Meccanica

- **Meccanica studia il moto dei corpi spiegandone relazioni tra le cause che lo generano e le sue caratteristiche → leggi quantitative**
- **Se il corpo è esteso la descrizione è complessa. Iniziamo studiando il caso più semplice la dinamica del punto materiale o particella partendo dalla sua cinematica**
- **Cinematica, fa parte della Dinamica, una delle branche della fisica**
- **studia il moto dei corpi senza occuparsi delle cause che lo generano**
- **Definisce quantità necessarie a descrivere il moto quali spazio percorso, velocità, accelerazione**

CINEMATICA

studia il moto dei corpi senza occuparsi delle cause che lo generano

Alcuni concetti fondamentali:

1) EVENTO

fenomeno che accade in un punto dello spazio ed in un istante (tempo) ;

spazio e tempo caratterizzano un evento.

2) PUNTO MATERIALE

corpo privo di dimensioni **o le cui dimensioni sono piccole o trascurabili rispetto alle altre in gioco**

Moto di un punto materiale

Per la trattazione del moto cominciamo dal caso più semplice consideriamo un oggetto le cui dimensioni si possono trascurare, la cui posizione possa essere descritta localizzando un punto: parleremo di punto materiale o particella

La cinematica si occupa del moto dei sistemi descrivendone la posizione al variare del tempo.
Si deve definire operativamente il concetto di posizione

⇩

SISTEMI DI RIFERIMENTO

La posizione di un punto materiale ha senso solo se definita rispetto alla posizione di altri corpi presi come riferimento.

Per descrivere il moto occorre servirsi di un sistema di riferimento rispetto al quale si definisce la posizione del corpo studiato e il suo movimento.

Esempio la stanza nella quale ci troviamo.

La scelta del sistema di riferimento è del tutto arbitraria e si fa in base al tipo di problema.

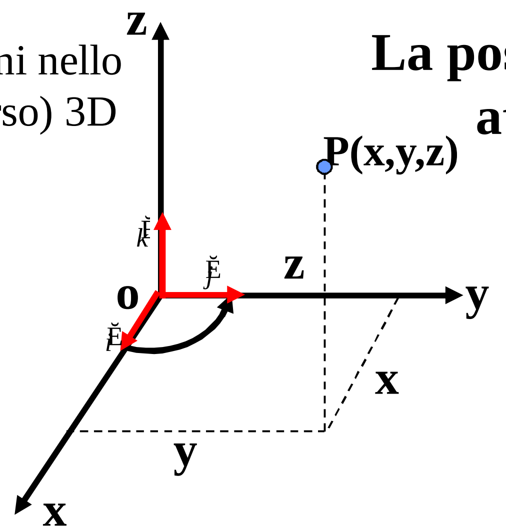
Sistema di coordinate permette la descrizione matematica del movimento rispetto al sistema di riferimento. Il sistema di coordinate può essere pensato come ***ancorato*** al sistema di riferimento.

Possiamo scegliere fra sistemi di coordinate quello che **meglio** si presta alla descrizione del **problema.** I più usati anche per la loro semplicità matematica sono:

- **Sistema di coordinate cartesiane ortogonali**
- **Sistema di coordinate polari**

SISTEMA DI COORDINATE CARTESIANE

assi coordinati cartesiani nello spazio (sistema destrorso) 3D



La posizione di un punto P, si può descrivere attraverso le sue *cartesiane* x_P, y_P, z_P

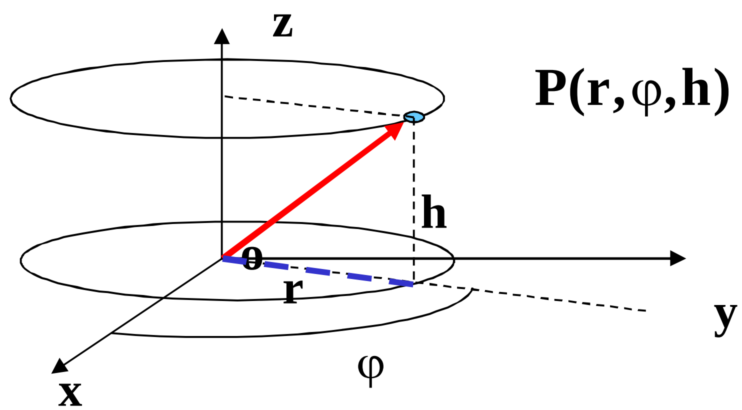
versori degli assi: $\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$

ALTRI SISTEMI DI RIFERIMENTO

1. Cilindriche

$$
\begin{cases}
x = r \cos \varphi \\
y = r \sin \varphi \\
z = h
\end{cases}
$$

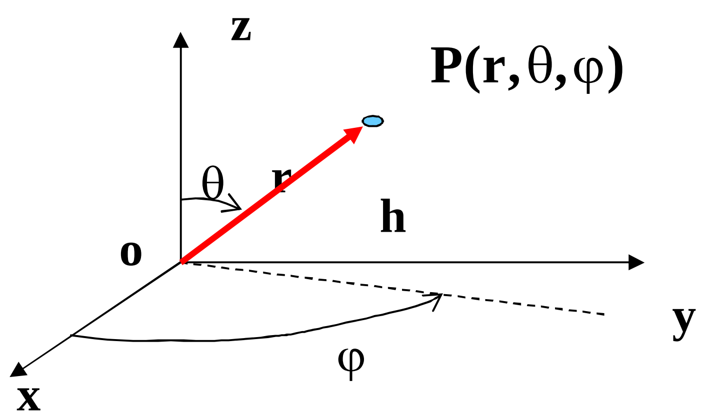
$$
\begin{array}{l}
0 \le r \le \infty \\
-\infty \le h \le -\infty \\
0 \le \varphi \le 2\pi
\end{array}
$$



2. Polari sferiche

$$
\begin{cases}
x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\
y = r \sin \vartheta \sin \varphi \\
z = r \cos \vartheta
\end{cases}
$$

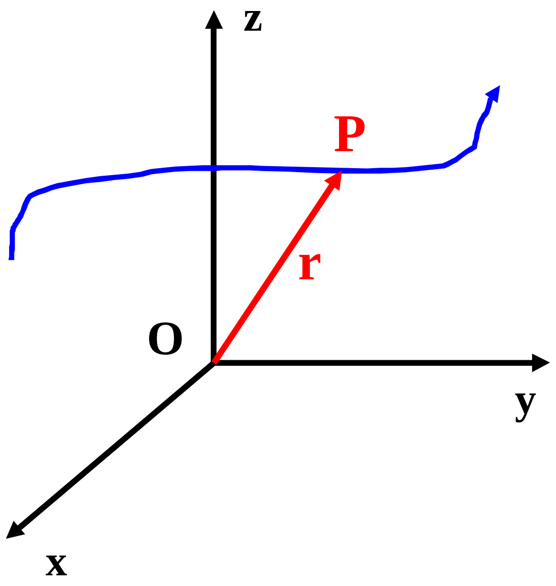
$$
\begin{array}{l}
0 \le |r| \le \infty \\
0 \le \vartheta \le \pi \\
0 \le \varphi \le 2\pi
\end{array}
$$



CONCETTI FONDAMENTALI in CINEMATICA

***Traiettoria*: è il luogo dei punti occupati successivamente dal punto in movimento. In genere è una linea curva continua. Se la linea è chiusa il moto è limitato e il punto percorre continuamente la stessa traiettoria, come nel caso delle orbite planetarie.**

Lo studio della variazione della posizione in funzione del tempo porta a definire il concetto di *velocità*, lo studio della variazioni della velocità con il tempo introduce lô*accelerazione*.

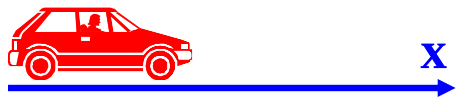


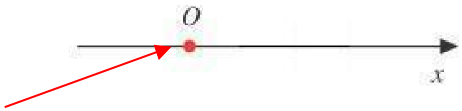
Le grandezze fondamentali in cinematica sono dunque

lo spazio, la velocità, lôaccelerazione ed il tempo;

Il tempo viene sovente utilizzato come variabile indipendente, in funzione del quale si esprimono le altre grandezze. Il tempo non è mai negativo.

