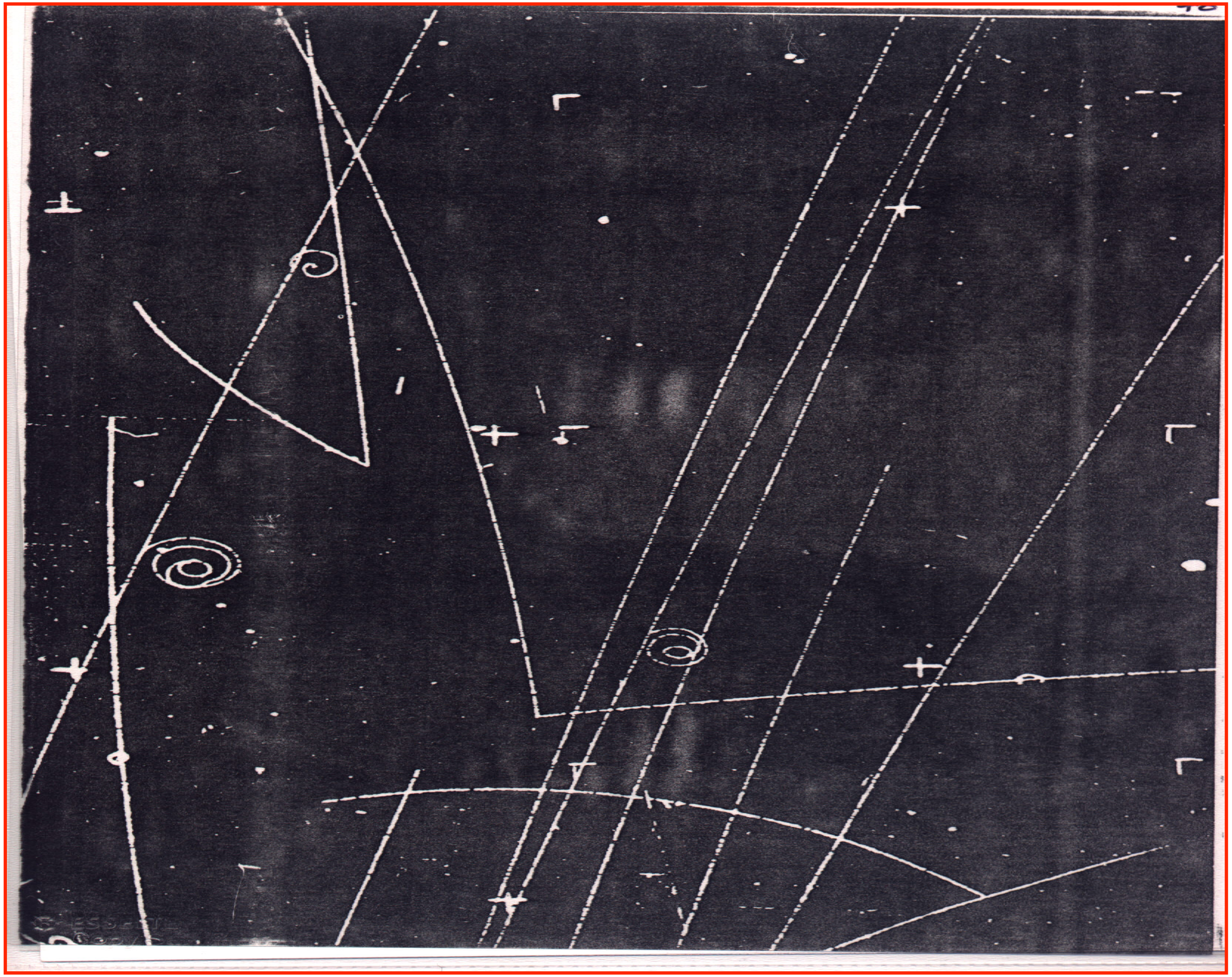


Intensità delle Forze: ordini di grandezza

Forza esercitata da Sole sulla Terra	$3.5\ 10^{22}$ N
Forza esercitata dalla Terra sulla Luna	$2\ \ 10^{20}$ N
Spinta di un vettore per satelliti	$3.3\ 10^{7}$ N
Trazione di un grosso rimorchiatore	10^{6} N
Spinta dei motori di un jumbo (B747)	$7.7\ 10^{5}$ N
Trazione di un locomotore	$5\ 10^{5}$ N
Forza esercitata dalla Terra su un' automobile	$1.5\ 10^{4}$ N
Forza di frenatura (automobile)	10^{4} N
Forza di interazione tra due protoni nel nucleo	10^{4} N
Forza di accelerazione su un' automobile	$7\ 10^{3}$ N
Forza esercitata dalla Terra su un uomo	$7.2\ 10^{2}$ N
Forza esercitata dalla Terra su 1 Kg	9.8 N
Forza esercitata dalla Terra su una mela	2 N
Forza esercitata dalla Terra su una moneta (100)	$3.2\ 10^{-2}$ N
Forza tra nucleo ed elettrone (idrogeno)	$8\ 10^{-8}$ N

Rapporti tra le intensità delle Quattro Forze Fondamentali note in natura:
(ordini di grandezza relativi)

forza	Agisce su	intensità	Raggio az.
gravitazionale	masse	10^{-38}	∞
debole	leptoni	10^{-6}	$<10^{-17}$ m
elettromagnetica	cariche elettriche	10^{-2}	∞
forte	adroni	1	10^{-15} m



$$\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$$

$\Lambda^0 \rightarrow \boxed{\pi^- p}$

$K^0 \rightarrow \boxed{\pi^- \pi^+}$

Dalla forza al moto

La II legge di Newton, legge fondamentale della dinamica, può anche essere scritta come:

$$\mathbf{F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2r}{dt^2}}$$

Da questa legge possono essere ricavate tutte le proprietà relative al moto del punto materiale ed in particolare l'andamento della *legge oraria r(t),* se si conoscano la funzione F(t) e le condizioni iniziali del moto.

Dalle caratteristiche della forza si deducono quelle del moto: nella relazione soprascritta se è noto il termine di sinistra (F) nota la massa si trova la a(t). Dall'espressione di a(t), si possono ricavare la v(t) e r(t).

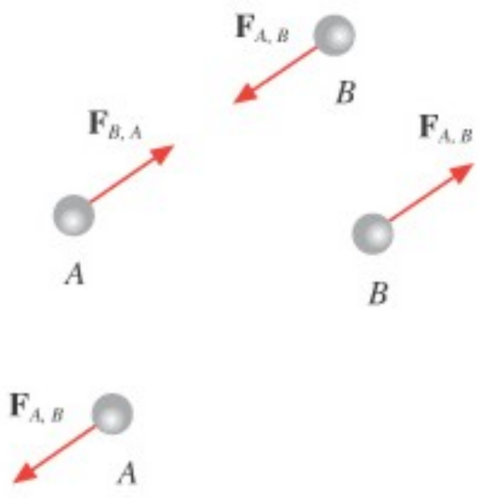
$$\vec{F} \longrightarrow \vec{r}(t)$$

NOTA: limiti di validità

La legge F=ma è valida solo se il moto è studiato in una particolare classe di sistemi di riferimento, *i sistemi di riferimento inerziali*

III principio della dinamica

Le forze si presentano sempre in coppia;
se il corpo A esercita una forza $F_{A,B}$ sul corpo B, il corpo B reagisce esercitando una forza $F_{B,A}$ sul corpo A.
Le due forze hanno la stessa direzione, lo stesso modulo e verso opposto, cioè sono uguali e contrarie

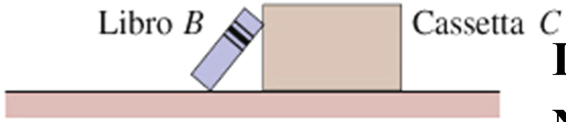


$$F_{A,B}=-F_{B,A}$$

Le due forze hanno la stessa retta di azione e possono essere attrattive o repulsive. Tale legge è anche detta ***principio di azione e reazione***

III principio della dinamica

Esempi



(a)

$$\boxed{\vec{\mathbf{F}}_{BC} = -\vec{\mathbf{F}}_{CB}}$$

Il libro B è poggiato sulla cassetta C. Per la terza legge di Newton, la forza F_{BC} esercitata dalla cassetta C sul libro B ha lo stesso modulo e direzione, ma verso opposto, rispetto alla forza F_{CB} esercitata su C da B.

N.B. Le forze di azione e reazione agiscono sempre su corpi diversi, altrimenti non si avrebbe mai accelerazione. In generale non sono equilibrate.

Quantità di moto

Si definisce quantità di moto di un punto materiale il vettore:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Utilizzando la quantità di moto, la relazione F=ma, si può scrivere come segue:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \Rightarrow \boxed{\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}}$$

Questa relazione è la forma più generale della legge di Newton, utilizzabile anche se la massa non è costante

Dimensioni $[p] = [M] \cdot [L] \cdot [T]^{-1}$

Unità di misura $Kg \cdot m \cdot s^{-1}$

Teorema dell'impulso

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \Longrightarrow \mathbf{F}dt = d\mathbf{p}$$

L'azione di una forza durante un tempo dt provoca una variazione infinitesima della quantità di moto del punto. In termini finiti integrando si ha:

$$\mathbf{J} = \int_0^t \mathbf{F}dt = \int_{p_0}^{p} d\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p_0} = \Delta\mathbf{p}$$

J è detto *impulso della forza*

Teorema dell'impulso: **l'impulso di una forza applicata ad un punto materiale provoca la variazione della quantità di moto**

$$\boxed{\int_0^t \mathbf{F}dt = \Delta\mathbf{p}}$$

$$\mathbf{J} = \Delta\mathbf{p} = m\Delta\mathbf{v} = m(\mathbf{v} - \mathbf{v_0})$$

Dalla relazione sopra riportata risulta evidente che se F è nulla Δp=0 e quindi p=costante.

Principio di conservazione della quantità di moto

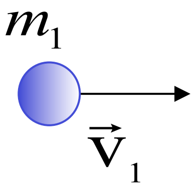
In assenza di forze applicata, la quantità di moto di un punto materiale rimane costante ovvero **la quantità di moto si conserva (urti)**

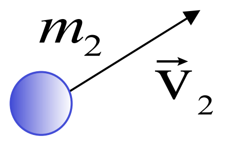
Il terzo principio e quantità di moto

Sia dato un sistema di due punti materiali interagenti: $\boxed{m_1, m_2, \vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2}$

Forza agente su m_1

$$\vec{F}_1 = \frac{d\vec{p}_1}{dt}$$





Forza agente su m_2

$$\vec{F}_2 = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

Per il principio di azione e reazione

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = -\frac{d\vec{p}_1}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) = 0$$

che esprime una importante legge di conservazione:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{costante}$$

In assenza di forze esterne, la quantità di moto totale di un sistema composto di 2 punti materiali soggetti solo alla loro mutua interazione rimane costante nel tempo

Indipendenza delle azioni simultanee

Se più forze F_i agiscono su un punto materiale: $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

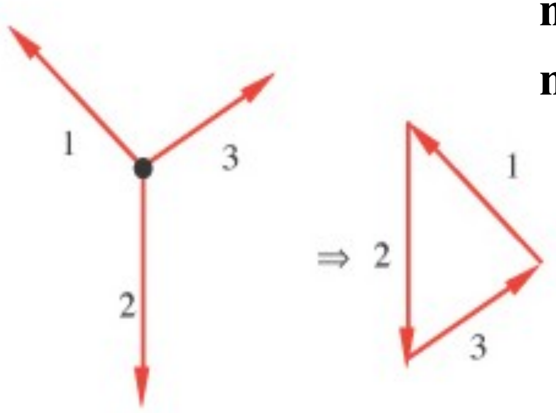
ciascuna agisce indipendentemente dalle altre comunicando al corpo un'accelerazione

$a_i = F_i/m$ ⟹ $a = \sum_i a_i = \sum_i \frac{F_i}{m}$

Si parla di indipendenza delle azioni simultanee

Dallo studio del moto del punto materiale si possono ottenere informazioni solo sulla risultante di tutte le forze in gioco e non sulle singole forze

In particolare affermare che la forza agente su un corpo è nulla, non significa necessariamente che sul punto non agiscano forze ma che la somma delle forze risultante è nulla.



