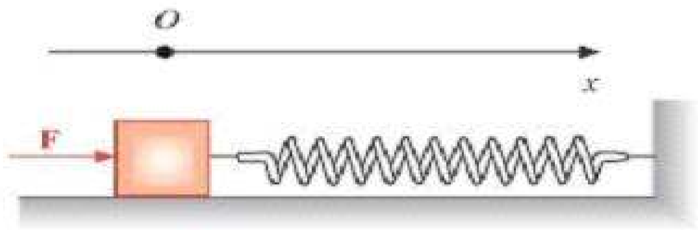
Oscillazioni e Onde
Forza elastica

Riprendiamo la legge oraria di una massa attaccata a una molla vincolata in un estremo. Per fare ciò occorre scriverne la legge del moto:

$$-kx = ma$$

da cui



$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Per trovare la legge oraria basta risolvere questa equazione differenziale:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x \qquad \text{con} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

Forza elastica

E' soddisfatta da una funzione la cui derivata seconda sia uguale alla funzione stessa cambiata di segno, a meno del coefficiente di proporzionalità (k/m).

Tale funzione è del tipo $\quad \mathrm{sen}(\omega t) \quad$ con $\quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Infatti se provo la soluzione : $\quad x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$

velocità e accelerazione sono $\quad v = dx/dt = \omega A \cos(\omega t + \phi)$

$$a = dv/dt = d^2x/dt^2 = -\omega^2 A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

$$a = -\omega^2 A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$$

Quindi ho che soddisfo la→

Equazione dell'oscillatore armonico →

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

Equazione oscillatore armonico

Molti fenomeni descritti dalla **legge dell' oscillatore armonico (semplice, smorzato o forzato)**

Moto di un pendolo semplice

Moto di pendolo di torsione

Circuiti elettrico

Oscillazione di liquido in un cannello

Moto di molecole

Forza elastica

La legge oraria è quindi:

$$x(t) = A sen(\omega t + \phi)$$

Oppure (equivalenti seno e coseno, cambia φ):

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

dove A è l'ampiezza di oscillazione con dimensioni lunghezza, e φ è la fase.

A e φ dipendono dalle **condizioni iniziali** del moto, ω **dalla fisica (m e k)**

T periodo → tempo per oscillazione completa di seno o coseno cioè 2π

$$(\omega(T + t) + \phi) \rightarrow (\omega t + \phi + 2\pi)$$

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow T = 2\pi / \omega$$

$$T = 2\pi / \omega$$

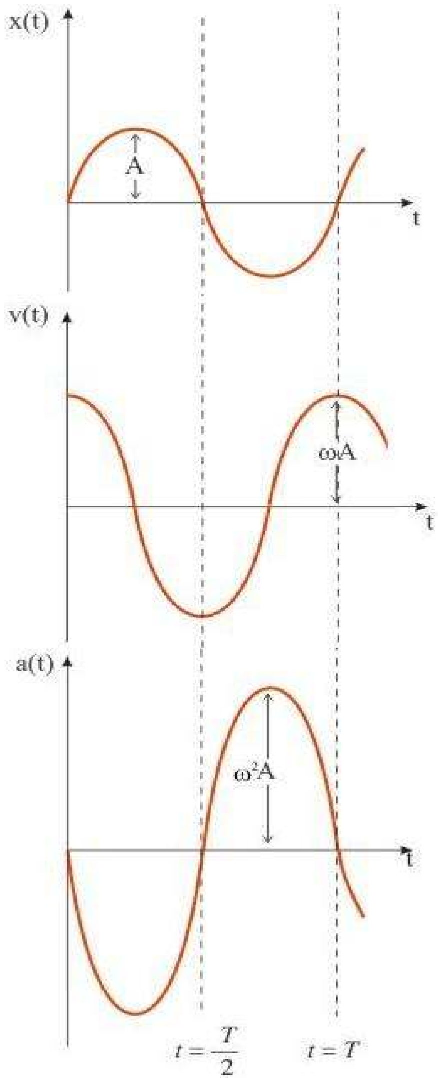
$$\nu = 1/T = \omega/2\pi$$

si osserva che:

→ nel punto di massimo allungamento e di massima compressione, **l'accelerazione è massima e la velocità è nulla** (il corpo sta infatti invertendo il verso del moto)

→ nel punto di equilibrio, **l'accelerazione è nulla e la velocità massima** (con segno a seconda che la molla si stia allungando o comprimendo)

Moto Periodico

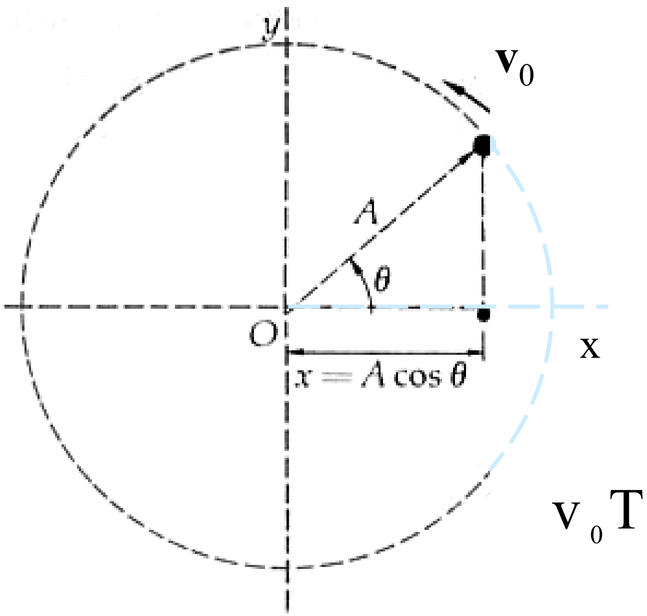


Moto periodico con pulsazione $\omega = \frac{2\pi}{T}, \varphi = 0$

$$x(t) = A\sin(\omega t)$$ **(posizione)**

$$v(t) = A\omega\cos(\omega t)$$ **(velocità)**

$$a(t) = -A\omega^2\sin(\omega t)$$ **(accelerazione)**



La figura mostra una particella che si muove lungo una circonferenza di raggio A con velocità costante v_0. Anche la sua velocità angolare ω è costante ed è legata alla velocità lineare dalla relazione $v_0 = A\omega$ Poiché la particella percorre uno spazio $2\pi A$ durante un giro, il **periodo** e la **frequenza** del moto circolare si ricavano da:

$$v_0 T = 2\pi A \rightarrow \quad T = \frac{2\pi A}{v_0} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Se la particella parte all'istante $t = 0$ sull'asse x, il suo spostamento angolare in un istante successivo è dato da $\theta = \omega t = 2\pi\nu t$.
Dalla figura si può vedere che la componente x della posizione della particella è data da:

$$\mathbf{x = A\cos\theta = A\cos 2\pi\nu t} \qquad (1)$$

che è uguale all'espressione per il moto armonico semplice.