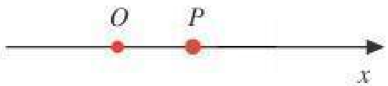
MOTO UNIDIMENSIONALE



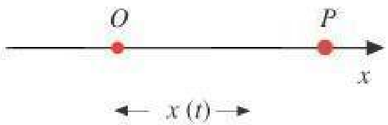


O *indica lôorigine del Sistema di Riferimento unidimensionale*

Il moto più semplice da studiare è il moto rettilineo. Esso si svolge lungo una retta sulla quale vengono fissati arbitrariamente unôorigine e un verso

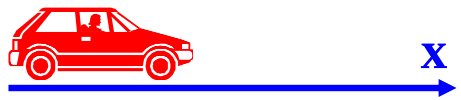


Unôauto (che assimilo ad un punto) P si muove lungo lôasse x. Il suo moto è descrivibile utilizzando una sola coordinata x(t)



Lôinsieme dei punti occupati successivamente viene indicato con x(t)
La funzione del tempo x(t) definisce
la legge oraria del moto

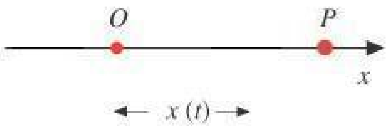
MOTO UNIDIMENSIONALE

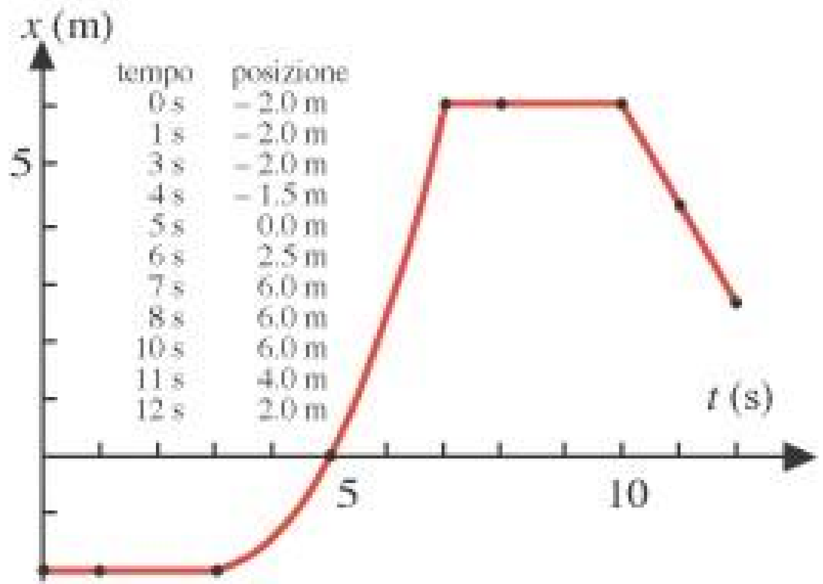


La legge oraria del moto può essere ricavata sperimentalmente ponendo lungo la retta dei traguardi con dispositivi a fotocellula collegati ad un cronometro. In questo modo si possono ottenere coppie di valori x_i t_i e cercare una relazione tra x e t, cioè la funzione x(t).

Le misure possono essere riportate su un grafico per ottenere così *il diagramma orario del moto*, che corrisponde al grafico della funzione x(t).

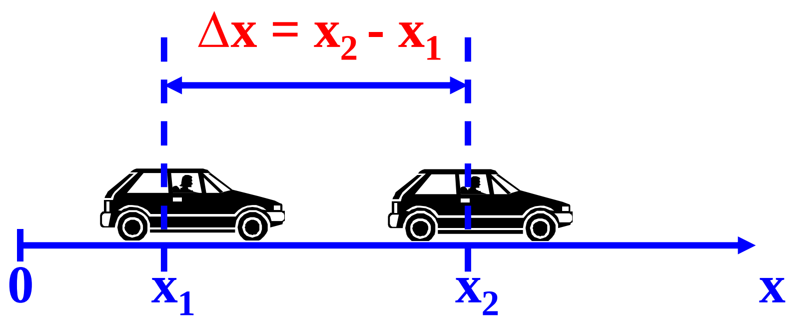
Esempio





Posizione e spostamento nel moto rettilineo

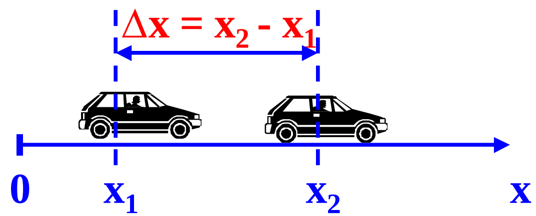
Si supponga che il punto (nella figura unôautomobile) sia nella posizione x_1 in un istante t_1 e nella posizione x_2 in un istante successivo t_2.



La variazione di posizione dellôauto, $\Delta x = x_2 - x_1$

rappresenta lo spazio percorso nellôintervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$

Velocità media in una dimensione



Eô possibile caratterizzare la rapidità con cui avviene lo spostamento tramite il concetto di velocità media

Definizione di velocità media: rapporto fra lo spostamento Δx compiuto in un intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ e lôintervallo di tempo stesso.

$$v_{media} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

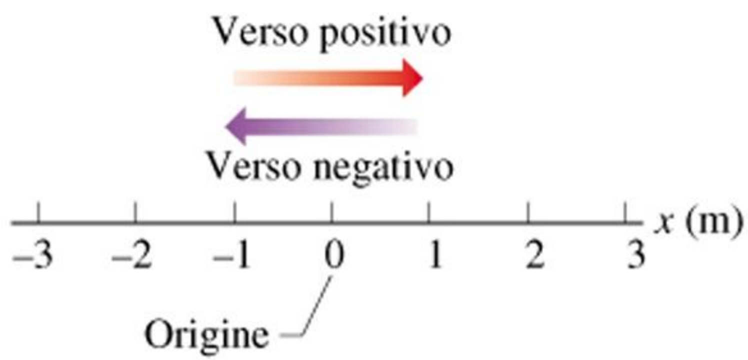
Dimensione della grandezza velocità: $[v] = [LT^{-1}]$

Lôunità di misura SI è il m/s.

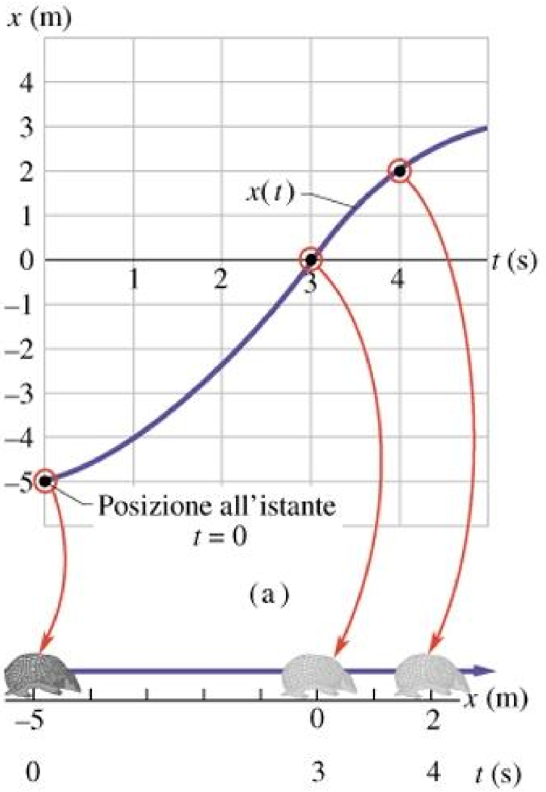
1 Km/ora → 1000/3600 m/s → 1/3,6 m/s =0.278 m/s

lo spostamento e la velocità media possono essere positivi o negativi, a seconda che x_2 sia maggiore o minore di x_1:

un valore positivo indica un moto verso destra e un valore negativo un moto verso sinistra.