Se $R = F_{ris} = 0$ ⟹ **Equilibrio statico**

Azione dinamica delle forze: le forze ed il moto

Quali forze possono produrre i moti studiati in cinematica?

Moto rettilineo uniforme

- **v = costante** ⟹ **F= 0**
- **a= 0**

Moto rettilineo uniformemente accelerato

- **a = costante** ⟹ **F= costante = a/m**

Moto piano curvilineo

- $\mathbf{a} = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_N$ ⟹ $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_T + m\mathbf{a}_N = m\frac{dv}{dt}\mathbf{u}_T + m\frac{v^2}{R}\mathbf{u}_N$

Componente tangenziale della forza: **determina la variazione del modulo della velocità**

Forza centripeta : **ortogonale alla traiettoria, è ≠0 se il moto è curvilineo**

Forza peso

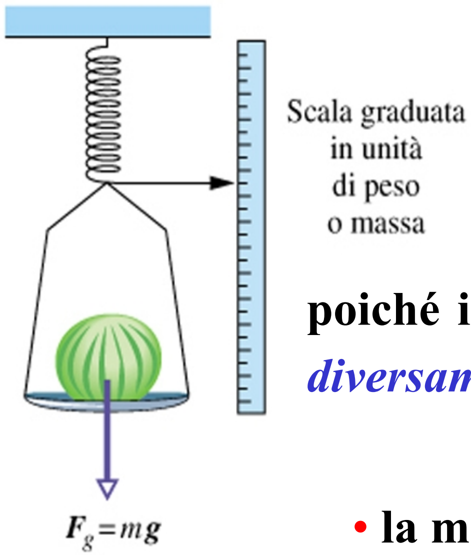
La forza più comune nella nostra esperienza quotidiana è quella dovuta all'attrazione gravitazionale esercitata dalla Terra su un corpo: questa forza si chiama peso del corpo. Sperimentalmente si osserva che tutti i corpi, nello stesso luogo, qualunque sia la massa inerziale, assumono, se lasciati liberi, la stessa accelerazione diretta verticalmente verso il suolo il cui modulo, che varia leggermente da luogo a luogo della Terra, vale in media

$g = 9{,}8\ ms^{-2}$

$$\boxed{P = ma = mg}$$

La forza peso risulta direttamente proporzionale (attraverso l'accelerazione di gravità g) alla massa del corpo.

La proporzionalità tra massa e peso suggerisce che il confronto tra due masse si può fare confrontando le rispettive forze peso



$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

poiché il valore di g non è lo stesso per tutti i punti della Terra *il peso, diversamente dalla massa, non è una proprietà intrinseca del corpo.*

- la massa è uno scalare
- il peso è un vettore

Il peso di una persona non è ad es. 50 Kg

ma 50 $_*$g N →50 *9,8 N

Forza peso

Il peso misurato sulla Terra è diverso da quello misurato per esempio sulla Luna (a causa della diversa accelerazione di gravità: $g_{LUNA} = 1.625$ m/s^2).

La massa invece è la stessa.

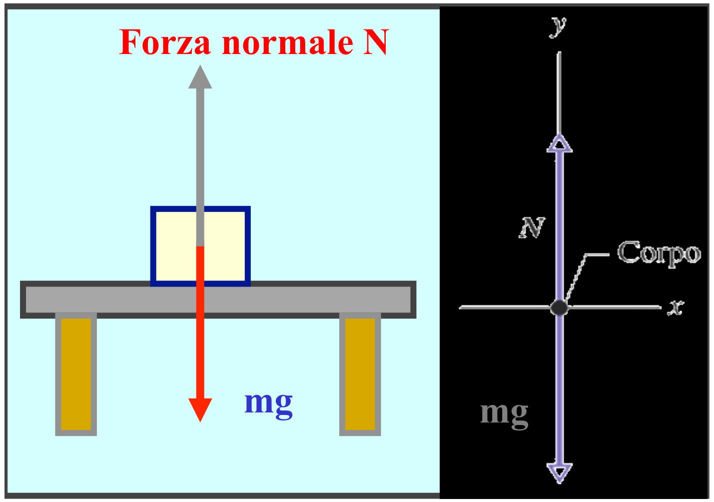
Reazioni vincolari

Supponiamo di avere un oggetto appoggiato su un piano.

L'oggetto non subisce nessuna accelerazione in direzione perpendicolare al piano.

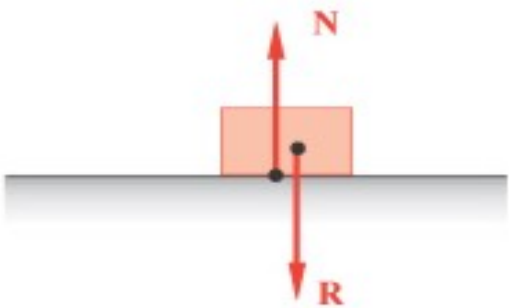
Tuttavia su di esso agisce la forza peso.

Anche se noi premiamo sull'oggetto dall'alto verso il basso, entro certi limiti, l'oggetto non si muove. Il secondo principio della dinamica ci dice che deve esistere allora una forza che chiamiamo N tale che in questo caso particolare soddisfa l'espressione:

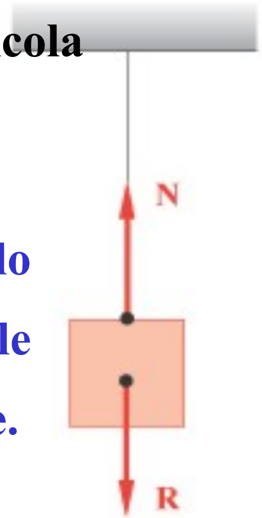


$$\boxed{N + mg = ma \rightarrow (a = 0) \rightarrow N = -mg}$$

La forza è detta reazione vincolare, è sempre ortogonale al vincolo (cioè all'oggetto che costituisce impedimento al moto); si calcola caso per caso a seconda del problema

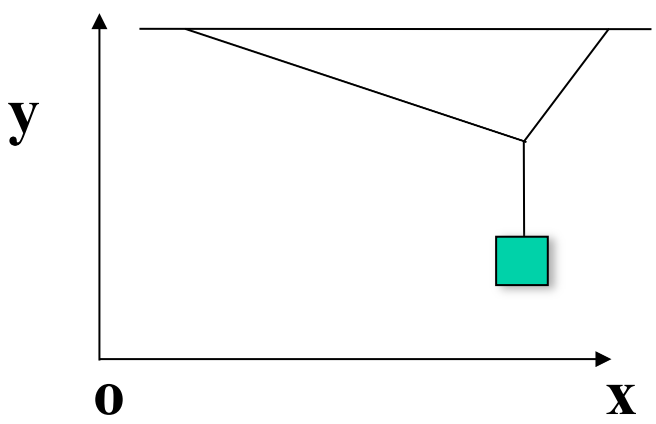


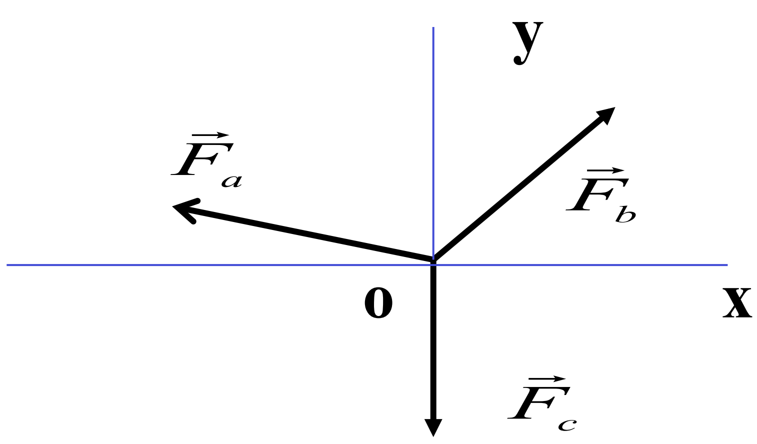
se l'accelerazione nella direzione ortogonale al vincolo è nulla, allora N ha modulo tale da annullare le componenti delle altre forze aventi la stessa direzione.



Come si applica la II legge. Approccio ai problemi di dinamica

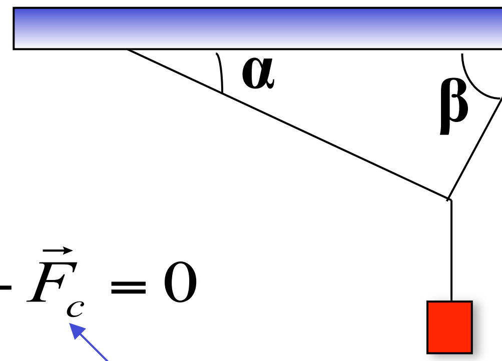
- **identificazione del corpo al cui moto si riferisce il problema**
- **definizione dei *corpi* che costituiscono l' ambiente**
- **scelta opportuna del sistema di riferimento (inerziale)**
- **disegnare il diagramma delle forze**
- **applicare la II legge della dinamica**





Esempio

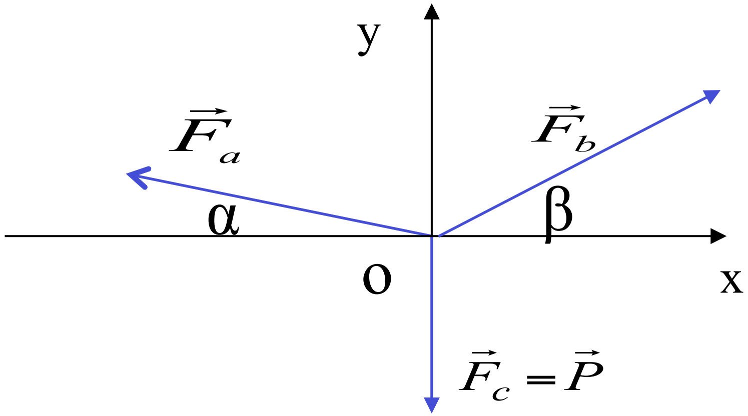
il corpo in figura è in equilibrio. Quali sono le forze in gioco se la massa è 1 KG?