Energia nel moto armonico semplice

Quando un corpo attaccato ad una molla oscilla, esso ha energia cinetica ed energia potenziale, che variano entrambe nel tempo; ma la loro somma, che è l'energia totale, è costante. Infatti

L'energia potenziale E_p di una molla di costante elastica K, allungata di un tratto x dalla posizione di equilibrio, è data dall'equazione

$E_p = ½\ kx^2$ → $$E_p = 1/2kA^2 sen^2(\omega t)$$

L'energia cinetica è:

$E_c = ½\ mv^2$ → $$\mathbf{E_c = 1/2m\omega^2A^2\cos^2(\omega t) = 1/2kA^2\cos^2(\omega t)}$$

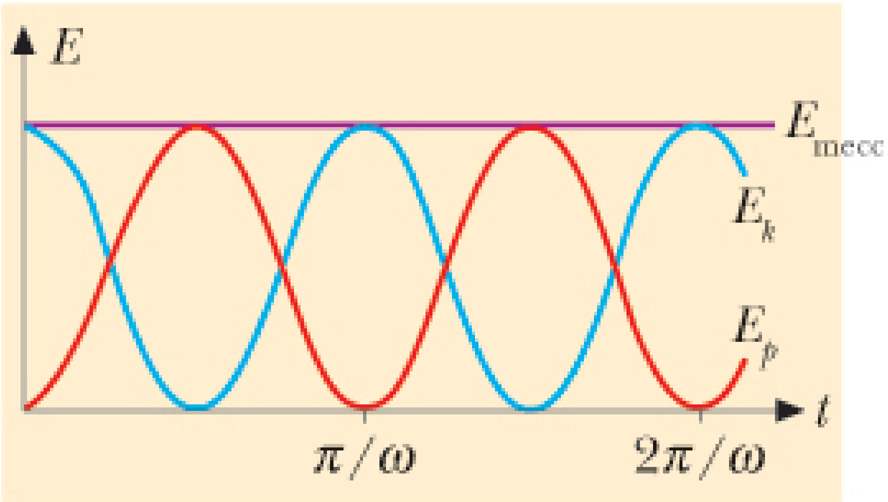
L'energia totale è la somma di queste due quantità:

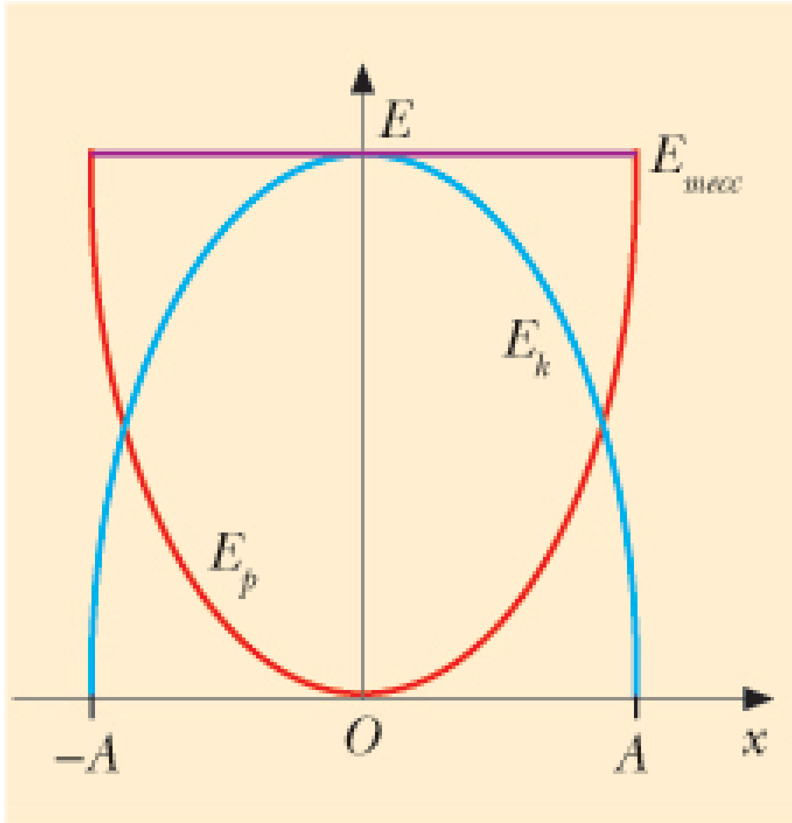
$\mathbf{E_{tot}} = ½\ kx^2 + ½\ mv^2 =$

$\mathbf{½\ k\ A^2}$ **infatti** $\mathbf{sen^2 + cos^2 = 1}$

L'energia totale di un corpo che oscilla con moto armonico semplice è direttamente proporzionale al quadrato dell'ampiezza.

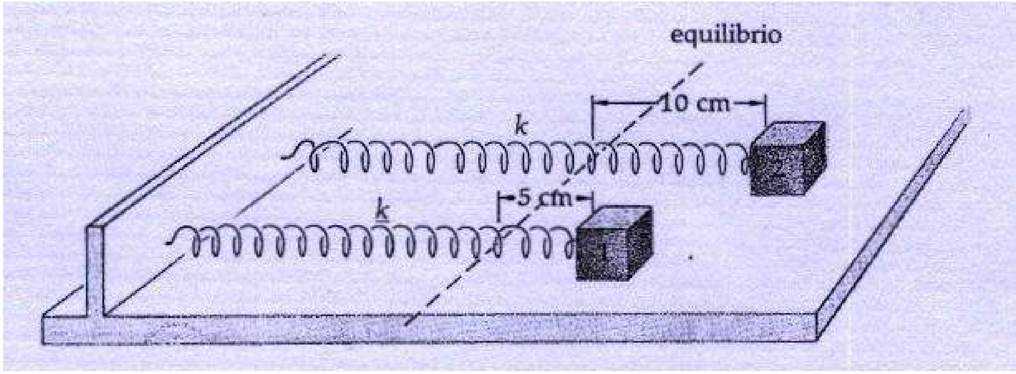
Energia del moto armonico



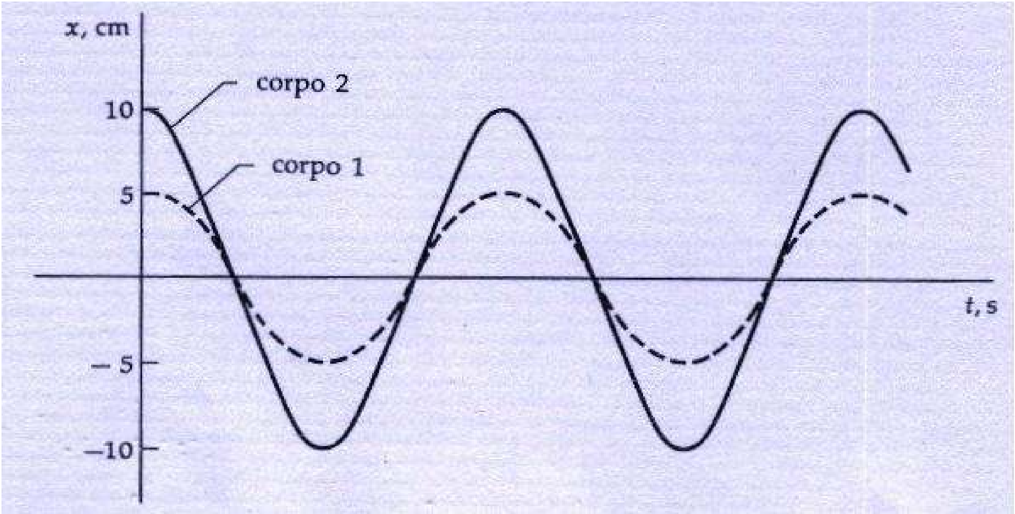


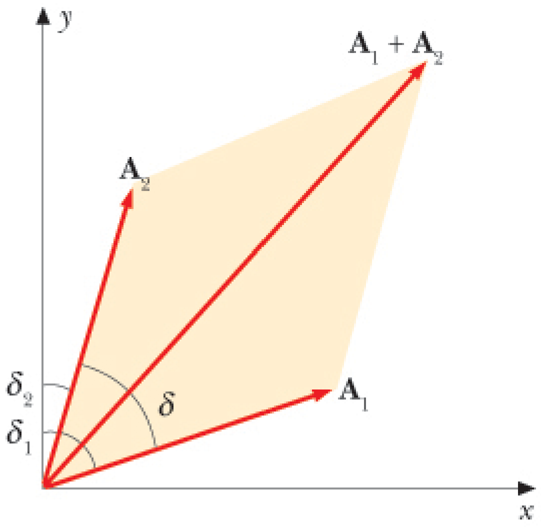
Moto Periodico Composto

Due corpi identici attaccati a molle identiche vengono lasciati andare simultaneamente. Essi raggiungono le loro posizioni di equilibrio nello stesso istante, perché il periodo dipende dalla massa e dalla costante elastica, che sono le stesse, e non dall'ampiezza.