Δx e v hanno lo stesso segno



Significato della velocità media

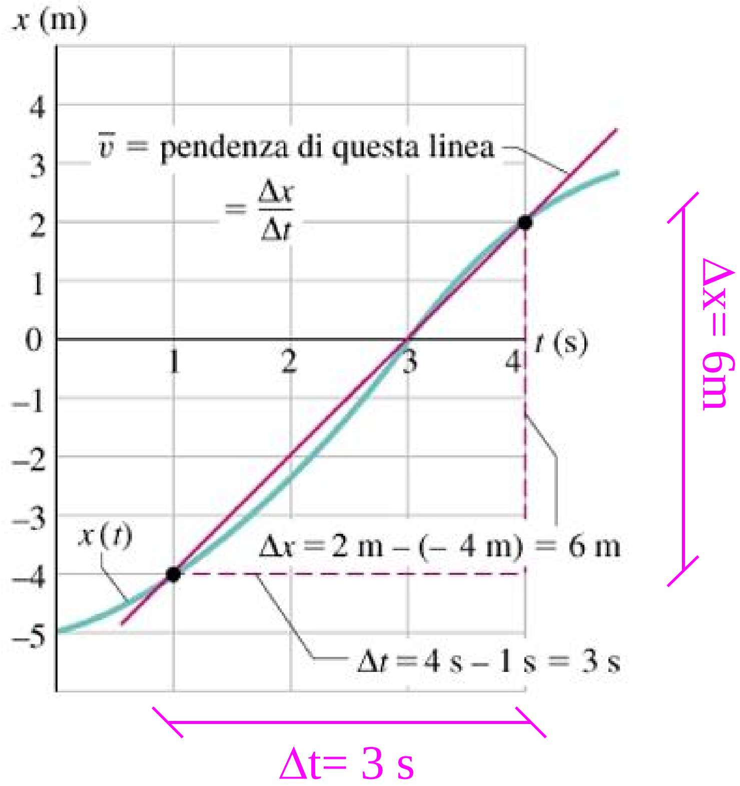
x_1= -4 m t_1=1 s

x_2= 2 m t_2=4 s

Δx= (2-(-4))=6m

Δt= 4-1=3 s

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6m}{3s} = 2\frac{m}{s}$$



La posizione iniziale P_1 e quella finale P_2 sono congiunte da un segmento rettilineo;
la velocità media è la pendenza Δx/Δt di questo segmento e dipende dall’intervallo di tempo considerato.

La velocità media fornisce un’informazione complessiva, ma non dà quasi nessuna indicazione sulle caratteristiche del moto

Dalla velocità media alla VELOCITÀ ISTANTANEA

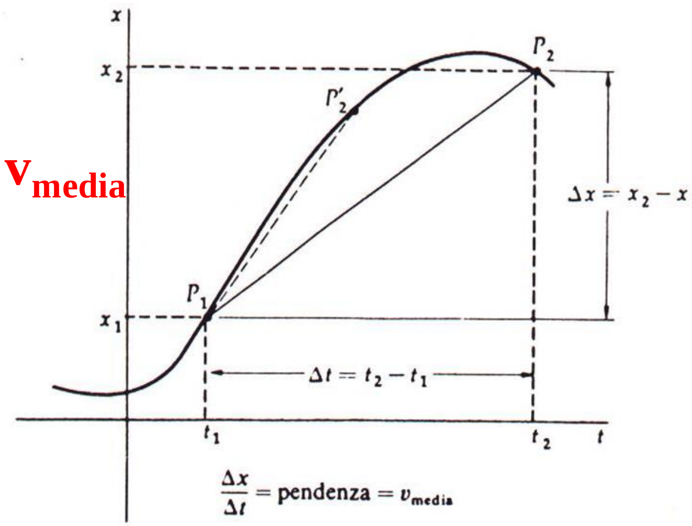
Per avere maggiori informazioni sulla legge oraria x(t) e sulle sue variazioni, lôintervallo Δx può essere suddiviso in numerosi piccoli intervalli

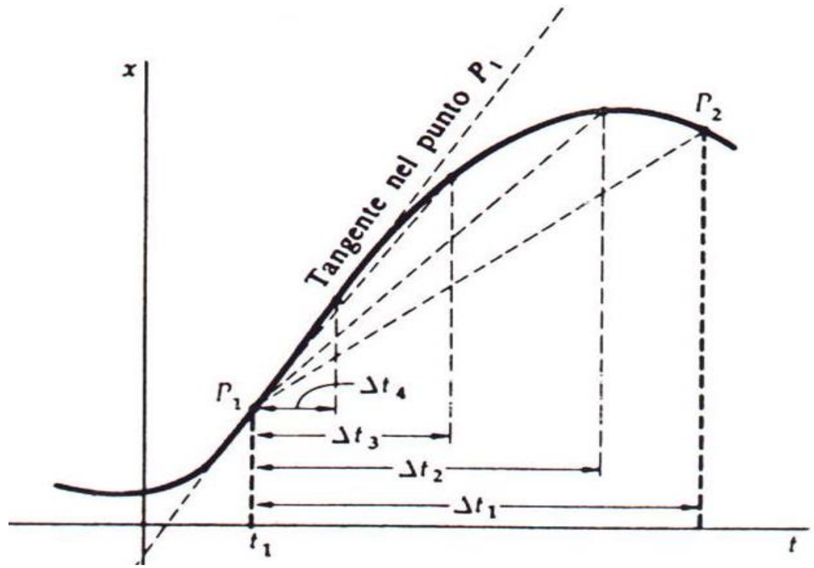
$(\Delta x)_1 \quad (\Delta x)_2 (\Delta x)_3 (\Delta x)_4$ **é . $(\Delta x)_n$ percorsi nei tempi** $(\Delta t)_1 \ (\Delta t)_2 \ (\Delta t)_3 \ (\Delta t)_4$ **é . $(\Delta t)_n$**

Le corrispondenti velocità: $v_i = {(\Delta x)_i}/{(\Delta t)_i}$ **in generale non sono uguali alla velocità media v_m**

Il processo di suddivisione in spazi sempre più piccolo può essere continuato fino a considerare spazi infinitesimi, arrivando così alla definizione di *velocità istantanea*:

v allôistante t:→ $v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ **→v è derivata di spazio rispetto al tempo**





VELOCITÀ ISTANTANEA

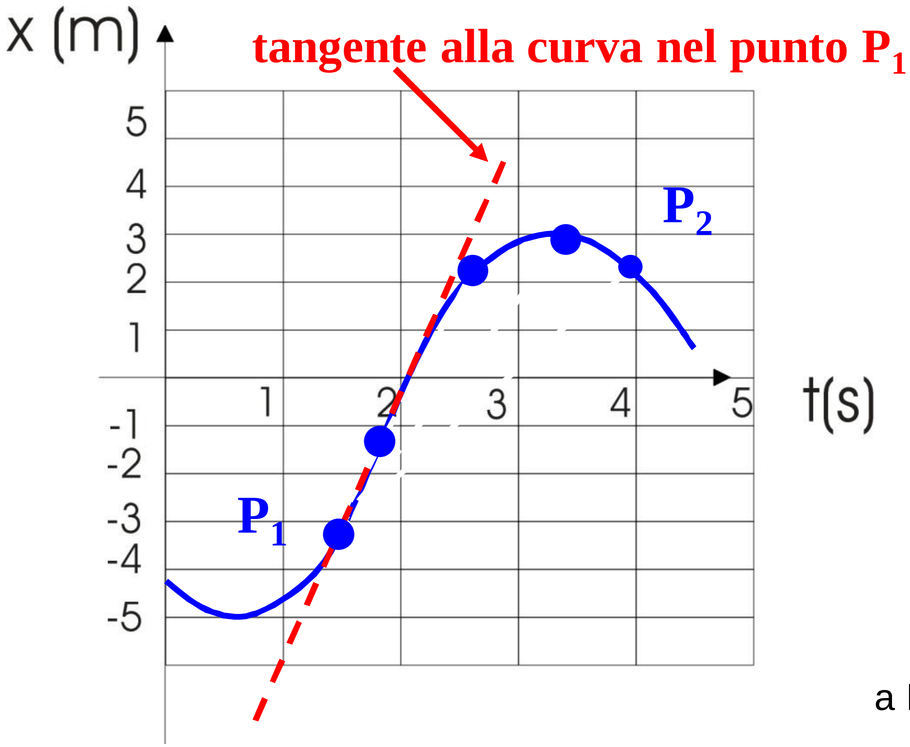
Rappresenta la rapidità di variazione temporale della posizione nellôistante t

***Definizione di velocità istantanea*: rapporto fra lo spostamento compiuto in un intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ e lôintervallo di tempo stesso quando lôintervallo di tempo $\Delta t \to 0$**

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

Interpretazione geometrica della velocità scalare istantanea:

coefficiente angolare della tangente alla curva x(t) nel punto di ascissa t



La velocità istantanea è, per definizione, la pendenza di questa retta.
Dal grafico si capisce immediatamente il segno di v

Il segno della velocità indica il verso del moto sullôasse x.