β=45°
α=30°

$$\vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c = 0$$

Perché il corpo è in quiete



Lungo l'asse x

Lungo l'asse y

$$\begin{cases} \left(\vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c\right)\cdot \hat{i} = 0 \\ \left(\vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c\right)\cdot \hat{j} = 0 \end{cases}$$

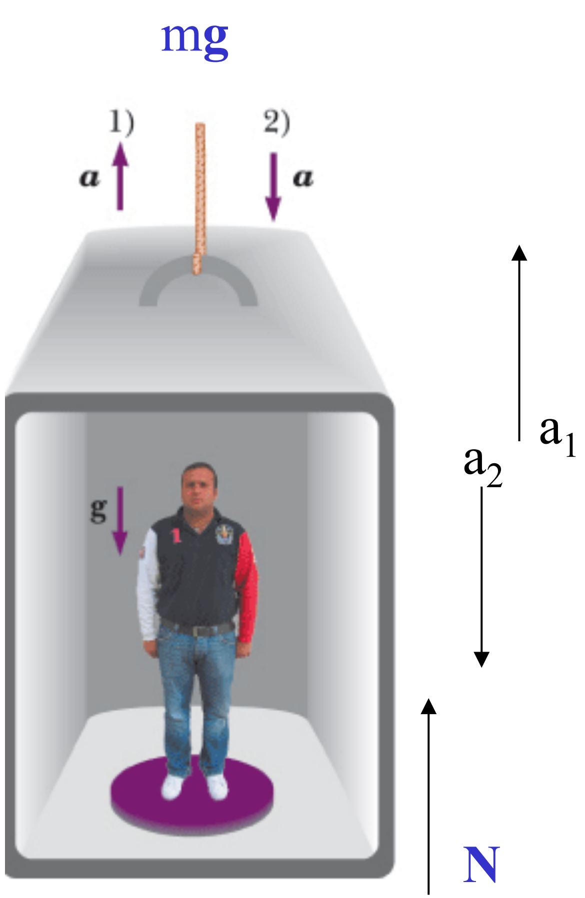
$$\begin{cases} \left(F_a \cos 150^\circ + F_b \cos 45^\circ + F_c \cos 90^\circ\right) = 0 \\ \left(\vec{F}_a \mathrm{sen} 30^\circ + F_b \mathrm{sen} 45^\circ + F_c \mathrm{sen}(-90^\circ)\right) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -F_a \cos 30^\circ + F_b \cos 45^\circ = 0 \\ F_a \mathrm{sen} 30^\circ + F_b \mathrm{sen} 45^\circ - F_c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -F_a 0.886 + F_b 0.707 = 0 \\ F_a 0.5 + F_b 0.707 - 1\cdot 9{,}8 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} F_a = 0.8 F_b \\ (0.5\cdot 0.8 + 0.707) F_b = 9{,}8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} F_a = 7{,}1\mathrm{N} \\ F_b = 8{,}8\mathrm{N} \\ F_c = 9{,}8\mathrm{N} \end{cases}$$

Sensazione di peso (uomo su ascensore)

Quanto vale **N** se ascensore sale con $\mathbf{a_1}$= 3m/sec^2 e quanto se scende con $\mathbf{a_2}$ = 3m/sec^2

Massa uomo=70 kg :



Primo caso **a positiva**

$$N - mg = ma_1$$

$$N = mg + ma_1 = 70 \cdot (9{,}8 + 3) = 70 \cdot 12{,}8 = 896N$$

Secondo caso **a negativa**

$$N - mg = -ma_2$$

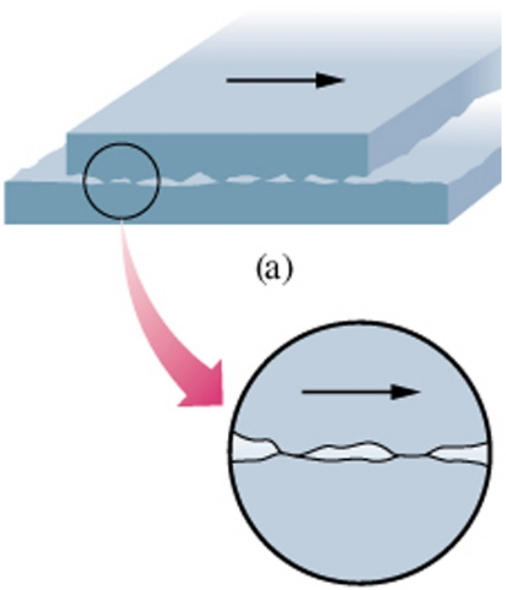
$$N = mg - ma_2 = 70 \cdot (9{,}8 - 3) = 70 \cdot 6{,}8 = 476N$$

Attrito radente

Se sul pavimento è appoggiata una grande cassa e la si spinge con una forza orizzontale **F**, è possibile che la cassa non si muova affatto. La ragione è che il pavimento esercita una **forza di attrito radente statico** f_s, che equilibra la forza **F**.

Questa forza di attrito è dovuta ai legami che si stabiliscono tra le molecole della cassa e quelle del pavimento nei punti in cui le superfici sono in contatto molto stretto.

La forza di attrito statico può variare da zero ad una forza massima f_{smax}, a seconda della forza con cui si spinge; ***se la forza F è sufficientemente intensa, la cassa striscerà sul pavimento.***



Mentre la cassa striscia si creano e si rompono continuamente legami molecolari e si rompono piccoli frammenti delle superfici:

il risultato è una **forza di attrito radente dinamico** (o attrito cinetico) f_d che si oppone al moto.

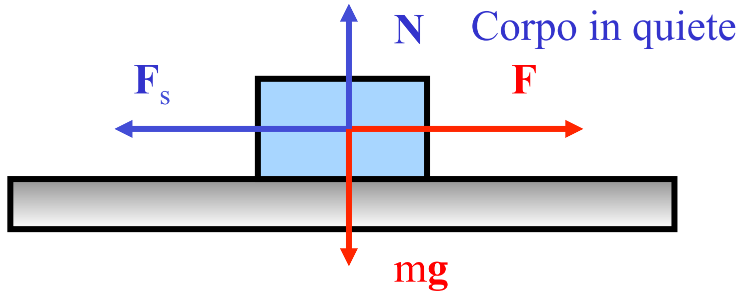
Perché la cassa continui a strisciare con velocità costante occorre esercitare una forza uguale ed opposta alla forza di attrito dinamico.

Attrito radente statico

Se si applica ad un corpo appoggiato su un tavolo, una forza F parallela al piano di appoggio. si osserva che il corpo entra in movimento per effetto di F solo se F è maggiore di $\mu_s N$

$F \leq \mu_s N$ **Condizione di quiete**

$F > \mu_s N$ **Condizione di moto**



dove: μ_s è un coefficiente adimensionale detto **coefficiente di attrito radente statico.**

Il vincolo è in grado di sviluppare una forza di attrito statico radente $\mathbf{F_s}$ uguale e contraria alla forza applicata **F** fino a quando F non supera il valore $\mu_s N$.

Dunque la forza di attrito statico $\mathbf{F_s}$ può variare fra zero e un valore massimo che è proporzionale alla reazione vincolare normale al piano su cui è appoggiato il corpo. E' sempre **tale da opporsi al moto**. Direzione e verso sono indicati in figura.

Attrito radente dinamico

Quando il corpo entra in movimento lungo il piano, si osserva una forza che si oppone al moto, la forza di attrito dinamico radente. Questa forza ha sempre **direzione uguale** a quella della **velocità** dell'oggetto, **verso contrario** e modulo **proporzionale** alla **reazione vincolare normale al piano** su cui si muove l'oggetto:

$$\mathbf{F_d} = -\mu_d N \mathbf{u}_v$$

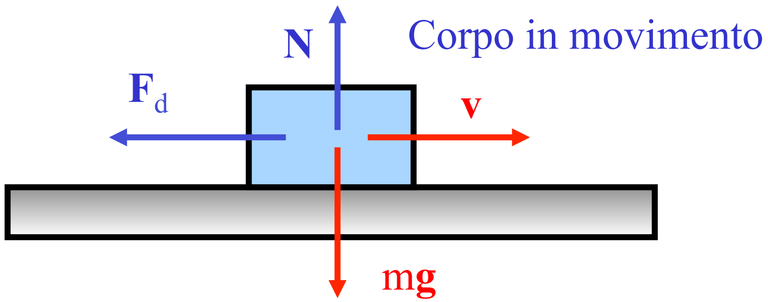
con u_v: versore con direzione e verso della velocità

$$|F_d| = \mu_d N$$

Dove: μ_d e' il coefficiente adimensionale detto coefficiente di attrito radente dinamico.

L'equazione del moto del punto soggetto a forza esterna F diviene: $\mathbf{F} + \mathbf{F_d} = \mathbf{F} - \mu_d N \mathbf{u}_v = m\mathbf{a}$

Lungo la direzione del moto: $F - \mu_d N = ma$



Sperimentalmente si trova che:

- **μ_d è minore μ_s;**
- per velocità comprese tra circa 1 cm/s e parecchi metri al secondo ***μ_d è praticamente costante;***
- **μ_d (come μ_s) dipende dalla natura delle superfici**, ma è indipendente dall'area (macroscopica) di contatto.

Coefficienti di attrito radente

Il coefficiente di **attrito statico** è in generale **maggiore** del coefficiente di **attrito dinamico**. Alcuni esempi:

Superfici	μ_s	μ_d
Legno su pietra	0.7	0.3
Gomma su cemento asciutto	0.65	0.5
Gomma su cemento bagnato	0.4	0.35
Gomma su ghiaccio	0.2	0.15
Acciaio su acciaio asciutto	0.15	0.12

Questi valori sono indicativi, infatti i coefficienti di attrito **dipendono** molto dallo **stato delle superfici, dalla temperatura, dall'umidità**, ecc..

Vengono valutati sperimentalmente

Gli attriti sono uguali a tutte le altre forze?

Abbiamo visto che gli attriti, se presenti, vanno considerati forze da includere nell'equazione del moto come tutte le altre. Tuttavia c'è una differenza sostanziale tra gli attriti e le altre forze che va sottolineata:

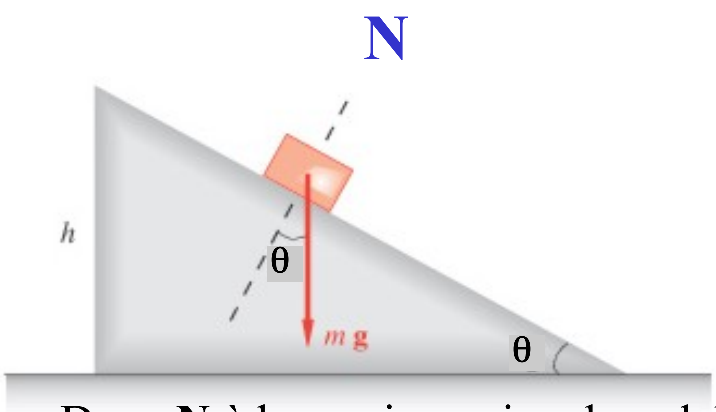
Gli attriti sono forze che si esercitano solo in presenza di moto (o tentativo di moto)

Se appoggiamo un blocco su una superficie piana che abbia un certo coefficiente di attrito e non spingo il blocco parallelamente alla superficie, NON ho presenza di forza di attrito (mentre, ad esempio, agiscono la forza peso e la reazione vincolare del piano).