Grafici dello spostamento In funzione del tempo per i due corpi. Le cose cambiano se le fasi iniziali non sono le stesse





Composizione di moti armonici su stesso asse

Se ho due moti armonici con **stessa pulsazione** posso scrivere la loro somma come un moto armonico di stessa pulsazione, fase diversa e ampiezza che dipende da differenza di fase :

$$x_1(t) = A_1 \mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = A_2 \mathrm{sen}(\omega t + \varphi_2)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \mathrm{sen}(\omega t + \psi)$$

per dimostrarlo posso usare il metodi di Fresnel (v grafico precedente) o quello qui indicato. Esplicito il seno della somma

$$x(t) = A_1(\mathrm{sen}\,\omega t \cdot \cos\varphi_1 + \cos\omega t \cdot \mathrm{sen}\,\varphi_1) +$$
$$A_2(\mathrm{sen}\,\omega t \cdot \cos\varphi_2 + \cos\omega t \cdot \mathrm{sen}\,\varphi_2)$$

Raccolgo a fattor comune seno e coseno

$$x(t) = (A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2)\mathrm{sen}\,\omega t + (A_1 \mathrm{sen}\,\varphi_1 + A_2 \mathrm{sen}\,\varphi_2)\cos\omega t$$

Composizione di moti armonici su stesso asse(cont)

Se pongo

$$A\cos\psi = \left(A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2\right)$$
$$A\operatorname{sen}\psi = \left(A_1\operatorname{sen}\varphi_1 + A_2\operatorname{sen}\varphi_2\right)$$

Quadrando e sommando ottengo

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

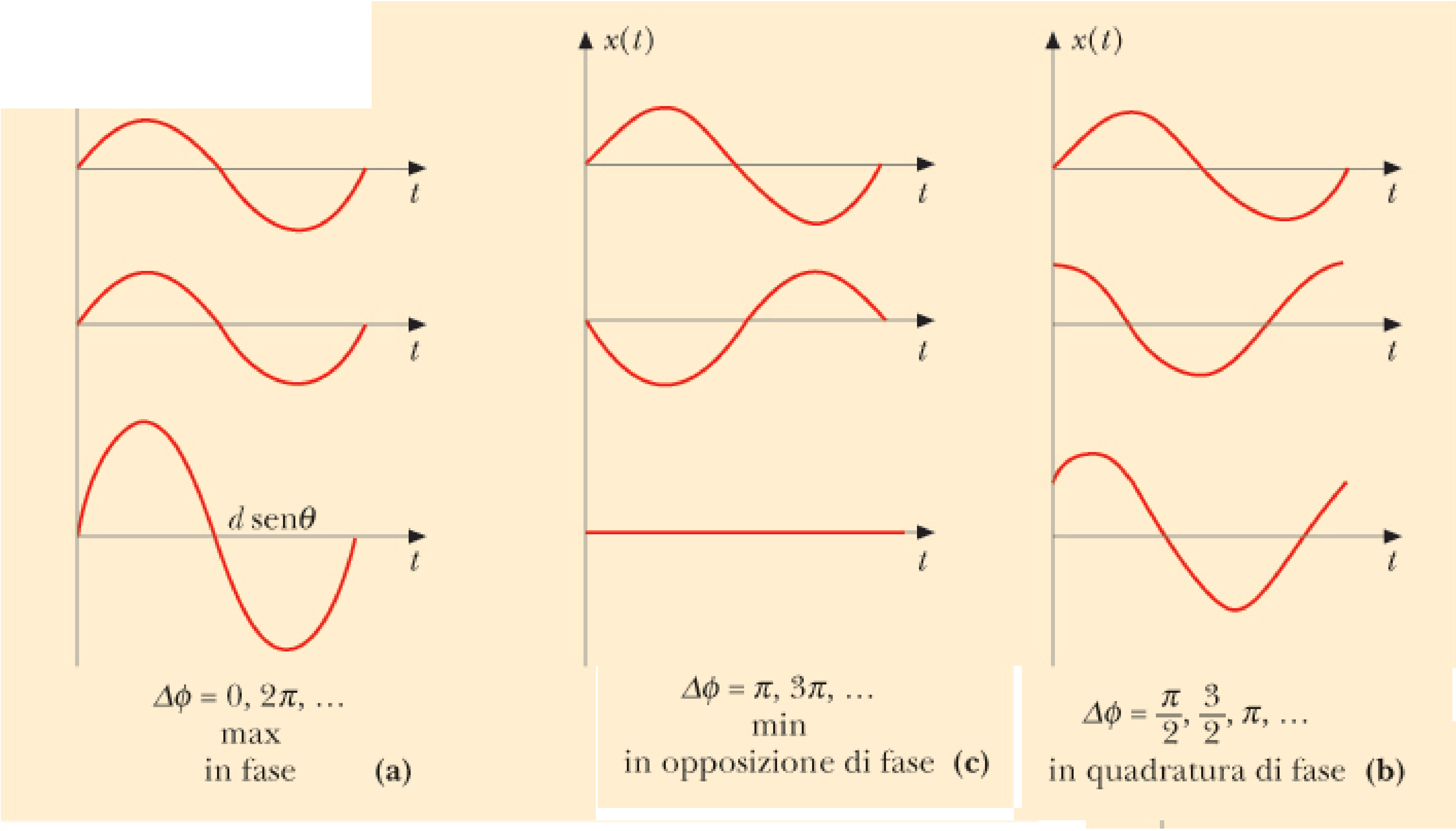
A è massima se i moti hanno stessa fase , minima se fasi differiscono di π

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{A_1\operatorname{sen}\varphi_1 + A_2\operatorname{sen}\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

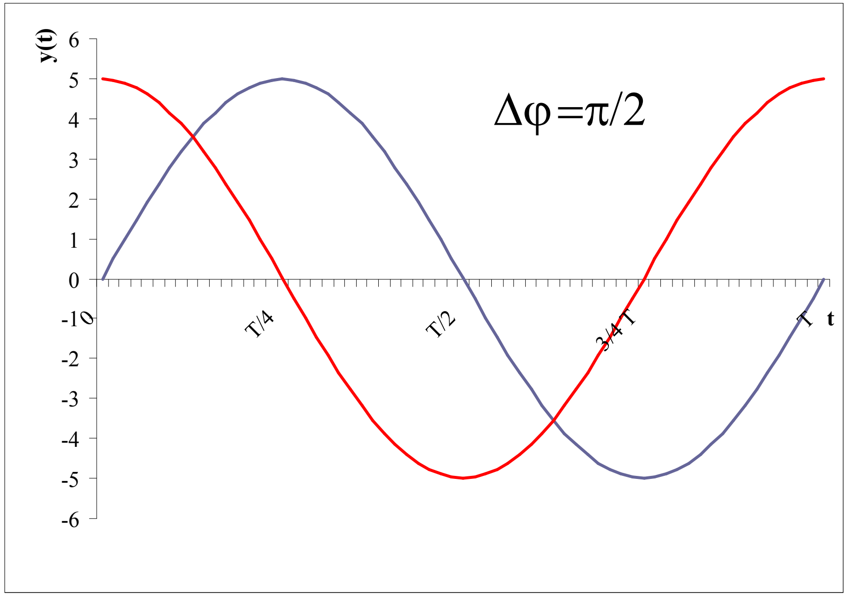
Ottengo un moto armonico con ampiezza dipendente da differenza di fase