Se v>0 ⇨ **Coordinata x cresce**

Se v<0 ⇨ **Coordinata x decresce**

Cinematica: moto rettilineo uniforme

Il caso più semplice di moto è quello rettilineo uniforme. In questo caso il moto avviene lungo una retta con velocità costante.

$$\mathrm{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{costante}$$

Esempio:

Supponendo in prima approssimazione che l'autostrada Torino-Piacenza sia rettilinea (a parte i lavori in corso…..) e viaggiando di moto rettilineo uniforme con velocità di 100 km/h, quanto tempo ci vorrà per compiere il tragitto che è di circa 160 km?

$$\mathrm{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Longrightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{\mathrm{v}}$$

$$\Delta t = \frac{160 \bullet 10^3 m}{\frac{100}{3{,}6}} = 1{,}6 \bullet 10^3 \bullet 3{,}6 = 5{,}7610^3 s = 96 \min = 1{,}6 \text{ore}$$

VELOCITÀ e SPAZIO

Data x(t) → v(t)

La velocità istantanea può essere funzione del tempo v(t). Se è nota la legge oraria del moto, ovvero la funzione x(t), si può ottenere la funzione velocità istantanea con *unôoperazione di derivazione* che sappiamo sempre fare

$$\mathbf{v(t) = \frac{dx(t)}{dt}}$$

Data v(t) →x(t)

Eô possibile risolvere il problema inverso, ovvero ricavare la funzione x(t), se è nota la dipendenza dal tempo della velocità istantanea v(t). Per farlo è necessario utilizzare lô*operazione* inversa cioè lô*integrazione*

$$\mathbf{dx = v(t)dt} \Longrightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt \Longrightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt$$

Questa relazione permette il calcolo dello spazio percorso qualunque sia il tipo di moto. Il termine x_0 rappresenta la posizione iniziale del punto, occupata nellôistante t_0

Velocità: ordini di grandezza

Luce	$3.0\ 10^{8}\ ms^{-1}$
Recessione di una quasar	$2.7\ 10^{8}\ ms^{-1}$
Elettrone attorno al nucleo	$2.2\ 10^{6}\ ms^{-1}$
Terra attorno al Sole	$3.0\ 10^{4}\ ms^{-1}$
Aereo supersonico	$7.1\ 10^{2}\ ms^{-1}$
Rotazione della Terra(equatore)	$4.6\ 10^{2}\ ms^{-1}$
Moto casuale delle molecole di aria	$4.5\ 10^{2}\ ms^{-1}$
suono in aria	$3.3\ 10^{2}\ ms^{-1}$
Ghepardo	$28\ ms^{-1}$
Uomo (max)	$11\ ms^{-1}$
chiocciola	$10^{-3}\ ms^{-1}$
ghiacciaio	$10^{-6}\ ms^{-1}$

Accelerazione media

Quando la velocità istantanea di una particella varia nel tempo si dice che la particella accelera.

Lôaccelerazione è la rapidità di variazione della velocità.

Lôaccelerazione media per un particolare intervallo di tempo Δt è definita come il rapporto $\Delta v / \Delta t$:

$$a_{\text{media}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{\Delta t}$$

Dimensione della grandezza accelerazione:

$$[a] = \left[LT^{-2}\right]$$

Lôunità di misura SI è il m/s^2.

Lôaccelerazione può essere positiva o negativa (decelerazione)

Se $a>0$ $\Rightarrow$ **Velocità aumenta**

Se $a<0$ $\Rightarrow$ **Velocità diminuisce**

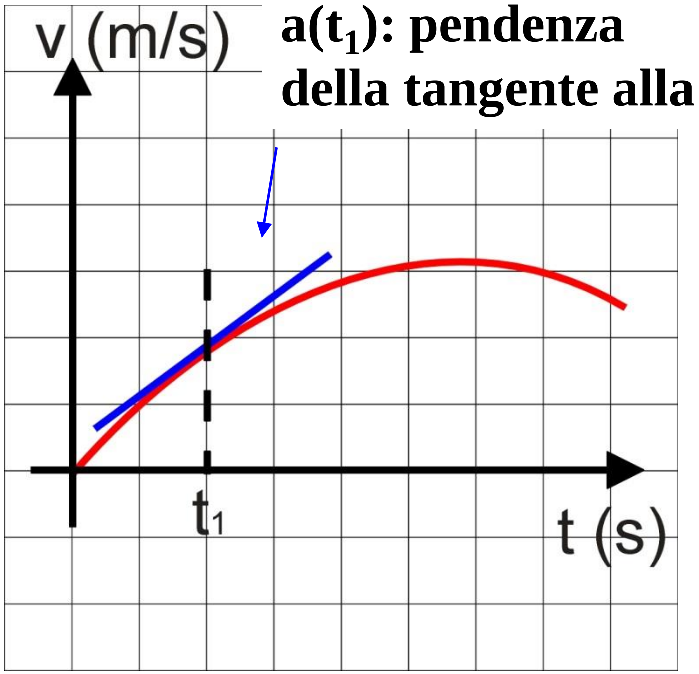
Accelerazione istantanea

Con un procedimento analogo a quello usato per passare dalla velocità media alla velocità istantanea, si può arrivare alla definizione di accelerazione istantanea:

Lôaccelerazione istantanea è il limite a cui tende lôaccelerazione media quando Δt tende a zero:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Interpretazione geometrica della accelerazione istantanea:
coefficiente angolare della tangente a curva v(t) nel punto di ascissa t



$a(t_1)$: pendenza della tangente alla curva allôistante t_1.

Lôaccelerazione istantanea ad un certo istante è la pendenza della retta tangente alla curva in quellôistante.

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

ACCELERAZIONE, VELOCITÀ e SPAZIO

Da x(t) → a(t)

Si può ottenere la funzione accelerazione con unôoperazione di derivazione della funzione velocità, ovvero *con una doppia derivazione* della funzione spazio

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

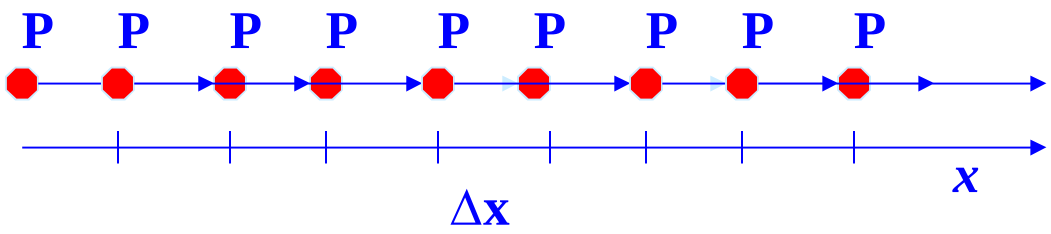
Da a(t) → x(t)

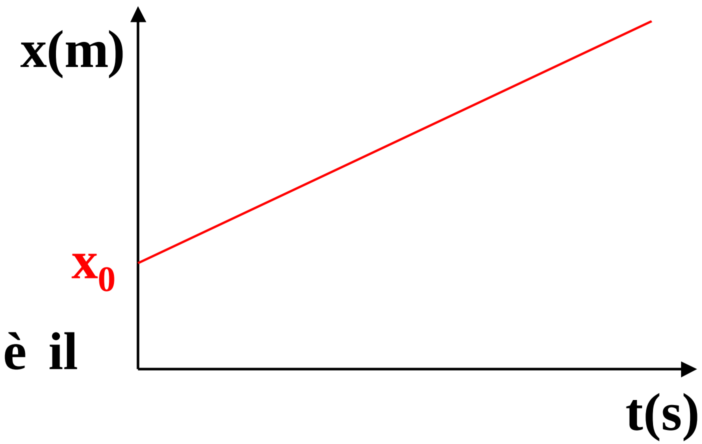
Eô possibile ricavare la funzione v(t), se è nota la dipendenza dal tempo della velocità istantanea a(t). Per farlo è necessario utilizzare *operazioni di integrazione*

$$dv = a(t)dt \Longrightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)dt \Longrightarrow v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

Operando con un ulteriore integrazione ho la funzione spazio: $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$

Moto rettilineo uniforme

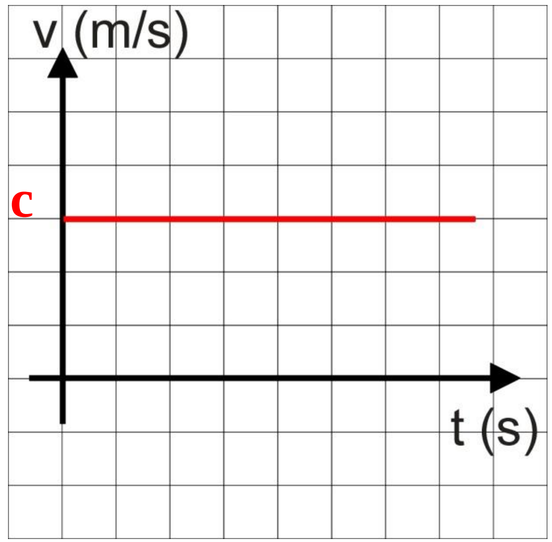




Il caso più semplice di moto unidimensionale è il moto rettilineo uniforme

in cui il punto materiale ha *velocità costante*.