Gli attriti non sono in grado di generare moto, ma solo di opporvisi

Il piano inclinato

consideriamo un corpo, assimilabile ad un punto materiale di massa m, che possa muoversi, sotto l'azione della suo peso e di eventuali altre forze (ad esempio la forza di attrito) lungo una **superficie inclinata di un angolo θ rispetto all'orizzontale**



In assenza di attrito:

Se sul corpo agisce la sola forza peso si ha:

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$$

Dove **N** è la reazione vincolare del piano di appoggio che ha una direzione normale al piano

Scomponendo la relazione lungo le direzioni ortogonale e parallela al piano si ottiene (vedi dettagli e calcoli nell'esempio seguente):

Direzione ortogonale al piano: $mg \cdot \cos\theta - N = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg \cdot \cos\theta$

Reazione vincolare

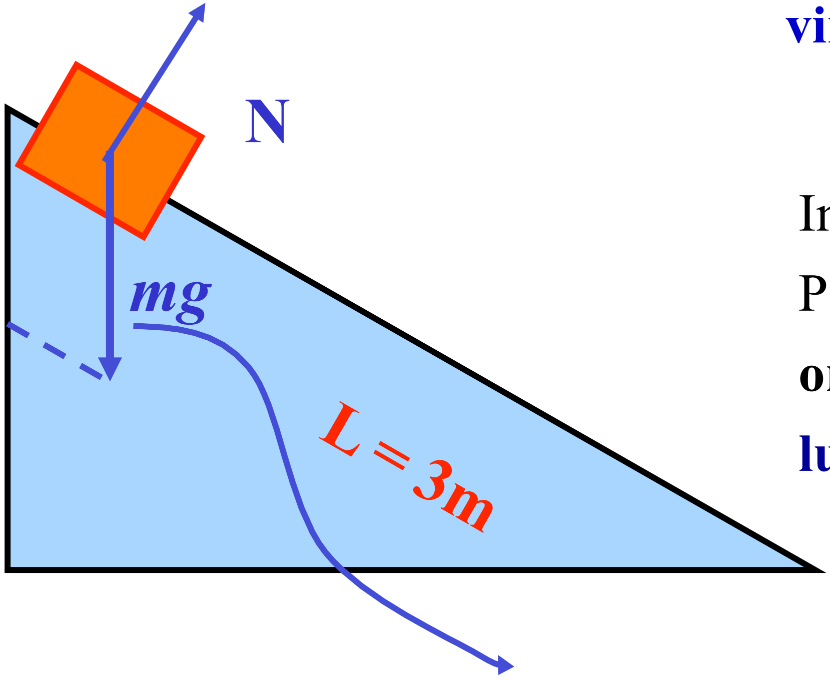
Direzione parallela al piano: $mg \cdot \mathrm{sen}\theta = ma \quad \Rightarrow \quad a = g \cdot \mathrm{sen}\theta$

Il corpo scende lungo il piano con moto uniformemente accelerato e l'accelerazione a=gsenθ<g

Il piano inclinato: esempio

Una cassa di m=30 kg scivola lungo un pianale inclinato di **30º. Quanto tempo** impiega la cassa per raggiungere la **base del pianale se questo è lungo 3 m?** Con quale velocità la cassa raggiunge il suolo, se la velocità iniziale è nulla?

è importante disegnare su un grafico la situazione descritta nel testo e **tracciare tutte le forze agenti con direzione e verso corretti :le** forza sono il **peso mg** e **reazione vincolare N**



Forza peso

In quale sistema di riferimento mi metto?

Posso scegliere tra il sistema con **x orizzontale e y verticale** e quello con **x lungo il piano inclinato e y lungo N**

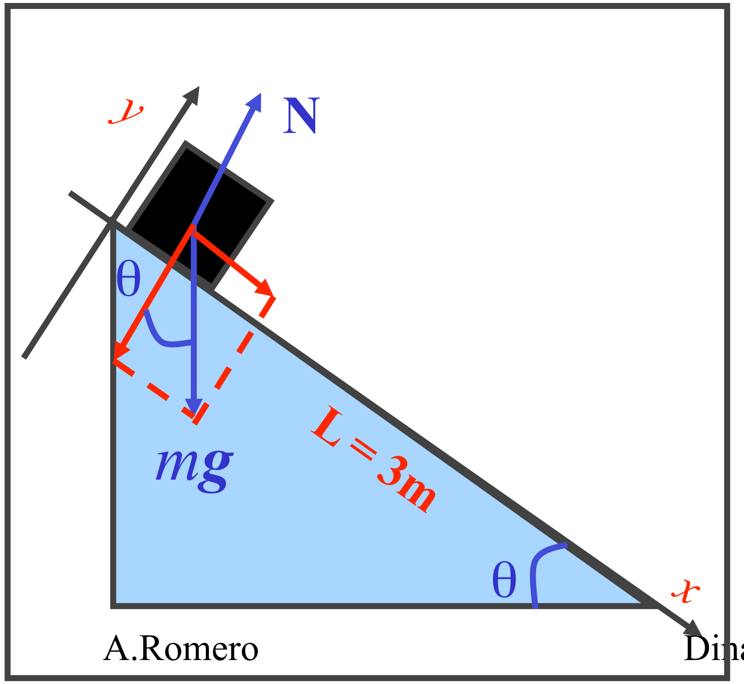
Equazione del moto

Quale delle due scelte è la migliore? Quella più semplice per la descrizione del moto che avviene lungo una retta

il piano **inclinato agisce da vincolo**→l'accelerazione in direzione ortogonale ad esso è nulla

sistema di riferimento con l'asse x parallelo al piano inclinato l'equazione del moto è più semplice.

Si deve scrivere l'equazione di Newton per la cassa. lungo x e y



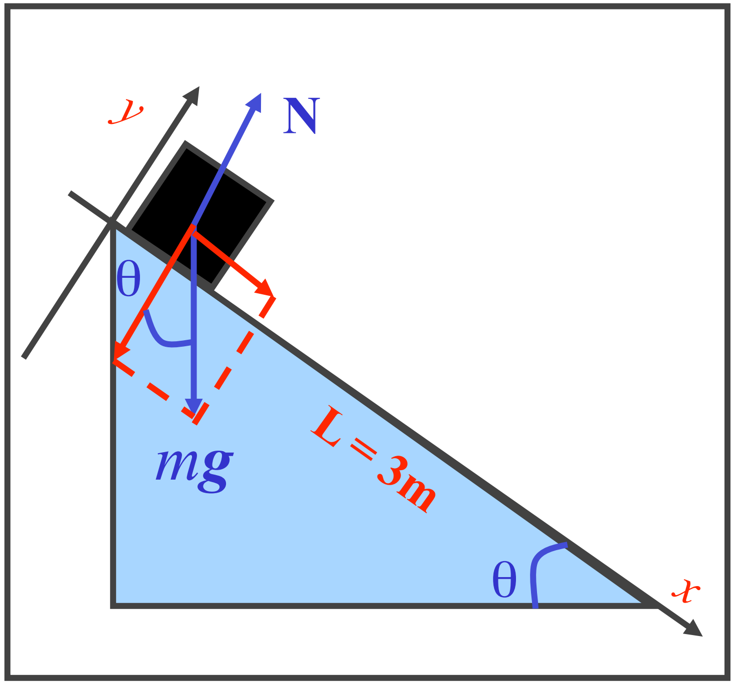
$$\sum_i \mathbf{F}_i = m\mathbf{a} \Rightarrow \begin{cases} mg\sin\theta = ma_x \\ -mg\cos\theta + N = ma_y \end{cases}$$

L'**accelerazione** lungo l'asse **y** deve essere **nulla** per la presenza del vincolo. Pertanto:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = m\mathbf{a} \Rightarrow \begin{cases} mg\sin\theta = ma_x \\ -mg\cos\theta + N = 0 \end{cases}$$

Esempio : Legge oraria

ci sono due incognite, il modulo N della reazione vincolare e l'accelerazione lungo x, a_x) e due equazioni indipendenti tra loro →problema ha soluzione.



La prima equazione fornisce **l'accelerazione:**

$$mg\sin\theta = ma_x$$

$$a_x = g\sin\theta$$

$$a_x = g\sin 30 = 9,81 \cdot \frac{1}{2} = 4.9\frac{m}{s^2}$$

La seconda, il modulo della **reazione vincolare:**

$$N = mg\cos\theta$$

$$N = 30 \cdot g \cdot \cos 30^\circ = 30 \cdot 9,81 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 254,87\,N$$

Esempio : Soluzione

L'accelerazione a_x è costante.

Il moto lungo il piano inclinato è quindi uniformemente accelerato. Abbiamo già analizzato questo moto in cinematica, e quindi conosciamo già la **legge oraria corrispondente**:

$$\mathbf{x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_x(t - t_0)^2}$$

$$\mathbf{v(t) = v_0 + a_x(t - t_0)}$$

Se scegliamo l'origine del sistema di assi nel punto di partenza della cassa e fissiamo l'origine dei tempi in $t_0 = 0$, le espressioni diventano:

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$v(t) = v_0 + a_x t$$

Ricordando la condizione iniziale sulla velocità (il testo del problema dice che la velocità iniziale **v_0 è nulla**) otteniamo:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 \\ v(t) = a_x t \end{cases}$$

Esempio : Soluzione

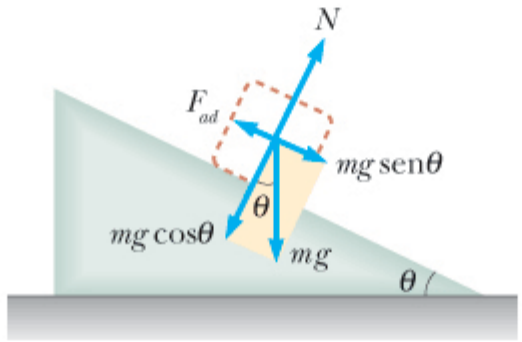
Interessa il tempo impiegato dalla cassa a percorrere la lunghezza L del pianale e la velocità con cui raggiunge il fondo. $(\Rightarrow x = L = 3\text{m})$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 \\ v(t) = a_x t \end{cases} \qquad \begin{cases} L = \frac{1}{2} a_x t^2 \\ v(t) = a_x t \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \sqrt{\frac{2L}{a_x}} = \sqrt{\frac{2L}{g\sin\theta}} \\ v(t) = a_x \sqrt{\frac{2L}{g\sin\theta}} = g\sin\theta\sqrt{\frac{2L}{g\sin\theta}} = \sqrt{2gL\sin\theta} \end{cases}$$

Sostituendo i dati numerici:

$$\begin{cases} t = \sqrt{2L/g\sin\theta} = \sqrt{(2\cdot 3\text{m})/(9.8\,{}^{\text{m}}\!/\!{}_{\text{s}^2}\cdot 0.5)} = 1.11\text{s} \\ v = \sqrt{2gL\sin\theta} = \sqrt{2\cdot 9.81\text{m/s}^2\cdot 0.5\cdot 3\text{m}} = 5.4\text{m/s} \end{cases} \qquad \begin{cases} t = 1{,}1\text{s} \\ v = 5{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

$$v = \sqrt{2gL\sin\theta} = \sqrt{2gh} = 5.4\,\text{m/s}$$



Il piano inclinato

In presenza di attrito:

Da quanto visto in precedenza risulta che la componente della forza peso lungo la direzione del piano inclinato vale

$$mg\cdot\text{sen}\theta$$

Se è presente una forza di attrito, la forza di attrito statico diretta in verso opposto a quella del moto può valere al massimo $F_s=\mu_s N$. Il moto lungo il piano può iniziare se

$$mg\cdot\text{sen}\theta>\mu_s N \Longrightarrow m\cancel{g}\cdot\text{sen}\theta>\mu_s m\cancel{g}\cdot\cos\theta \Longrightarrow \tan\theta>\mu_s$$

Per avere **moto** occorre **aumentare l'angolo** in modo da soddisfare la condizione di sopra. Dal **momento in cui inizia il moto**, vale invece la **seguente equazione** nella direzione del piano:

$$mg\cdot\text{sen}\theta-\underbrace{\mu_d mg\cdot\cos\theta}_{|F_a|=\mu_d N}=ma \Longrightarrow a=(\text{sen}\theta-\mu_d\cos\theta)g$$

$(\text{sen}\theta-\mu_d\cos\theta)>0 \Rightarrow \tan\theta>\mu_d \Rightarrow a>0$ ***m. uniform.accelerato***

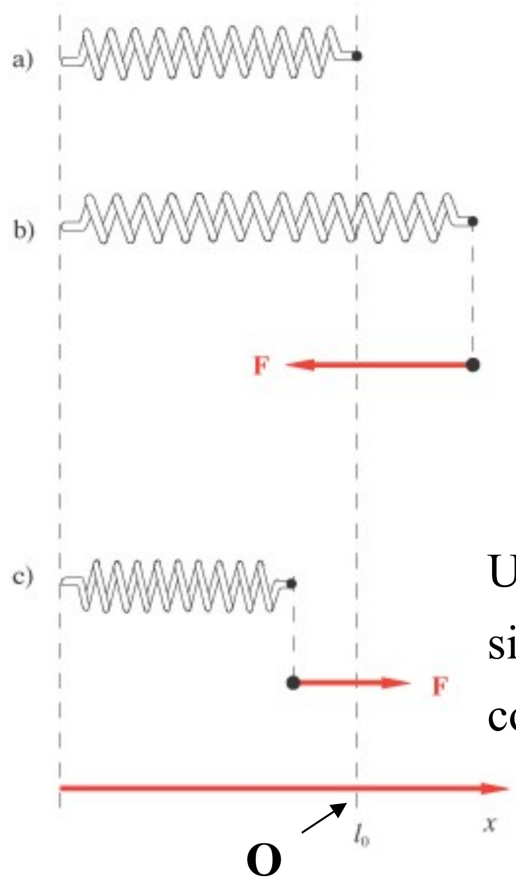
$\tan\theta\le\mu_d \Longrightarrow$ ***Non ha accelerazione se è fermo resta fermo***

Forza elastica

Se sottoposti ad una sollecitazione **F**, i corpi solidi subiscono una deformazione.

Per conservare la loro forma, applicano, a chi ha prodotto la deformazione, una **forza di richiamo $\mathbf{F}_{el}$** (opposta a **F**) che, per piccole deformazioni, è proporzionale alla deformazione stessa (**comportamento elastico**).

Una volta rimossa la sollecitazione ritornano allo stato normale.



Si definisce **Forza elastica**: ***una forza di direzione costante, con verso sempre rivolto ad un punto O, chiamato centro, e con modulo proporzionale alla distanza da O***

$$\boxed{\mathbf{F}_{el} = -kx\mathbf{u}_x}$$

Legge di Hooke

Con: k costante positiva detta costante elastica [N/m]

$\mathbf{u}_x$: versore dell'asse x, in cui avviene il moto

Una molla presenta in genere una lunghezza a riposo (l_0) quando non si trova in condizione di compressione o di estensione. Identificando con l la lunghezza della molla compressa o estesa si ha. $x=l-l_0$

$$F = -k(l - l_0) = -kx$$

Forza elastica

Che tipo di moto risulta dall'applicazione di una forza elastica?

$$F(t) = ma(t) \Longrightarrow a(t) = \frac{F(t)}{m}$$

$$F(t) = -kx(t)$$

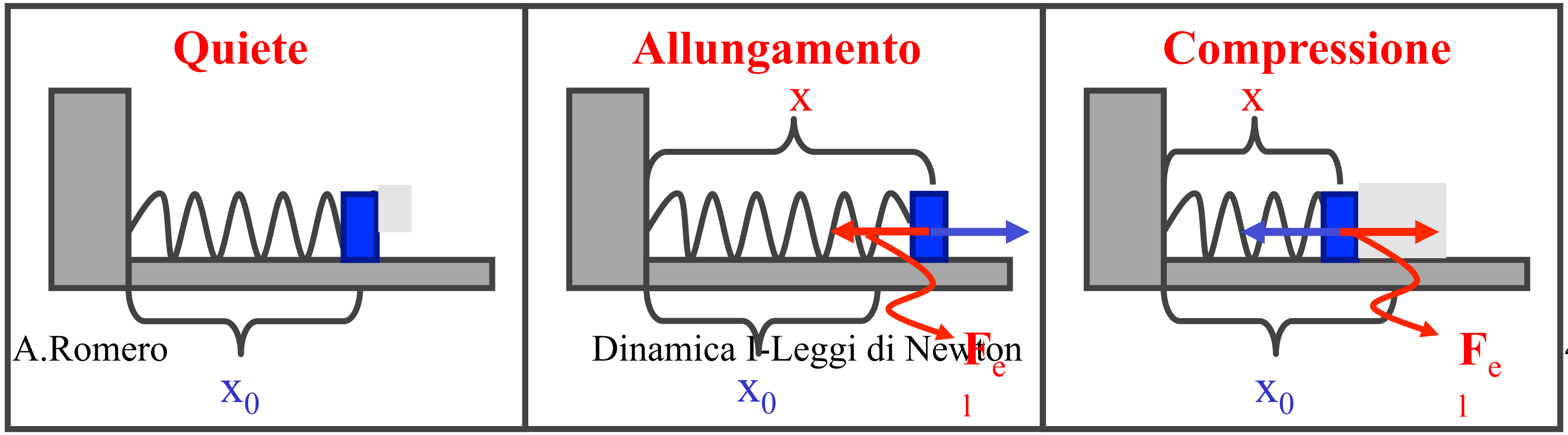
$$a(t) = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x(t) \qquad \text{con} \quad \frac{k}{m} = \omega^2$$

Dalla cinematica è stato ricavato che:

se vale la relazione seguente tra a(t) e x(t): $a(t) = -\omega^2 x(t)$ $\Longrightarrow$ allora x(t) rappresenta un moto armonico.

Il moto che risulta dall'applicazione di una forza elastica, è un moto armonico con pulsazione e periodo dati da:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



Forza di attrito viscoso

E' una forza che si oppone al moto ed ***proporzionale alla velocità*** del corpo soggetto a tale forza:

$$\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{F} = ma \Rightarrow ma = -bv \Rightarrow a = -\frac{bv}{m}$$

Le forze di attrito viscoso sono esercitate su un corpo che si muove in un fluido (liquidi o gas)

Forza di attrito viscoso e il moto

A partire dal valore della forza si può studiare il tipo di moto a cui essa dà origine

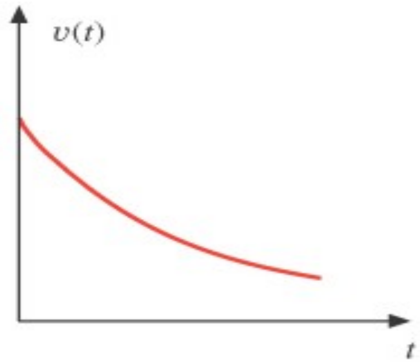
$$\mathbf{F} = -b\mathbf{v} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{a} = -\frac{b}{m}\mathbf{v}$$

In una dimensione, studiamo il moto con accelerazione non costante:

$$a = -kv \quad \Longrightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -kv \quad \Longrightarrow \quad \frac{dv}{v} = -kdt$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = \int_{t_0}^{t} -kdt \Rightarrow \quad \ln\frac{v}{v_0} = -kt \quad \Longrightarrow \quad v = v_0 e^{-kt}$$

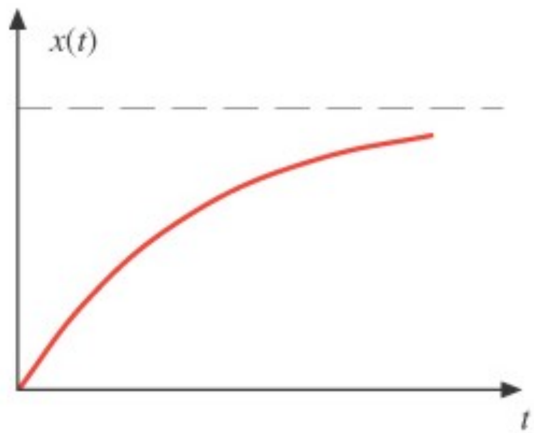
La velocità decresce esponenzialmente nel tempo e quindi il punto si ferma



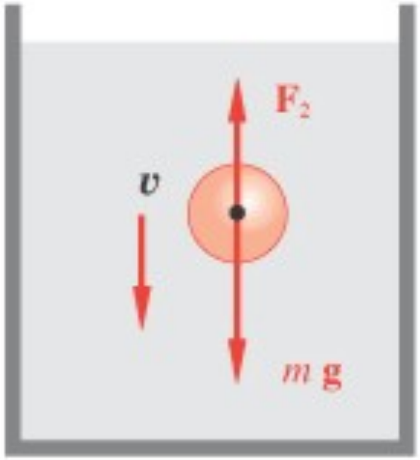
$$x(t) = \cancel{x_0} + \int_0^t v(t)dt \quad = \int_0^t v_0 e^{-kt} dt \; = -\frac{v_0\left[e^{-tk}\right]_0^t}{k}$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$$



Il punto tende asintoticamente alla posizione v_0/k



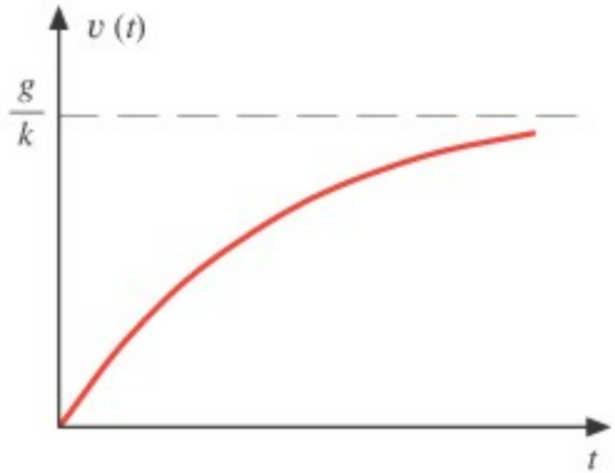
Forza di attrito viscoso e il moto

Si consideri un punto materiale di massa m lasciato cadere in un fluido e si assuma che le uniche forze agenti siano la forza peso $\mathbf{F}_1$=m**g** e la forza di attrito viscoso $\mathbf{F}_2$=-km**v** (**pongo** per comodità **b=km)** Il moto avviene solo sull'asse z. *Condizioni iniziali:* z=0 e v=0 per t=0.