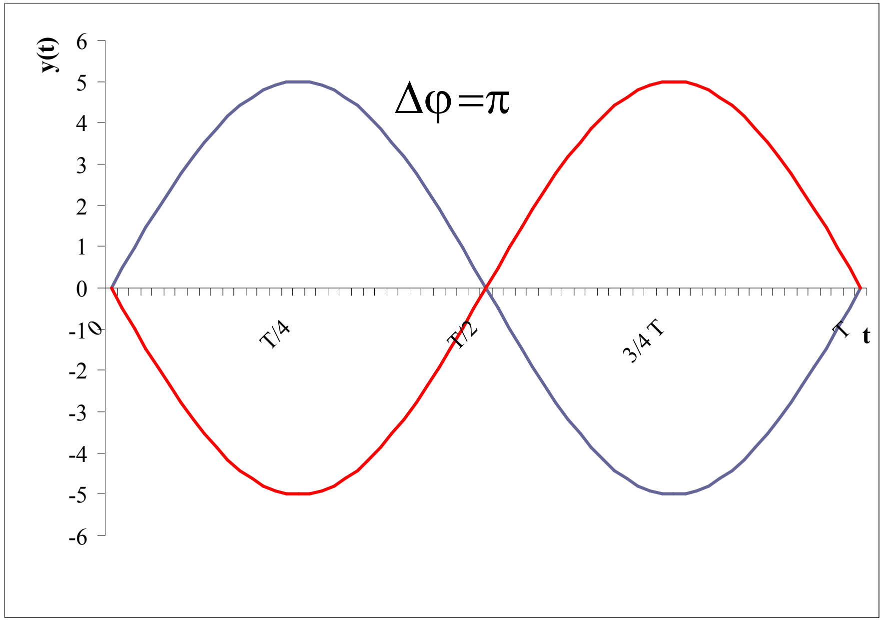
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\operatorname{sen}\left(\omega t + \psi\right)$$

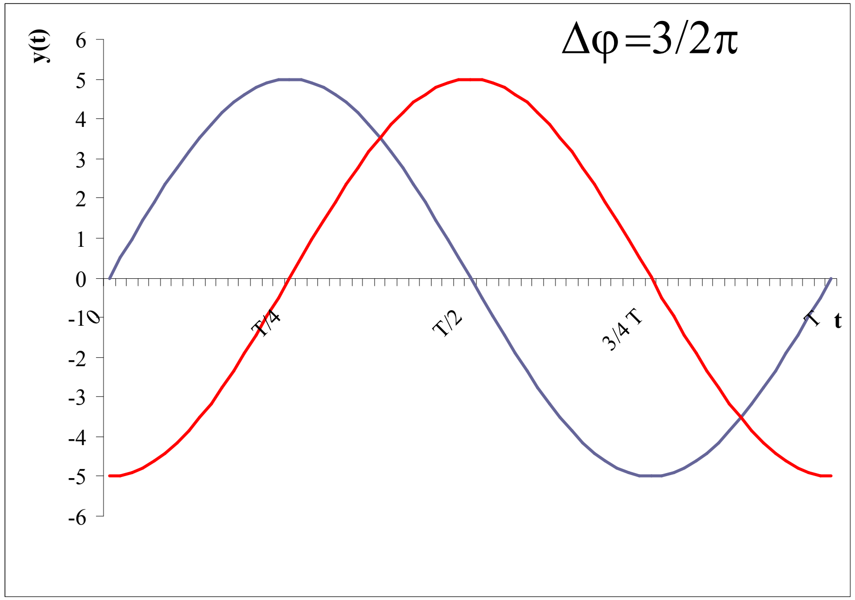
Somma di due moti armonici lungo la stessa direzione con stessa ampiezza per vari valori della differenza di fase



Differenza di fase di onde sinusoidali





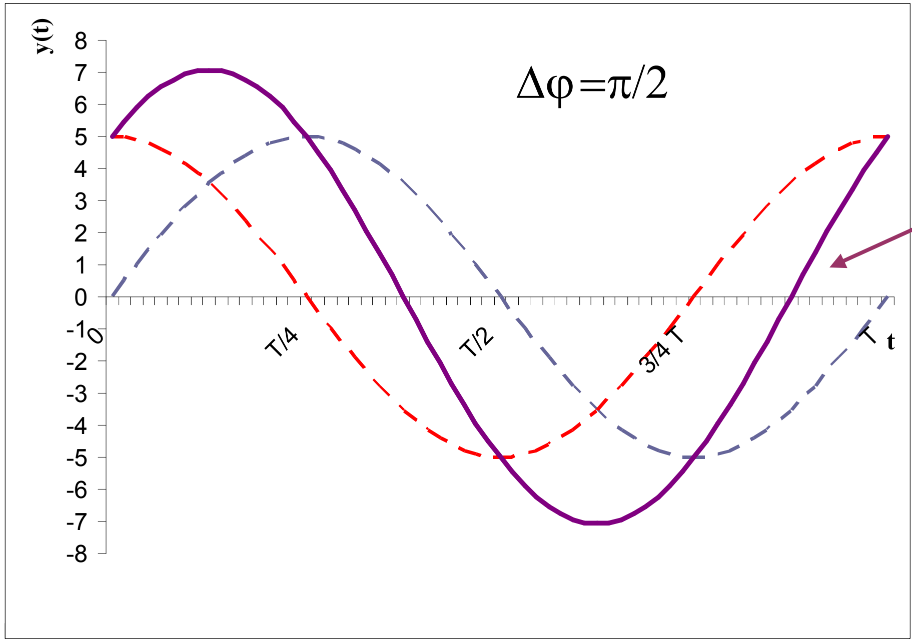


Se si considerano due segnali sinusoidali aventi la **stessa pulsazioni**, si può poi parlare di **differenza di fase** tra loro **Δφ** o **sfasamento.**

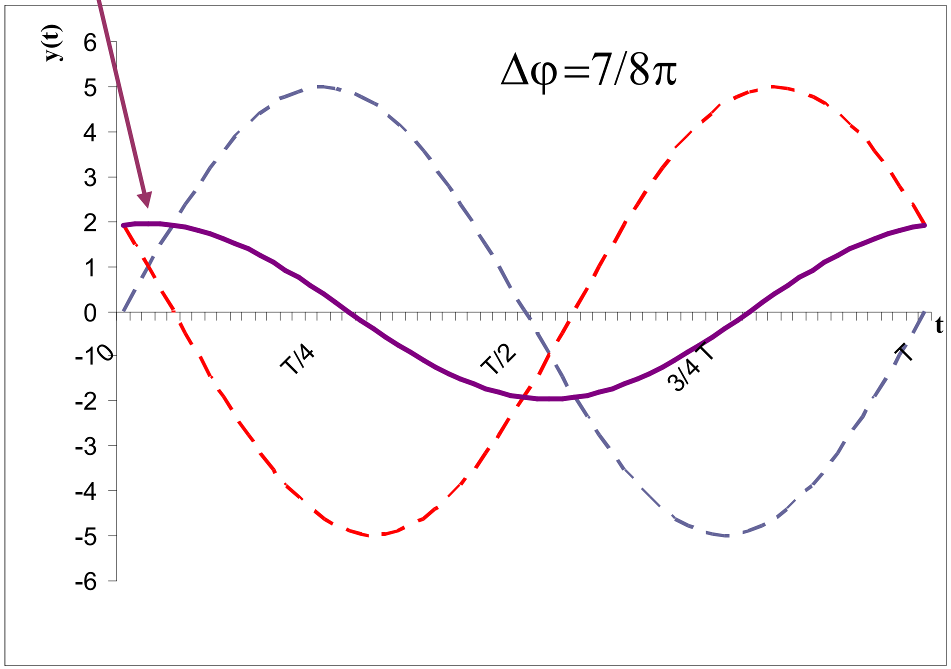
$$\mathbf{y_1(t) = A \cdot sen(\omega t + \varphi_1)}$$
$$\mathbf{y_2(t) = A \cdot sen(\omega t + \varphi_2)}$$