- **velocità istantanea e velocità media coincidono**
- **lôaccelerazione è nulla**



$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = c : \text{costante}$$

$$\Downarrow$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow a = 0$$

Moto rettilineo uniforme: da velocità → spazio

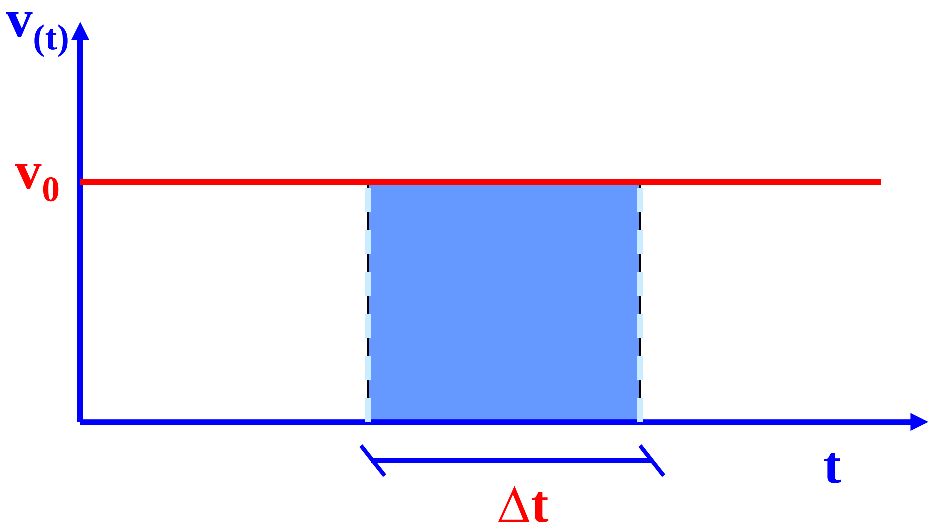
$$v = v_0 \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = v_0$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)$$

Legge oraria del moto rettilineo uniforme

Interpretazione grafica* *dellôespressione per lo spazio percorso in funzione del tempo

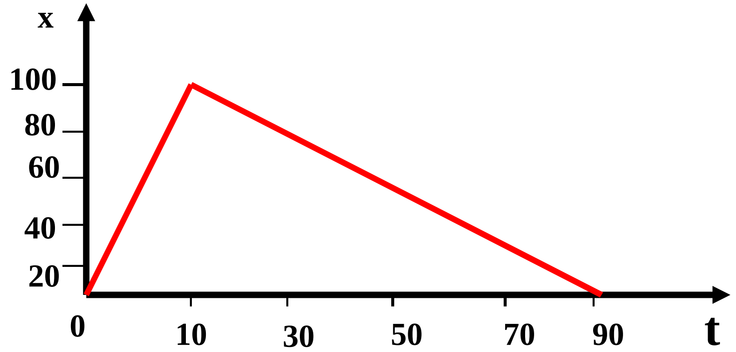
Si considera lo spazio Δx percorso in un $\Delta t = t_1 - t_0$: $\Delta x = v_0(t_1 - t_2) = v_0 \Delta t$



Lo spazio percorso Δx è pari allôarea sottesa dalla curva che esprime la velocità in funzione del tempo (in questo caso una retta parallela allôasse t).

Esempio

Un atleta corre i 100 m su una pista rettilinea in 11 s e poi ritorna comminando al punto di partenza in 80 s. Quanto valgono la velocità nei primi 11 secondi? Quanto vale la velocità negli ultimi 80 secondi? Quanto vale la velocità media su tutto il percorso?



Tra t=0 e t=11s il moto è rettilineo uniforme

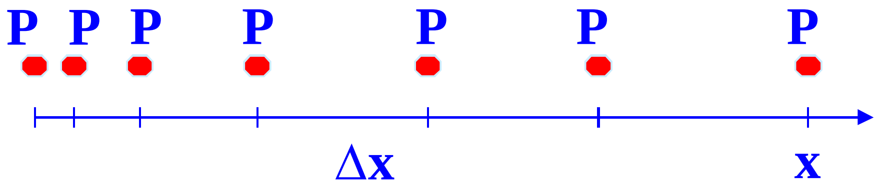
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{media 11}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{100}{11} = 9.1\,\text{ms}^{-1}$$

Tra t=11s e t=91 il moto è rettilineo uniforme

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{media 80}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-100}{80} = -1.2\,\text{ms}^{-1}$$

$$v_{\text{media 91}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0}{91} = 0\,\text{ms}^{-1}$$

Moto con accelerazione costante



Un altro caso notevole di moto unidimensionale è il moto uniformemente accelerato, in cui lôaccelerazione è costante.

Å **accelerazione istantanea e accelerazione media coincidono**

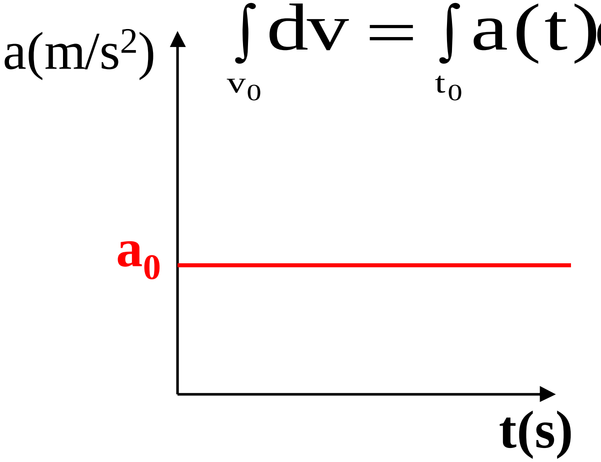
- **la velocità varia linearmente con il tempo.**

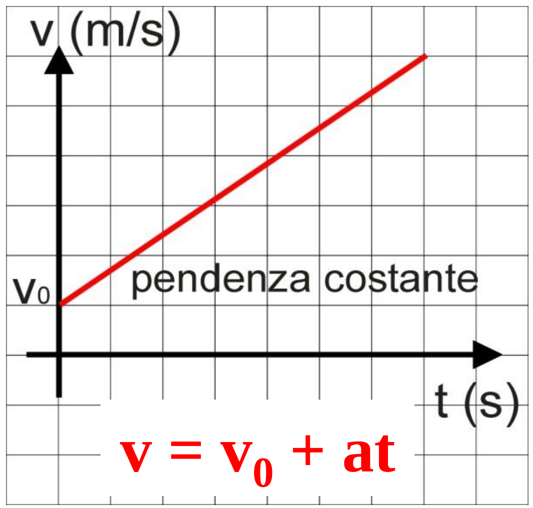
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a_0 = \text{costante}$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)dt \Longrightarrow v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

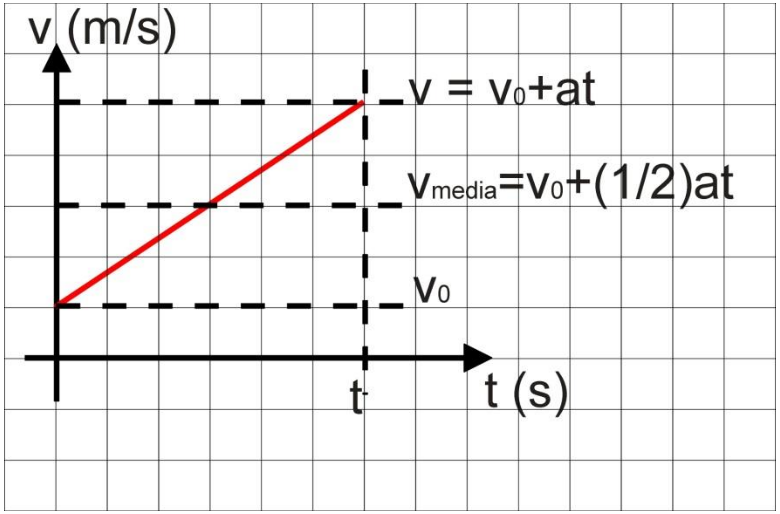
$$\Downarrow$$

$$v(t) = v_0 + a_0(t - t_0)$$



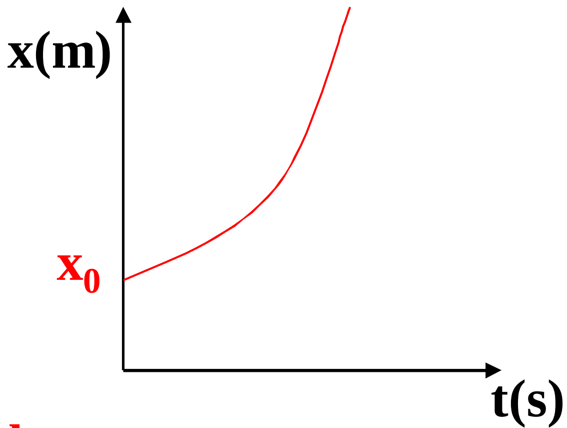


Moto con accelerazione costante



velocità media

spazio



Ricaviamo la legge oraria del moto uniformemente accelerato

$$a(t)=a_0 \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_0 + a_0(t-t_0)$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)dt \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t}[v_0 + a_0(t-t_0)]dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 dt + \int_{t_0}^{t} a_0(t-t_0)dt$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a_0(t-t_0)^2$$