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = m\mathbf{a} \Rightarrow \cancel{m}g - \cancel{m}kv = \cancel{m}\frac{dv}{dt} \Rightarrow \qquad \frac{dv}{dt} = g - kv$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{g-kv} = dt \Rightarrow \qquad \int_0^v \frac{dv}{g-kv} = \int_0^t dt \Rightarrow \qquad -\frac{1}{k}\left[\ln(g-kv)\right]_0^v = t$$

$$\frac{g-kv}{g} = e^{-kt} \Rightarrow v(t) = \frac{g}{k}(1-e^{-kt})$$



Partendo da 0 la velocità cresce, però sempre più lentamente per t>>1/k, v assume praticamente un valore costante g/k.

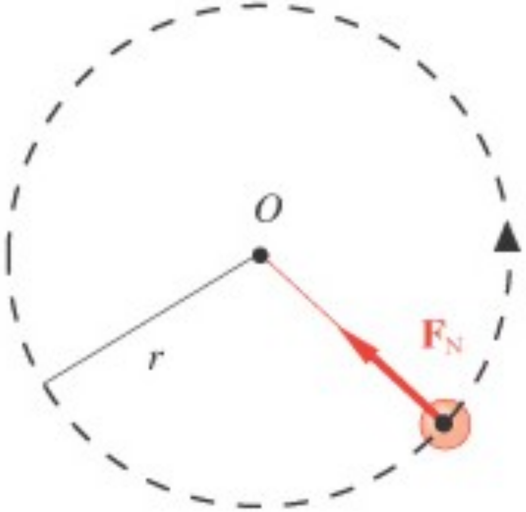
Forze centripete

Supponiamo che la risultante delle forze agenti **R** su un punto materiale presenti una ***componente normale alla traiettoria***, questa componente causa ***l'accelerazione centripeta*** dell'oggetto:

$$F_N = ma_N = m\frac{v^2}{r}$$ dove r: è il raggio di curvatura della traiettoria.

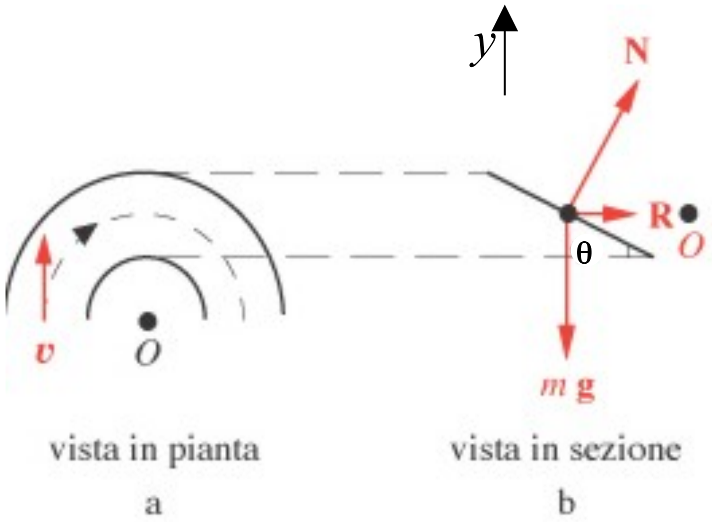
In genere **R** ha anche una componente tangenziale alla traiettoria F_T non nulla responsabile della variazione del modulo della velocità. Se $F_T=0$, il moto lungo la traiettoria è uniforme e l'unica accelerazione è a_N → ***moto circolare uniforme***

In generale forze centripete sono prodotte da rotaie, pneumatici, fili… ossia vincoli che consentono di incurvare la traiettoria oppure da forze gravitazionali



Forze centripete

Si vuole determinare la condizione per cui un corpo lanciato con velocità **v** percorre con velocità costante un arco di circonferenza come in figura. La curva è sopraelevata (come quelle presenti in un velodromo) come si può vedere dalla curva vista in sezione.



Occorre che la risultante R delle forze applicate sia ortogonale alla traiettoria e diretta verso il centro. Le forze agenti sono:

-peso **P**

- reazione vincolare ortogonale alla pista **N**

$$N\cos\theta = mg$$

Equilibrio nella direzione verticale (y)

$$R = N\sin\theta \Rightarrow R = F_N$$

Rivolta verso il centro della traiettoria

$$N\sin\theta = F_N = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\cancel{N}\cos\theta}{\cancel{N}\sin\theta} = \frac{\cancel{m}g}{\cancel{m}\dfrac{v^2}{r}} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{v^2}{gr}$$

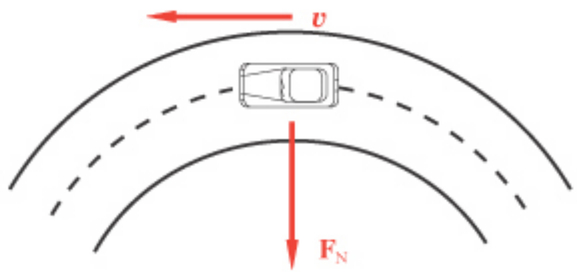
Forze centripete

Determinare la velocità massima con cui un auto può affrontare in una strada piana una curva di raggio r

La **forza centripeta** necessaria è fornita **dall'attrito tra pneumatici e terreno**. Poiché la traiettoria è circolare, non c'è spostamento lungo la direzione di r e dunque il coefficiente di attrito rilevante in questa direzione é quello statico:

$$F_N = \mu_s N = \mu_s mg$$

Forza di attrito statico massimo



$$\mu_s \cancel{m} g = \frac{\cancel{m} v^2}{r} \Longrightarrow v = \sqrt{\mu_s g r}$$

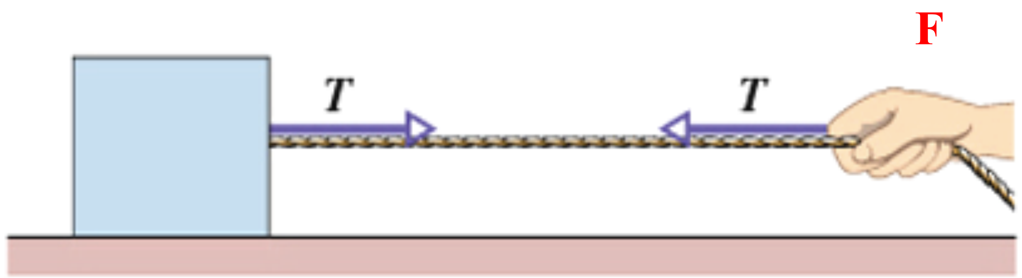
Velocità massima con cui può essere affrontata la curva

Funi e carrucole

Funi e carrucole sono dispositivi che permettono di **trasmettere l'azione di una forza** applicata in un dato punto ad un punto diverso.

In generale questi dispositivi hanno caratteristiche e limiti fisici ben definiti.

Tuttavia, in molti casi, possiamo descrivere con buona approssimazione il loro funzionamento facendo alcune ipotesi:



Funi:

- ✓ ***massa trascurabile*** (m = 0)
- ✓ ***inestensibili*** (L = costante).

Quest'ultima caratteristica implica che **se applico una forza F** a un estremo di una fune tesa, questa **risponde con una forza** (chiamata **tensione T**) che si trasmette lungo la fune in modo tale che ogni punto della corda abbia accelerazione nulla relativamente a tutti gli altri

⇒ **l'accelerazione degli estremi della corda è la stessa**.

Funi e carrucole

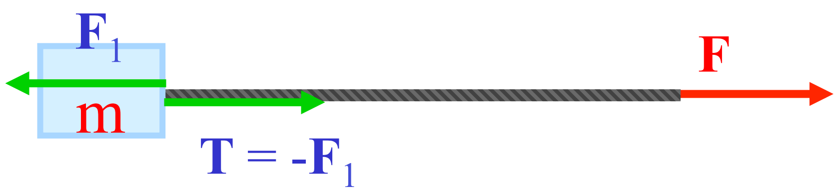
Consideriamo un corpo di massa m attaccato ad una corda.

- La *corda* è tirata con una forza **F**.
- Si chiami $\mathbf{F}_1$ la forza che il corpo di massa m esercita sulla *corda*.
- Per la terza legge di Newton, la forza che la corda esercita *sul corpo* sarà

$-\mathbf{T} = -\mathbf{F}_1$.

Applichiamo la seconda legge di Newton ***alla corda***:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$



In condizioni statiche:

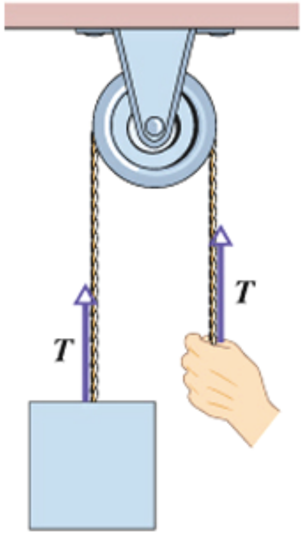
$$\mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_1 = -\mathbf{F} \Rightarrow \quad \mathbf{T} = \mathbf{F}$$

In condizioni dinamiche si arriva allo stesso risultato se la massa della corda è nulla

$$m = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_1 = -\mathbf{F} \Rightarrow \quad \mathbf{T} = \mathbf{F}$$

Corda ideale: m = 0, L = costante

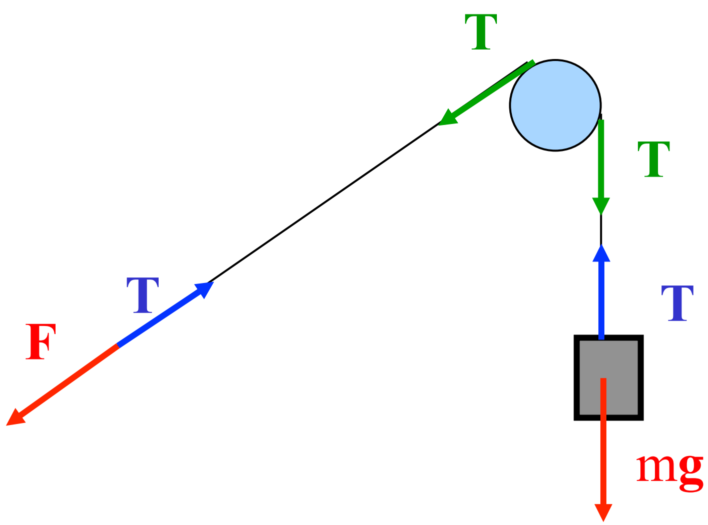
Funi e carrucole

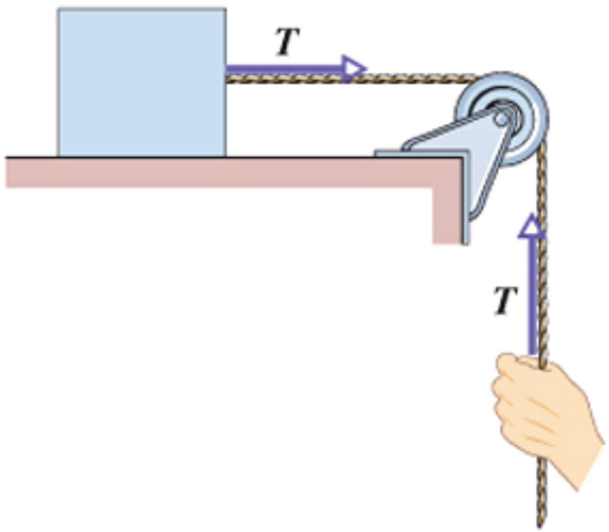


Carrucole

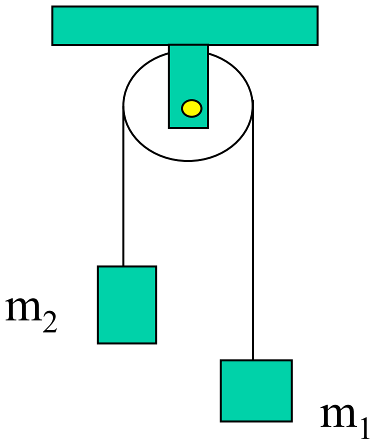
L'effetto di una carrucola ideale è quello di fare **cambiare direzione a una forza che viene trasmessa**, per esempio, per mezzo di una **fune**. L'approssimazione che faremo è che:

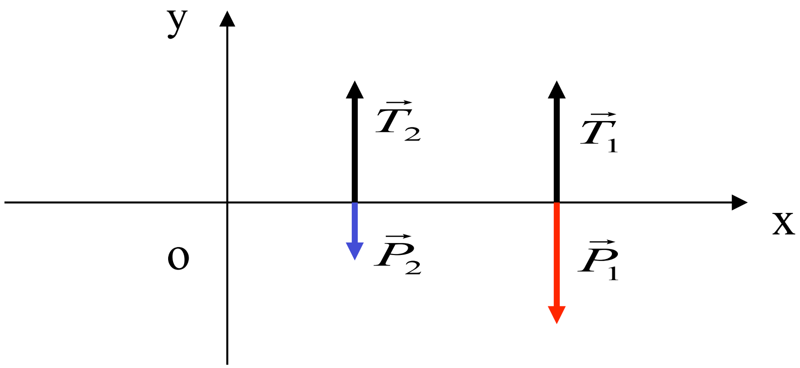
- la carrucola sia priva di massa
- le sue dimensioni siano trascurabili (per non includere gli effetti dovuti alla rotazione).





Esempio: Facendo riferimento al disegno ricavare il valore dell'accelerazione delle due masse ed il valore delle tensioni dei fili





$$\begin{cases} \vec{T}_1 + \vec{P}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ \vec{T}_2 + \vec{P}_2 = m_2\vec{a}_2 \end{cases}$$

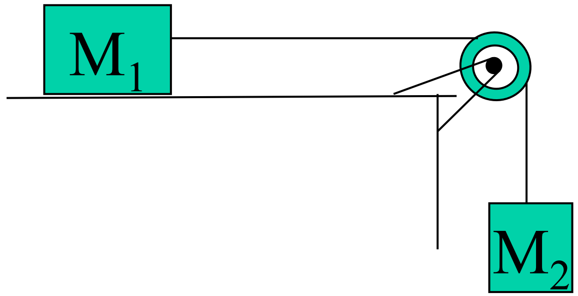
Ma $a_1 = - a_2$ e $T_1=T_2=T$
Suppongo a_1 rivolta verso l'alto

$$\begin{cases} T - m_1 g = m_1 a_1 \\ T - m_2 g = - m_1 a_2 \end{cases}$$

Sottraggo la seconda equazione dalla prima e ottengo

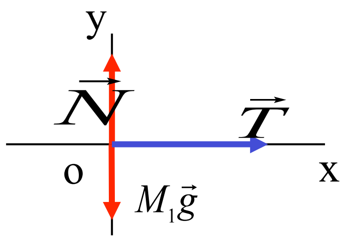
$$\boxed{a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g}$$

$$\boxed{T = 2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$$

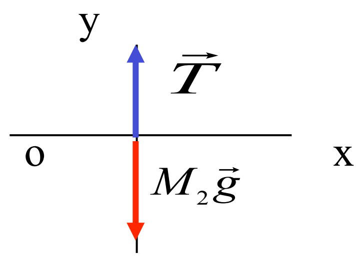


Esempio: Facendo riferimento al disegno ricavare il valore dell'accelerazione delle due masse ed il valore delle tensione dei filo

Schema delle forze per M_1



Schema delle forze per M_2

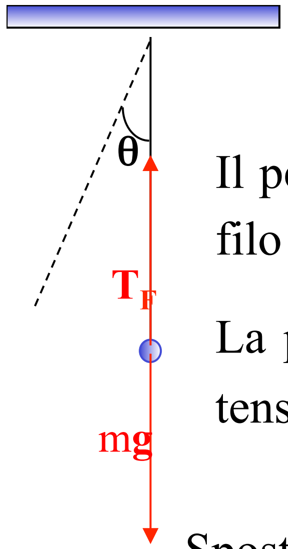


Per la massa **M_1**: $\vec{T}+\vec{N}+M_1\vec{g}=M_1\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} N-M_1g=M_1a_{1y} \\ T=M_1a_{1x} \end{cases}$

Per la massa **M_2**: $M_2\vec{g}+\vec{T}=M_2\vec{a} \Rightarrow$ $M_2g-T=M_2a_{2y}$

Con la condizione: $a_{1x}=a_{2y}=a$

Da cui: $a=\dfrac{M_2}{M_1+M_2}g \qquad T=\dfrac{M_1M_2}{M_1+M_2}g$



Il pendolo semplice

Il pendolo semplice è costituito da un punto materiale (massa=*m*) appeso tramite un filo inestensibile (lunghezza=*L*) e di massa trascurabile.

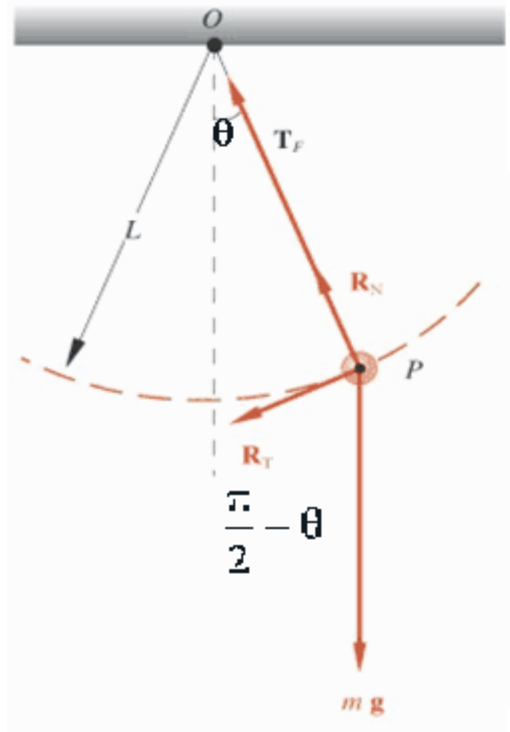
La posizione di *equilibrio statico* è quella verticale. La forza esercitata dal filo (la tensione del filo) vale in modulo quanto la forza peso del punto materiale T_F=mg

Spostando il punto materiale dalla verticale, esso inizia ad oscillare attorno alla posizione di equilibrio lungo un arco di circonferenza di lunghezza L.

Forze agenti su P:

- Tensione del filo $\mathbf{T}_F$
- Forza peso **mg**

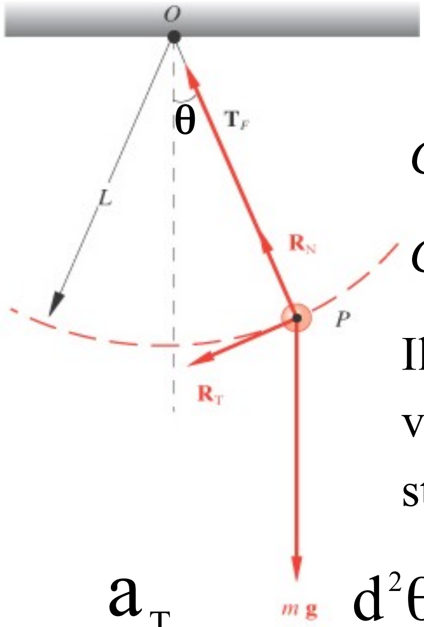
$$\mathbf{mg} + \mathbf{T}_F = m\mathbf{a}$$



Consideriamo le componenti dell'equazione rispetto all'asse tangente alla traiettoria e rispetto all'asse ortogonale ad esso:

Componente tangenziale: $R_T = -mg\,\mathrm{sen}\theta = ma_T$

Componente ortogonale: $R_N = ma_N \rightarrow T_F - mg\cos\theta = ma_N$



Il pendolo semplice

Componente tangenziale: R_T=-mg senθ = ma_T ⇨ a_T =-g senθ

Componente ortogonale: R_N=T_F-mgcosθ=ma_N ⇨ a_N =T_F/m-g cosθ

Il punto P può essere considerato come un punto che si muove con velocità variabile lungo una circonferenza di raggio r=L.In cinematica è stato ricavato per l'accelerazione tangenziale e normale:

$$\alpha = \frac{a_T}{r} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{a_T}{r} \rightarrow a_T = L\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\text{sen}\theta$$

$$a_N = \frac{v^2}{L} \Rightarrow m\frac{v^2}{L} = T_F - mg\cos\theta$$

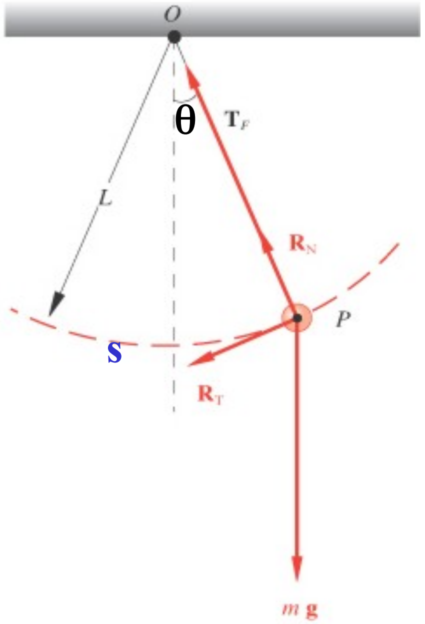
Dall'equazione $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\text{sen}\theta$ si ricava l'equazione differenziale del moto del pendolo θ(t). Per piccole oscillazioni si può approssimare senθ(t) ~ θ(t)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\text{sen}\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

Con: $\omega^2 = \frac{g}{L}$

$$\Rightarrow \theta(t) = \theta_0 \text{sen}(\omega t + \phi)$$

E' l'equazione del moto armonico semplice



Il pendolo semplice

$$\theta(t) = \theta_0 \mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

$$\omega^2 = \frac{g}{L}$$ Periodo dell'oscillazione: $$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

La legge oraria dello spostamento lungo l'arco di circonferenza è:

$$s(t) = L\theta(t) = L\theta_0 \mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

Velocità angolare: $$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega\theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Velocità lineare: $$v = \frac{ds}{dt} = L\frac{d\theta(t)}{dt} = L\omega\theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