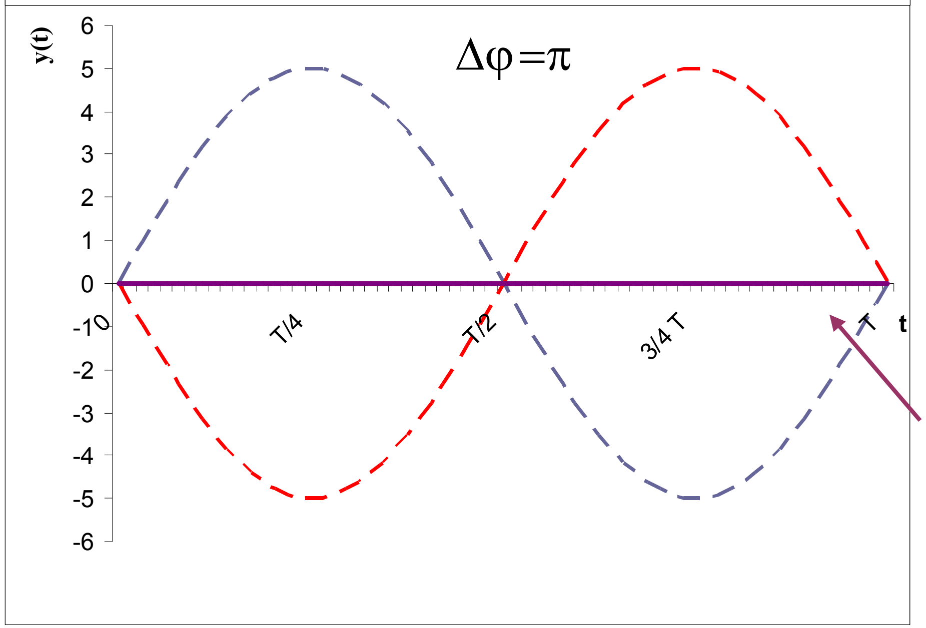
$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

Somma di due onde non in fase



Somma





Somma

Composizione di moti armonici se ho forze diverse

Se ho due moti armonici con **diversa pulsazione** (soggetti a due forze diverse) ho due diverse equazioni differenziali .

$$x_1(t) = A_1 \text{sen}\,(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = A_2 \text{sen}\,(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$x = x_1 + x_2$ non è soluzione di nessuna delle due

Per sommare uso le formule di Fresnel e ho:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = (\omega_1 t + \varphi_1) - (\omega_2 t + \varphi_2)_1 = (\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2$$

$$A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos[(\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)]}$$

Moto **non è armonico semplice**: **ampiezza è funzione del tempo** modulata: ad esempio se $A_1 = A_2 = A$ e $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\text{sen}\omega_1 t + A\text{sen}\omega_2 t = 2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\ \ \text{sen}\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t$$

E ottengo

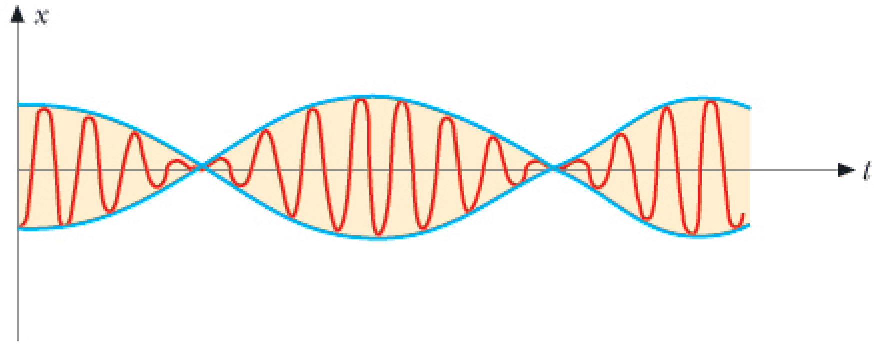
Composizione di moti armonici se ho forze diverse

$$x(t) = A(t)\,\text{sen}\,\omega t = 2A\cos\Omega t\ \ \text{sen}\,\omega t$$

Se pongo

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

$$\Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$



Moto non è armonico semplice: **ampiezza è funzione del tempo** o modulata. Fenomeno è detto **Battimento** **è** sfruttato nelle trasmissioni radio AM ω è pulsazione di onda radio e Ω pulsazione generata nel microfono

Composizione di moti armonici su asse perpendicolari

Se ho punto soggetto a due forze elastiche in direzioni ortogonali. Ho sovrapposizione di due moti armonici rettilinei che danno moto piano . Supponiamo siano con **stessa costante elastica quindi stessa pulsazione**

$$x(t) = A \operatorname{sen} \omega t$$

$$y(t) = B \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

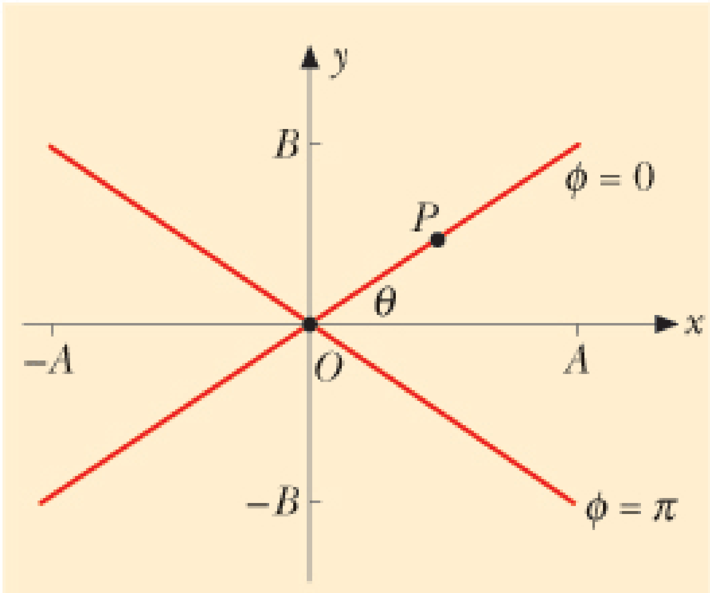
Se sono in fase e $\varphi=0$

$$x(t) = A \operatorname{sen} \omega t \ , \ y(t) = B \operatorname{sen} \omega t$$

$$\frac{x}{y} = \frac{A}{B} \Rightarrow \text{retta}$$

retta fa angolo θ con asse x. Simile se $\varphi=\pi$

$$\frac{x}{y} = -\frac{A}{B} \Rightarrow \text{retta}$$



$$OP = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A^2 + B^2} \operatorname{sen} \omega t$$