Se $t_0=0$: $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2$

Riassumendo: VELOCITÀ e SPAZIO con a costante

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v(t) = v_0 + a(t - t_0)}$$

Operando con un ulteriore integrazione ho la funzione spazio:

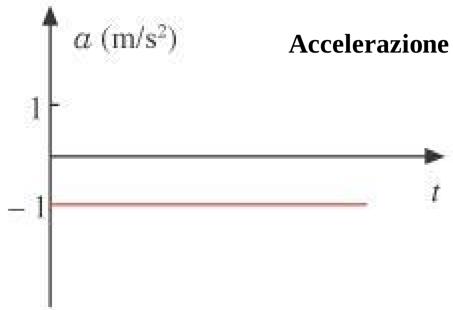
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt \quad \Longrightarrow \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (v_0 + at)dt$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2}$$

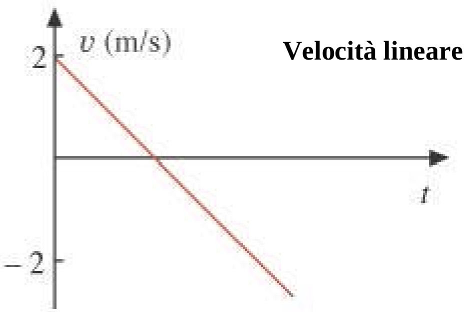
Grafici di Spazio, Velocità e Accelerazione

Moto uniformemente accelerato

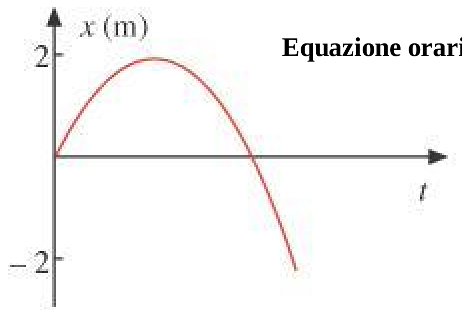
$a = -1\ m/s^2$
$v_0 = 2\ m/s$,
$x_0 = 0\ m$



Accelerazione costante negativa

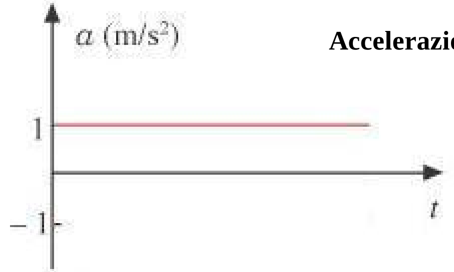


Velocità lineare (coeff. ang. negativo)

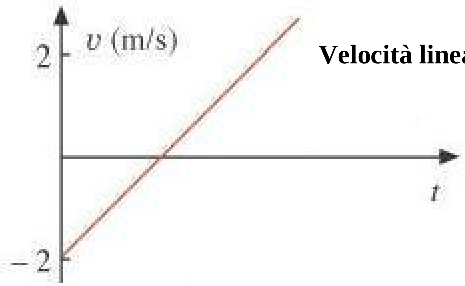


Equazione oraria parabolica discendente

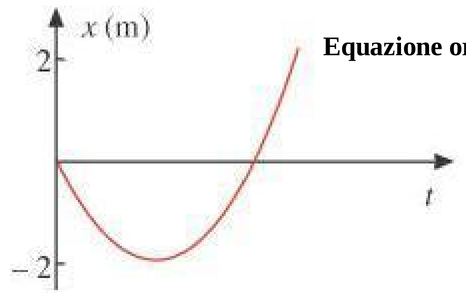
$a = 1\ m/s^2$
$v_0 = -2\ m/s$,
$x_0 = 0\ m$



Accelerazione costante positiva



Velocità lineare (coeff. ang. positivo)



Equazione oraria parabolica acendente

Velocità e spazio nel moto ad accelerazione costante

(assumendo che lôistante iniziale sia t = 0, ricavo il tempo dalla)

$$v(t) = v_0 + at \Rightarrow \quad t = \frac{v(t) - v_0}{a} \qquad\qquad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow$$

Sostituendo il tempo →

$$x = x_0 + v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}\cancel{a}\frac{(v - v_0)^2}{a^{\cancel{2}}} \Rightarrow$$

$$a(x - x_0) = v_0 v - v_0^2 + \frac{1}{2}(v^2 - 2vv_0 + v_0^2) \Rightarrow$$

$$a(x - x_0) = \cancel{v_0 v} - v_0^2 + \frac{v^2}{2} - \cancel{vv_0} + \frac{v_0^2}{2} \Rightarrow \quad a(x - x_0) = -v_0^2 + \frac{v^2}{2} + \frac{v_0^2}{2} \Rightarrow$$

$$a(x - x_0) = +\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \Rightarrow \qquad 2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2$$

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)}$$

Velocità e accelerazione in funzione della posizione

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} v[x(t)] = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$$

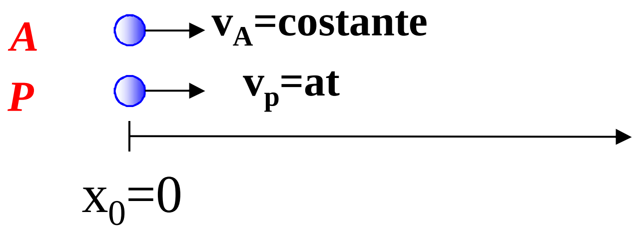
$$\Rightarrow a = v\frac{dv}{dx} \qquad \Rightarrow adx = vdv$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} adx = \int_{v_0}^{v} vdv \Rightarrow \int_{x_0}^{x} adx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

Relazione che nel caso di a costante si riconduce a quella già vista

Esercizio

Un auto si muove con velocità costante pari a 105 km/h e passa davanti un auto della polizia ferma. La polizia parte con un $a=2,44 m/s^2$. Dopo quanto tempo raggiunge lôauto?



$$v_A = 105\frac{km}{h} = \frac{105}{3,6}\frac{m}{s} = 29,17\frac{m}{s}$$

Auto $\begin{cases} v_A(t) = v_{0A} \\ x_A(t) = x_0 + v_{0A}\cdot t \end{cases} \Rightarrow x_A(t) = v_{0A}\cdot t = 29,17\cdot t$

Polizia $\begin{cases} v_P(t) = a\cdot t \\ x_p(t) = x_0 + v_{0P}t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases} \Rightarrow x_P(t) = \frac{1}{2}2,44\cdot t^2 = 1,22\cdot t^2$

$x_0=0,\ v_{0P}=0$

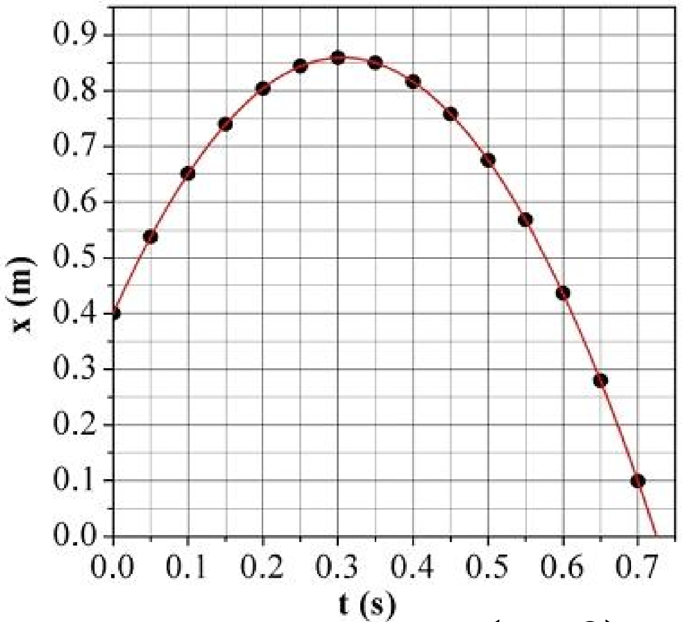
$\begin{cases} x_A(t) = 29,17\cdot t \\ x_P(t) = 1,22\cdot t^2 \end{cases} \Rightarrow x_A(t) = x_P(t) \Rightarrow 29,17\cdot t = 1,22\,t^2 \Rightarrow t = 23,9s$