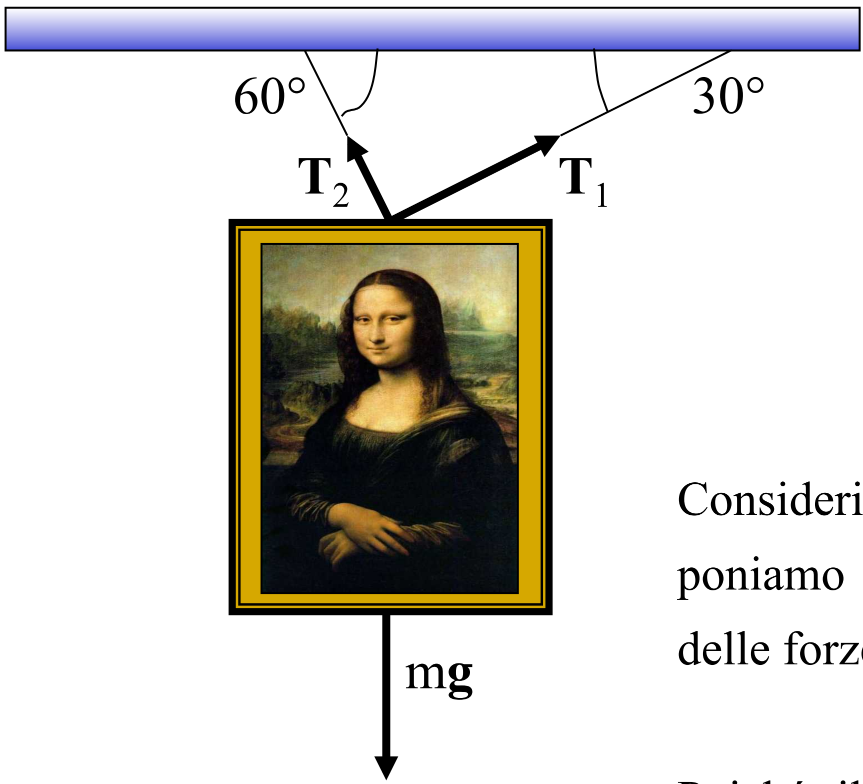
Tensione del filo

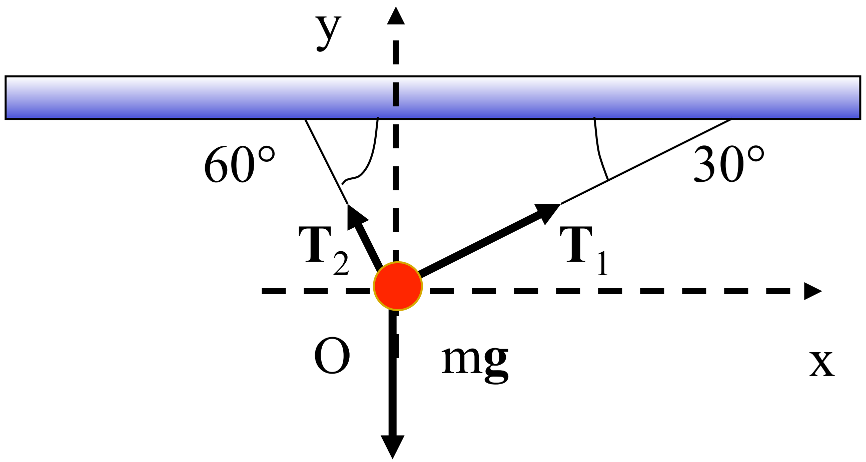
Dall'equazione del moto lungo la direzione ortogonale alla traiettoria è possibile ricavare il valore della tensione del filo:

$$R_N = T_F - mg\cos\theta = ma_N \Rightarrow m\frac{v^2}{L} = T_F - mg\cos\theta \Rightarrow T_F = m\left[g\cos\theta(t) + \frac{v^2}{L}\right]$$

Esercizio

Un quadro la cui forza peso è pari a 8 N è sostenuto da due fili aventi tensioni T_1 e T_2. Conoscendo gli angoli θ_1 e θ_2 (vedi figura), si trovi la tensione dei fili.





Consideriamo il quadro come un oggetto puntiforme e poniamo l'origine degli assi nel punto di applicazione delle forze agenti su di esso.

Poiché il quadro non accelera, deve essere nulla la risultante delle forze agenti su di esso: il peso m**g** e le tensioni $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$.

$$\sum F = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

Le componenti orizzontali delle forze devono equilibrarsi tra loro, così come le componenti verticali.

N.B. La componente x di T_2 è nel verso negativo dell'asse x e la forza peso è diretta verso il basso.

x $\quad \mathbf{T}_{1x} + \mathbf{T}_{2x} = 0 \Rightarrow T_{1x} - T_{2x} = T_1\cos 30° - T_2\cos 60° = 0$

y $\quad \mathbf{T}_{1y} + \mathbf{T}_{2y} + \mathbf{P} = 0 \Rightarrow T_{1y} + T_{2y} - mg = T_1 \mathrm{sen}30° + T_2 \mathrm{sen}60° - mg = 0$

dove $\cos 30° = \sqrt{3}/2 = \mathrm{sen}60°, \quad \mathrm{sen}30° = 1/2 = \cos 60°$

$$\left.\begin{array}{l} T_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{T_2}{2} \Rightarrow T_2 = \sqrt{3}T_1 \\ T_1\left(\frac{1}{2}\right) + T_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = mg \end{array}\right\} \Rightarrow T_1\left(\frac{1}{2}\right) + T_1\left(\frac{3}{2}\right) = mg \Rightarrow T_1 = \frac{1}{2}mg = 4N$$

$$T_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}mg = 6.93N$$

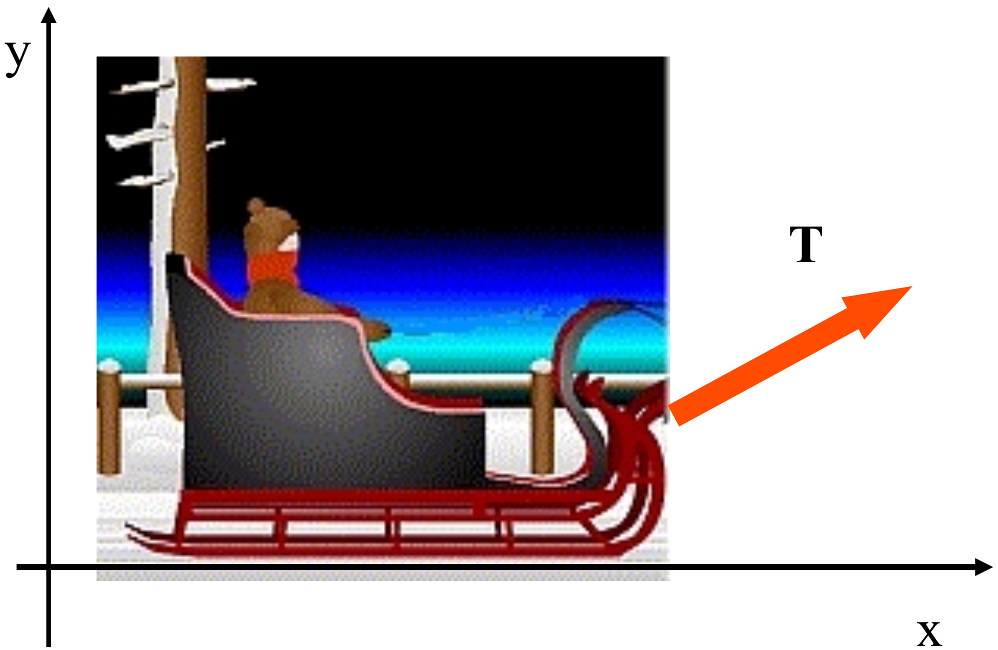
Esercizio

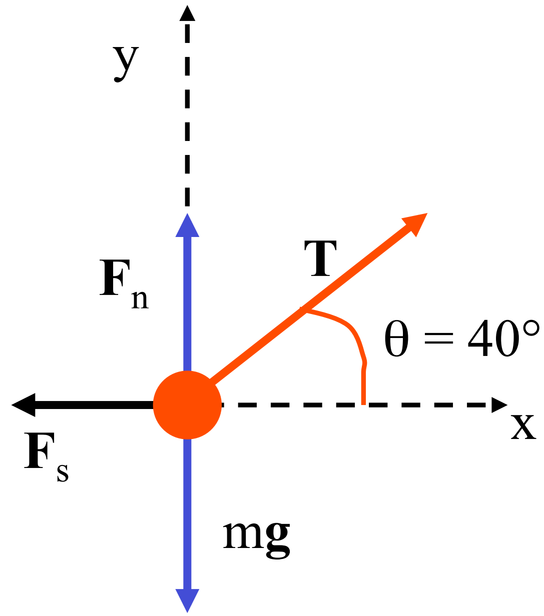
Un uomo tira una slitta su cui sono seduti i suoi bambini. La massa totale della slitta e dei bambini è 60 kg.

I coefficienti di attrito statico e cinetico sono $\mu_s = 0.2$ e $\mu_c = 0.15$.

La slitta è tirata con una corda che forma un angolo di 40° con l'orizzontale.

Si trovi la forza di attrito e l'accelerazione dei bambini e della slitta se la **tensione nella corda è: (a) 100 N; (b) 160 N.**





$\mathbf{F}_n$ è la reazione vincolare.
$\mathbf{F}_s$ è la forza di attrito statico.

La tensione T può essere scomposta nelle sue componenti cartesiane, di modulo T_x e T_y:

$$T_x = |\mathbf{T}|\cos\theta = (100 \cdot \cos 40°)\ \text{N} = 77\ \text{N}$$
$$T_y = |\mathbf{T}|\sin\theta = (100 \cdot \sin 40°)\ \text{N} = 64\ \text{N}$$

Non c'è accelerazione verticale, quindi la somma delle forze nella direzione y agenti sul sistema slitta + bambini deve essere nulla.

$$F_n - mg + T_y = 0 \rightarrow F_n = mg - T_y = (60 \cdot 9.8 - 64)\ \text{N} = 524\ \text{N}$$

La massima forza di attrito statico è pertanto:

$$f_{s,max} = \mu_s F_n = (0.2 \cdot 524)\ \text{N} = 104.8\ \text{N}$$

Tale valore va confrontato con la componente orizzontale T_x della tensione:

$$f_{s,max} > T_x$$

quindi la slitta non si muove.

Se T vale 160 vale sempre la condizione che somma delle forze nella direzione y agenti sul sistema slitta + bambini deve essere nulla. Sostituendo ho che

$$F_n - mg + T_y = 0 \rightarrow F_n = mg - T_y = (60 \cdot 9.8 - 102)\,\mathrm{N} = 486\,\mathrm{N}$$

La massima forza di attrito statico è pertanto:

$$f_{s,max} = \mu_s F_n = (0.2 \cdot 486)\,\mathrm{N} = 97.2\,\mathrm{N}$$

Tale valore va confrontato con la componente orizzontale T_x della tensione:

$$f_{s,max} < T_x$$

quindi la slitta si muove. Una volta che la slitta si muove, la forza d'attrito sarà dovuta all'attrito dinamico:

$$f_d = \mu_d F_n = (0.15 \cdot 486)\,\mathrm{N} = 73\,\mathrm{N}$$

La forza risultante nella direzione x è quindi: $T_x - f_d = (123 - 73)\,\mathrm{N} = 50\,\mathrm{N}$

e l'accelerazione: $a = \dfrac{50\,\mathrm{N}}{60\,\mathrm{kg}} = 0.83\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$