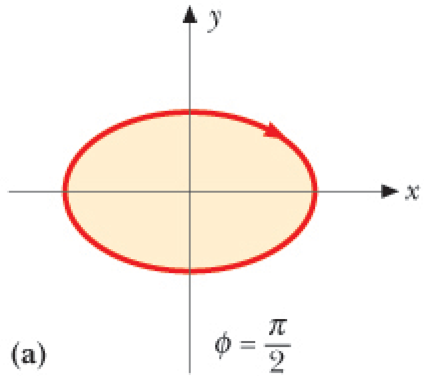
Composizione di moti armonici su asse perpendicolari

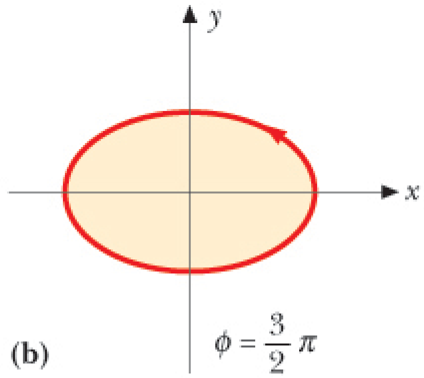
Se sono in quadratura di fase e $\varphi=\pi/2$

$$x(t) = A \operatorname{sen} \omega t$$

$$y(t) = B \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = B \cos \omega t$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = (\cos^2\omega t + \operatorname{sen}^2\omega t) = 1$$





Ellisse percorsa in senso orario (antiorario se $\varphi=3\pi/2$) .
Se A=B → cerchio
Queste figure si possono osservare con oscilloscopio. In situazioni particolari ellisse degenera in cerchi o in rette. In onde EM utilizzati per studio di polarizzazione

Somma di due moti armonici su assi ortogonali con vari valori della differenza di fase.

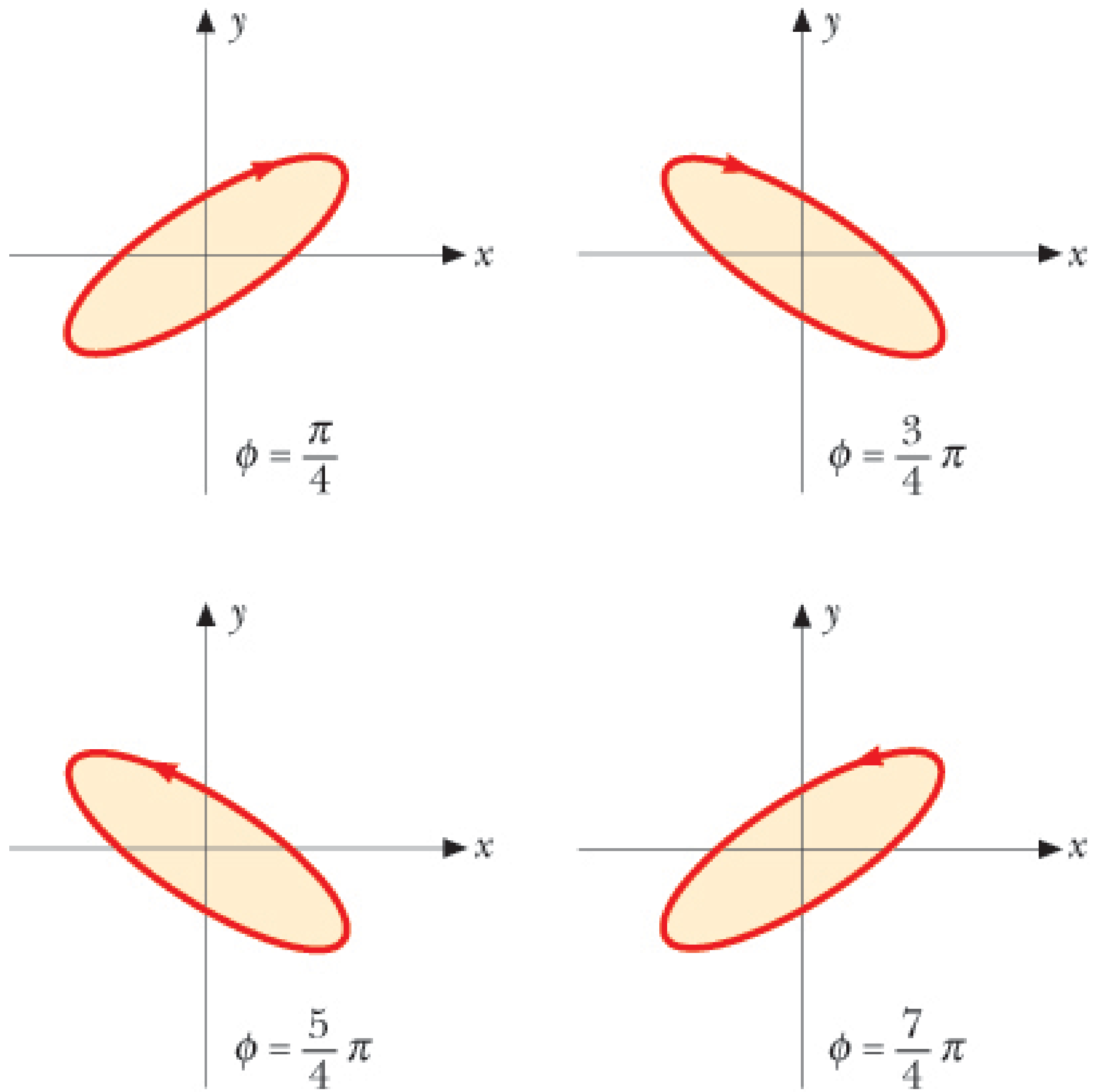
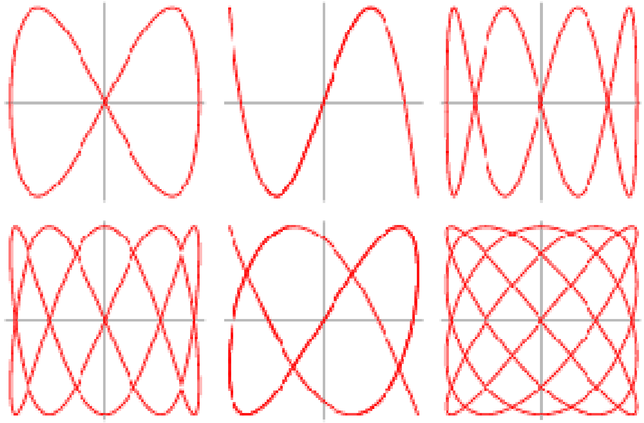


Figura di Lissajous

Una **Figura di Lissajous** è il grafico di una curva data dal sistema di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{A}_x \,\mathbf{cos}(\omega_x \mathbf{t} + \delta_x) \\ \mathbf{y} = \mathbf{A}_y \,\mathbf{cos}(\omega_y \mathbf{t} + \delta_y) \end{cases}$$



dove A_i sono le ampiezze, le ω_i le pulsazioni e le φ_i le fasi di due moti oscillatori ortogonali.