Esempio di diagramma orario

Eôil **grafico della posizione in funzione del tempo**. In figura ne è riportato un esempio, ottenuto dallô**equazione oraria** (x in metri, t in secondi): $x(t) = 0.40 + 3t - 4.9t^2$

Attribuendo dei valori arbitrari al tempo t, sono stati calcolati i corrispondenti valori di x, ottenendo così una **tabella oraria**. Riportando in grafico i valori della tabella, abbiamo ottenuto il diagramma orario del moto in questione.

t (s)	x (m)
0.00	0.40
0.05	0.54
0.10	0.65
0.15	0.74
0.20	0.80
0.25	0.84
0.30	0.86
0.35	0.85
0.40	0.82
0.45	0.76
0.50	0.68
0.55	0.57
0.60	0.44
0.65	0.28
0.70	0.10



Per confronto con lôequazione:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Si ottiene che:

$$x_0 = 0.40\,\mathrm{m}$$

$$v_0 = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$a = -9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$v_0 = v(t=0) \Rightarrow v(0) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_0 = 3 - 2\cdot 4.9t\big|_0 = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Lo stesso risultato si ottiene valutando il valore dellôaccelerazione e della velocità iniziale, utilizzando:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -2\cdot 4.9 = -9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Esempio

Sia data la legge oraria di un animale in movimento, che, esprimendo tutte le grandezze in unità del SI, sia:

$x(t)= 3t^2 + 6t - 2$

Calcolare la velocità e l'accelerazione nellõistante $t=2$

Sapendo che la velocità istantanea è dx/dt

$$v(t) = 6t + 6$$

Quindi, la velocità nell'istante $t=2$ è

$$v(2)=6\cdot 2 + 6 = 18 \text{ m/s}$$

L'accelerazione, essendo la derivata della velocità rispetto al tempo è data da

$$a(t)=dv/dt = 6 \text{ m/s}^2$$

(in questo caso particolare, *a* è una costante, cioè non dipende da *t*. Però è bene sottolineare che nel caso generale anche a dipende dal tempo)

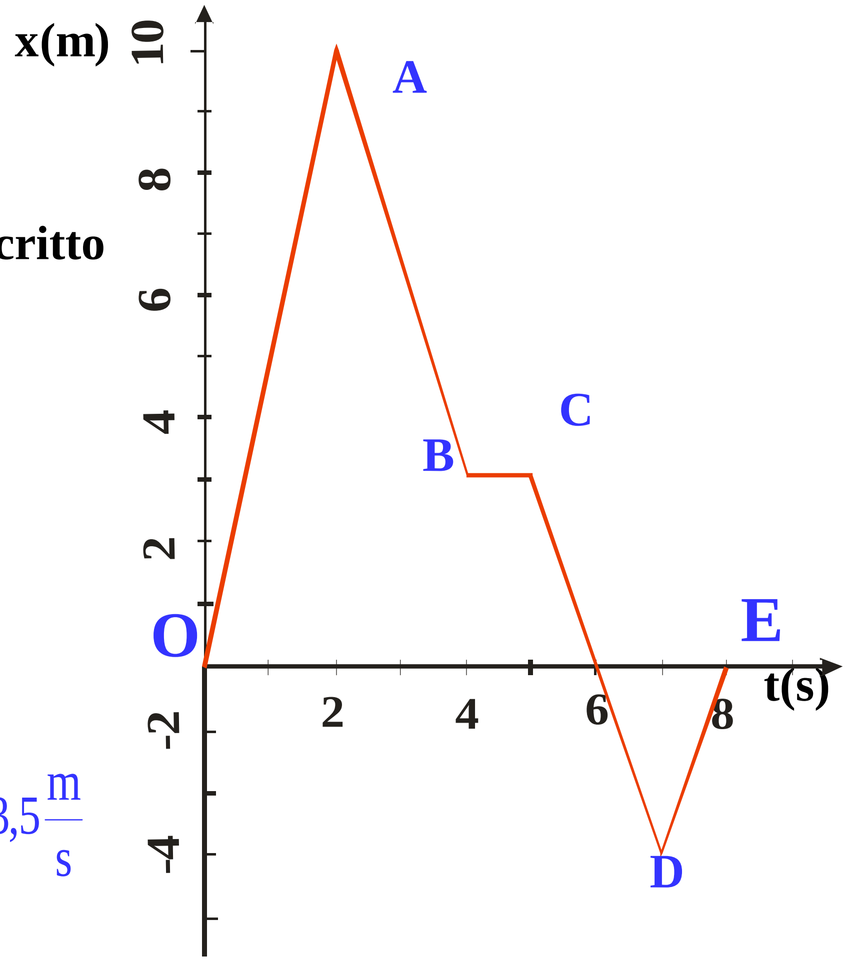
Un errore da evitare...

Non derivate il risultato ottenuto per la velocità istantanea in un dato t, in quel caso, derivereste non la funzione velocità, bensì una funzione costante che assume per ogni t il particolare valore della velocità nell'istante considerato, perciò otterreste banalmente che la vostra accelerazione è sempre uguale a zero, ma questo è sbagliato!

Esercizio

Per una particella che si muove con un moto descritto in figura, determinare v(t) negli istanti:

t_1=1s, t_2=3s, t_3=4,5s, t_4=7,5s



Sol.:

$$v(OA)=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{10}{2}=5\frac{m}{s} \Rightarrow v(t_1)=5\frac{m}{s}$$

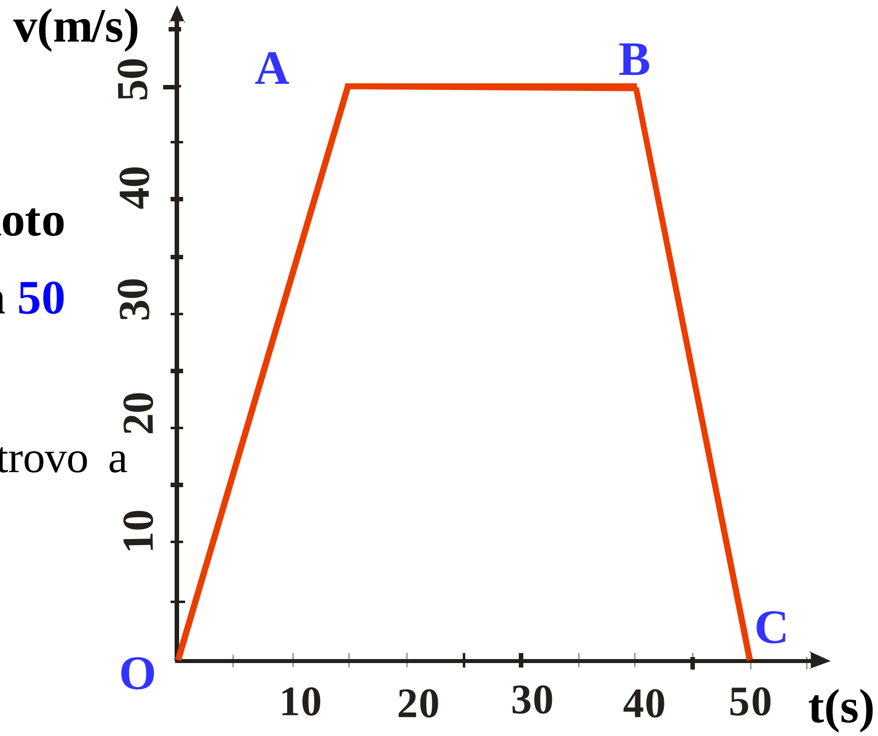
$$v(AB)=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_B-x_A}{t_B-t_A}=\frac{-7}{2}=-3,5\frac{m}{s} \Rightarrow v(t_2)=-3,5\frac{m}{s}$$

$$v(BC)=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_C-x_B}{t_C-t_B}=0 \Rightarrow v(t_3)=0$$

$$v(DE)=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_E-x_D}{t_E-t_D}=\frac{0-(-4)}{1}=\frac{4}{1}=4\frac{m}{s} \Rightarrow v(t_4)=4\frac{m}{s}$$

Esercizio

Per una particella che si muove con un moto descritto in figura, trovare lo spazio percorso in 50 secondi