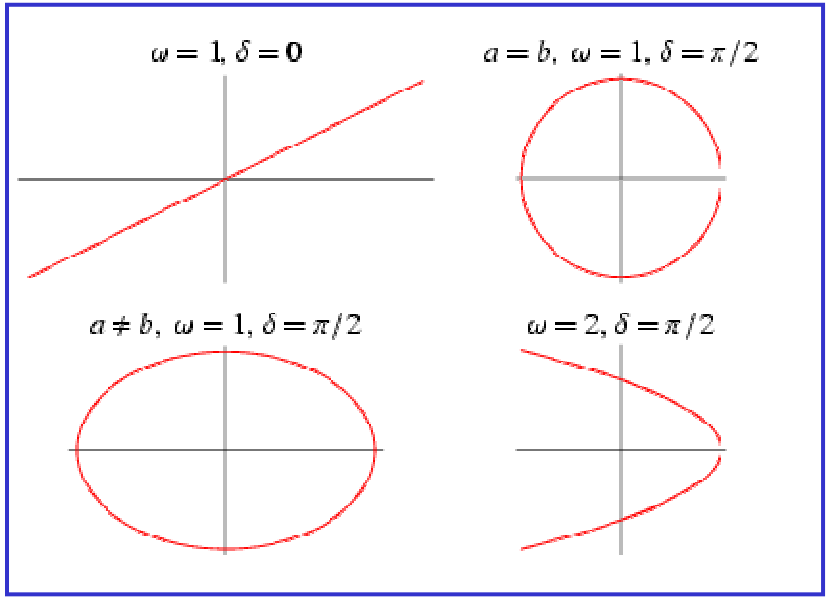
Esistono delle **figure particolari** per determinati valori del rapporto $\frac{\omega_x}{\omega_y}$ e della differenza di fase $\Delta\delta$.

Esprimendo le due equazioni come:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_x \,\mathbf{cos}(\omega \mathbf{t} + \delta)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}_y \mathbf{sent}$$

si ottengono le figure di Lissajous qui mostrate per i diversi valori di ω e δ

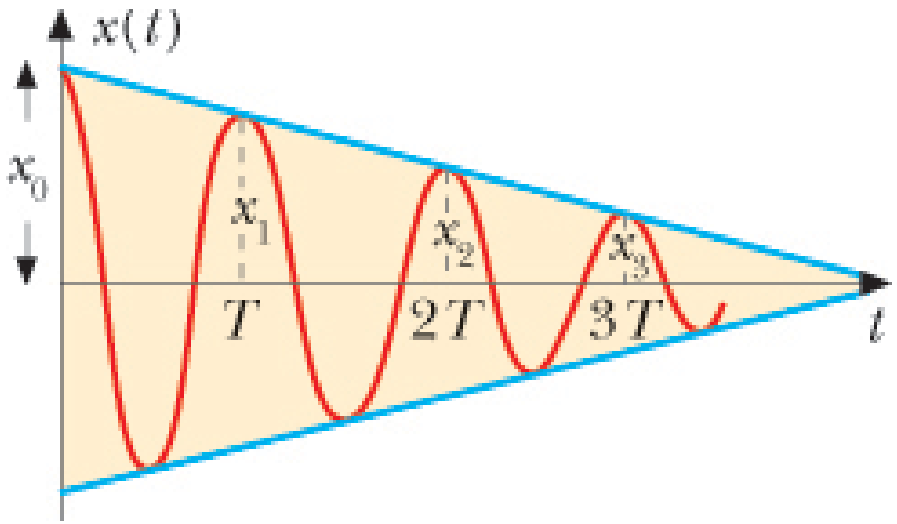


oscillatore armonico smorzato da forza di attrito

Un oscillatore armonico nella realtà dopo un certo numero di oscillazioni si ferma

Se il corpo è soggetto alla forza di attrito radente di modulo **$F=\mu mg$** sempre in direzione opposta al moto, compie oscillazioni sempre più piccole (fa meno strada per attrito) . La figura da l'idea di cosa succede

:



Il *periodo* è uno **pseudoperiodo** in quanto il moto non è armonico semplice

oscillatore armonico smorzato da forza viscosa

Riprendiamo il problema di una massa attaccata a una molla vincolata in un estremo e soggetta anche a una forza di attrito viscoso: la legge del moto diventa :

$$-kx - \lambda v = ma$$

da cui

$$-kx - \lambda \frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Se pongo $\gamma = \dfrac{\lambda}{2m}$ e $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ Ho l'equazione dell'oscillatore armonico smorzato

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0}$$

oscillatore armonico smorzato

Cerco soluzione del tipo $x = e^{\alpha t}$ Sostituisco

$$\frac{d^2(e^{\alpha t})}{dt^2} + 2\gamma\frac{d(e^{\alpha t})}{dt} + \omega_0^2(e^{\alpha t}) = 0$$

e ottengo

$$e^{\alpha t}(\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2) = 0$$

Il prodotto = 0 se parentesi è nulla (esponenziale sempre diverso da zero). Ho equazioni di 2^0 grado in α con soluzioni

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Ho tre casi possibili a cui corrispondono soluzioni diverse, che dipendono dalle relazioni tra i parametri fisici dell'oscillatore

Smorzamento forte

Se $\gamma^2 > \omega_0^2$ Quindi $\lambda^2 > 4\,m\,k$

α ha due distinti valori ambedue negativi

$$\alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \;;\; \alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

La soluzione generale è una combinazione lineare delle due ed è un esponenziale decrescente , A e B sono determinate dalle condizioni iniziali

$$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} = e^{-\gamma t}\left(Ae^{t\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}} + Be^{-t\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}\right)$$

Smorzamento critico

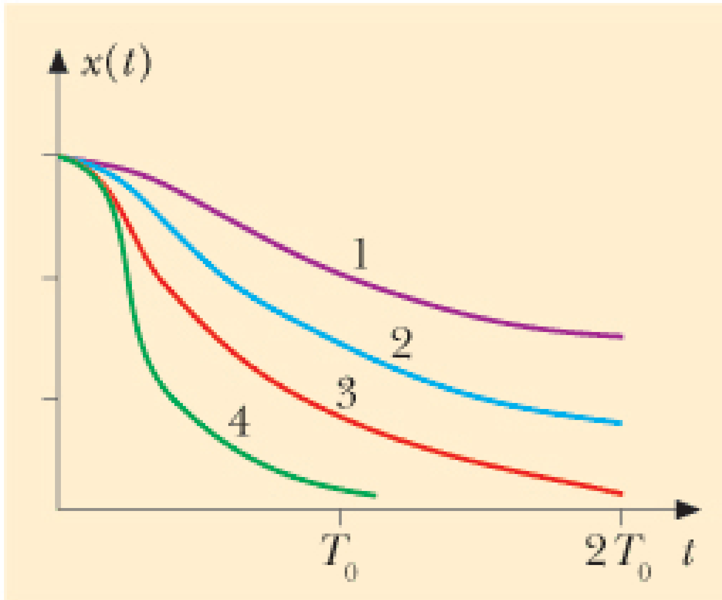
Se $\gamma^2 = \omega_0^2$ Quindi $\lambda^2 = 4\,m\,k$

α ha due soluzioni coincidenti $\alpha_1 = \alpha_2 = -\gamma$

La soluzione generale è ancora un esponenziale decrescente

$$x(t) = e^{-\gamma t}(At + B)$$

Smorzamento forte in un oscillatore armonico soggetto ad una forza di tipo viscoso forte; la curva 4 si riferisce allo smorzamento critico.



Smorzamento debole

Se $\gamma^2 < \omega_0^2$ Quindi $\lambda^2 < 4\,m\,k$

Soluzioni per α sono valori complessi e coniugati

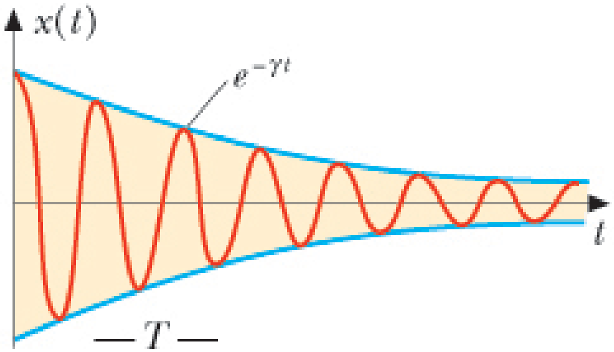
$$\alpha_1 = -\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma + i\omega;$$

$$\alpha_2 = -\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma - i\omega$$

La soluzione generale è una combinazione lineare delle due, A e B sono determinate dalle condizioni iniziali

$$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} = e^{-\gamma t}(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t})$$

Utilizzando la formula di Eulero si arriva alla soluzione



$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$\text{con } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$$

Oscillatore forzato

Riassumendo quanto visto finora il punto materiale, soggetto a forza elastica e ad attrito costante o viscoso, compie oscillazioni libere che si smorzano velocemente (ad esempio acqua in un bicchiere, pendolo senza molla, etc)

Se si vogliono oscillazioni permanenti con **ampiezza A e pulsazione ω costanti** applico una forza sinusoidale di pulsazione **ω diversa** da quella propria **ω_0** per cui l'equazione del moto diventa :

$$ma = -kx - \lambda v + F_0 \mathrm{sen}\omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0{}^2 x = \frac{F_0}{m}\mathrm{sen}\,\omega t$$

Oscillatore forzato

Se l'equazione sopra scritta ammette, come vedremo, una soluzione particolare del tipo

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

la soluzione generale è una combinazione lineare di questa e della soluzione dell'omogenea associata quindi del tipo

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) + a e^{\alpha_1 t} + b e^{\alpha_2 t}$$

Il moto totale è la somma di due moti: uno oscillante smorzato con una certa pulsazione $\boldsymbol{\omega_0}$ (quella dell'oscillatore smorzato) ed uno oscillante di ampiezza costante alla pulsazione propria della forza esterna ω_2. Il sistema ha dunque un **transiente oscillante iniziale che svanisce esponenzialmente** col tempo, lasciando il posto ad **un'oscillazione pura ad ampiezza costante**; questa oscillazione è determinata essenzialmente dalla forza esterna, e presenta uno sfasamento con essa.

Oscillatore forzato

$$ma = -kx - \lambda v + F_0 \operatorname{sen}\omega t$$

Se nell'equazione del moto provo a sostituire $x(t) = A\operatorname{sen}(\omega t + \phi)$ ottengo

$$-\omega^2 A\operatorname{sen}(\omega t + \phi) + 2\gamma\omega A\cos(\omega t + \phi) + \omega_0^2 A\operatorname{sen}(\omega t + \phi) = \frac{F_0}{m}\operatorname{sen}\omega t$$

Sviluppo seno e coseno di somma , raccolgo senωt e cosωt e ottengo che deve essere :

$$A = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \qquad \operatorname{tg}\phi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Ho moto armonico con pulsazione diversa da quella propria, posizione sfasata di φ rispetto alla forza F, A e φ dipendono dalla dinamica e non dalle condizioni iniziali

Oscillatore forzato: risposta in funzione di ω

1) Se $\omega \ll \omega_0$

$$A = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$$

$$\mathrm{tg}\phi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \approx 0 \Rightarrow \phi \approx 0$$

k, costante elastica è il parametro più importante :

$$x \approx \frac{F_0}{k}\mathrm{sen}\omega t$$

x è in fase con la forza

2) Se $\omega \gg \omega_0$

$$A = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} \approx \frac{F_0}{m\omega^2}$$

$$\mathrm{tg}\phi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \Rightarrow \phi \approx \pi$$

x è in opposizione di fase con la forza , massa è parametro importante

$$x \approx \frac{F_0}{m\omega^2}\mathrm{sen}(\omega t+\pi)$$

Oscillatore forzato: risposta in funzione di ω

3) Se $\omega = \omega_0$

$$A = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} \approx \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0}$$

$$\mathrm{tg}\phi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \approx \infty \Rightarrow \phi \approx \frac{\pi}{2}$$

γ coeff. Smorzamento è il parametro più importante: ho **risonanza** :

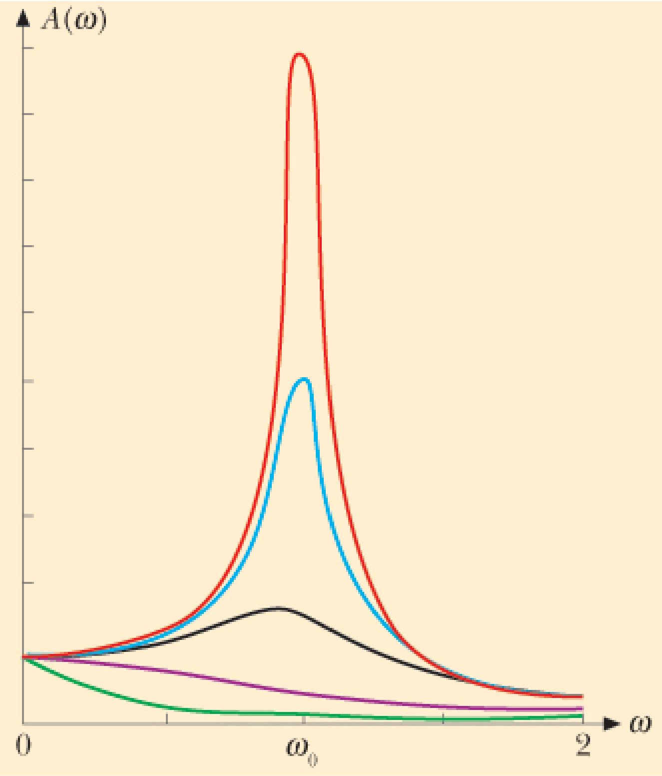
$$x \approx \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0}\cos\omega t$$

x è in quadratura di fase con la forza

Se voglio la A massima azzero dA/d ω e ottengo

$$\omega = \omega_M = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} < \omega_0$$

$$A(\omega_M) = \frac{F_0}{2m\gamma}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-2\gamma^2}} > A(\omega_0)$$



Potenza media fornita

La potenzia media fornita da forza che fa muovere oscillatore

$$P_m = \gamma m \omega^2 A^2$$

se derivo la potenza media P_m rispetto a ω ho la potenza media massima per $\omega = \omega_0$

$$P_{ris,m} = \gamma m \omega_0^2 A_{ris}^2$$

se derivo la potenza media P_m rispetto a ω ho la potenza media massima per $\omega = \omega_0$

Analisi di Fourier

Il moto armonico è importante perché tutti fenomeni che si ripetono dopo un certo T possono essere studiati con l'analisi di Fourier.

Se abbiamo una **f(t) periodica** con periodo T e in tale tempo f(t) è divisibile in intervalli di tempo in cui f(t) è continua e monotona possiamo esprimerla come somma di infiniti moti armonici :

$$f(t) = a_0 + \sum_{1}^{\infty}{}_{m} (a_m \,\mathrm{sen}\, m\omega t + b_m \cos m\omega t)$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{1}^{\infty}{}_{m} c_m \,\mathrm{sen}\, (m\omega t + \varphi_m)$$

I coefficenti **dello sviluppo di Fourier** a_m b_m c_m si calcolano da

$$a_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}\, m\omega t\, dt \;;\; b_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos m\omega t\, dt$$

Analisi di Fourier

$$c_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2} \;;\; tg\varphi_m = \frac{a_m}{b_m}$$

T è il periodo di f(t) e $\omega = 2\pi/T$, a_0 è il valor medio di f(t) dato da

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

Termine con ***m*=1** **è il primo armonico e ha pulsazione ω**

Termini con m>1 sono armonici superiori con pulsazioni 2 ω,3 ω, etc

La determinazione dei coefficienti a_m e b_m è detta Analisi di Fourier della f(t)