Nel tratto OA: $v_{OA}(t) = v_O + at \quad v_{OA}(t) = at$ --> trovo a

Per t =15 s $\Rightarrow$ $v(15) = v_A = 50\frac{m}{s}$

$50 = a \cdot 15 \qquad \Rightarrow \qquad a = 3{,}3\frac{m}{s^2}$

Spazio percorso nel tratto OA: $x(t) = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}\frac{10}{3}t^2 = \frac{10}{6}t^2$

Per t =15s $\quad x_A = \frac{10}{6}15^2 = \frac{10}{6}225 = 375\,m$

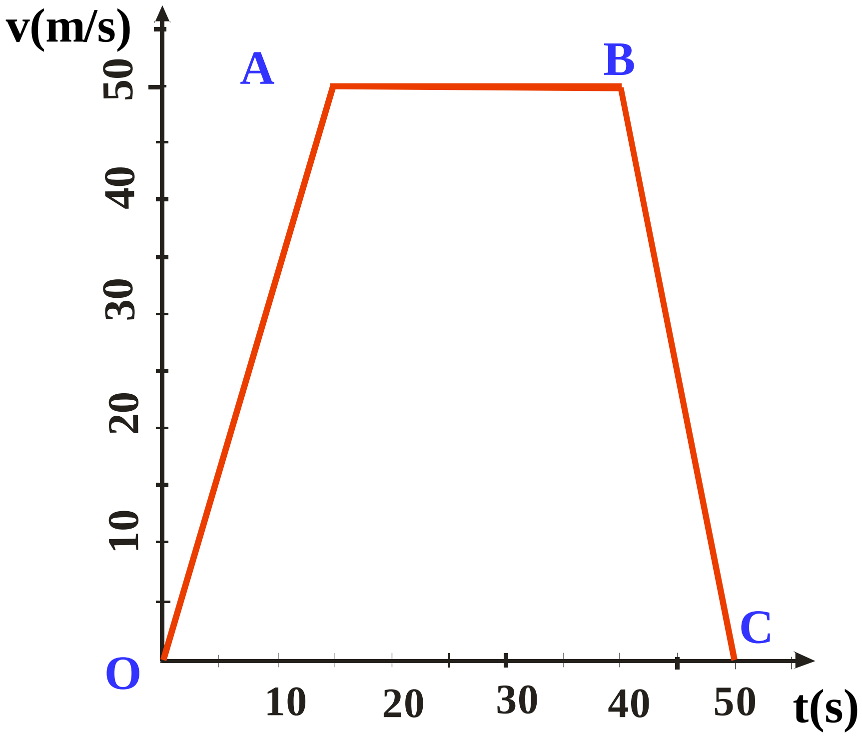
Spazio percorso nel tratto AB: $\quad t_{AB} = 25s$

$v_{AB} = \text{costante} = 50\frac{m}{s} \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = 50t \qquad \Rightarrow \qquad x_{AB} = 50 \cdot 25 \quad = 1250\,m$

A.

Esercizio

continuazione



Nel tratto BC: $v_{BC}(t) = v_B + a(t - t_B)$

Per t =t_C $\quad v_{BC}(t_C) = v_B + a(t_C - t_B)$

$$0 = 50 + a(50 - 40)$$

$$0 = 50 + 10a \quad \Rightarrow \quad a = -5\frac{m}{s^2}$$

Spazio totale: $x(t) = x_B + v_B(t - t_B) + \frac{1}{2}a(t - t_B)^2$

$$\Downarrow$$

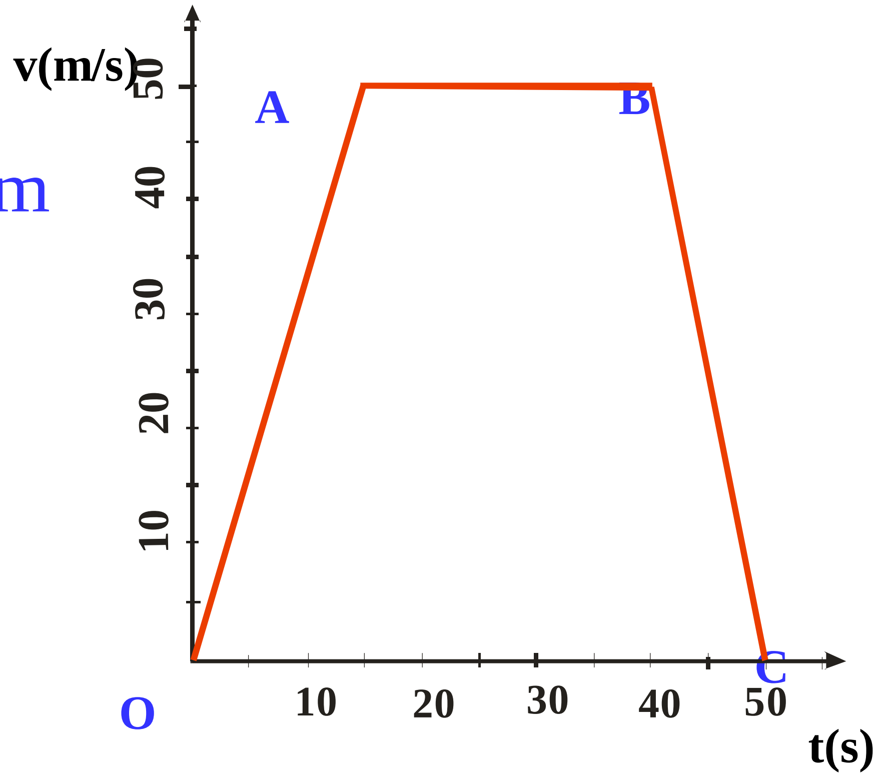
Per t =t_C $\quad x(50) = (375 + 1250) + 50(50 - 40) + \frac{1}{2}a(50 - 40)^2$

$$\Downarrow$$

$$x(50) = 1875 \ \text{m}$$

Stesso es.2° modo

Nel tratto OA vedi sopra : $X_{OA} = 375m$



Spazio percorso nel tratto AB:

$$x(t) = x_0 + 50(t - t_0)$$

$$x(t) = 375 + 50(t - 15)$$

$$x(40) = 375_0 + 50(40 - 15)$$

$$x(40) = 375 + 1250 = 1625m$$

Spazio percorso nel tratto BC:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

$$x(t) = 1625 + 50(t - 40) - \frac{5}{2}(t - 40)^2 \quad \Rightarrow \quad x(50) = 1625 + 50(50 - 40) - \frac{5}{2}(50 - 40)^2$$

$$x(50) = 1625 + 500 - 250 = 1875m$$

Logicamente stesso risultato di prima

Più veloce è fare area sottesa alla curva →area trapezio (spazio = integrale di v in dt)

$$x(t) = (AB + OC) \cdot altezza/2 = (50 + 25) \cdot 50/2 = 75 \cdot 25 = 1875\,m$$

Esercizio

Il Jumbo Jet decolla quando raggiunge sulla pista la velocità di 360 km/h. Se la lunghezza della pista è di 1,8 km qual è lôaccelerazione minima, supposta costante, che i motori devono imprimere allôaereo che parte da fermo?

Condizioni iniziali: $t_0 = 0 \quad x_0 = 0 \quad v_0 = 0$ $\quad v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

$$360 km/h = 100 m/s \Rightarrow 100^2 = 2\,a \cdot 1800 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{10000}{3600} = 2,7 m/s^2$$

Oppure uso le equazioni in funzione del tempo

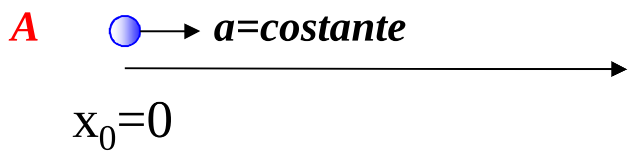
$$\begin{cases} v_f = a \cdot t_f \\ x_f = \frac{1}{2} a t_f^{\,2} = \frac{1}{2} v_f t_f \end{cases}$$

Il tempo necessario a percorrere gli 1,8 km di pista vale: $t_f = \dfrac{2x_f}{v_f} = \dfrac{3600}{100} \dfrac{m}{\frac{m}{s}} = 36 s$

Lôaccelerazione minima pertanto vale: $a = \dfrac{v_f}{t_f} = \dfrac{100 m/s}{36\ s} = 2,7 \dfrac{m}{s^2}$

Esercizio

Un auto che si muove con velocità iniziale pari a 36 km/h aumenta la velocità con accelerazione costante pari a 2 m/s^2, il moto è rettilineo. Calcolare lo spazio percorso quando la velocità finale è pari a 72 Km/h e il tempo impiegato.



$$v_0 = 36\frac{km}{h} = \frac{36}{3{,}6}\frac{m}{s} = 10\frac{m}{s}$$

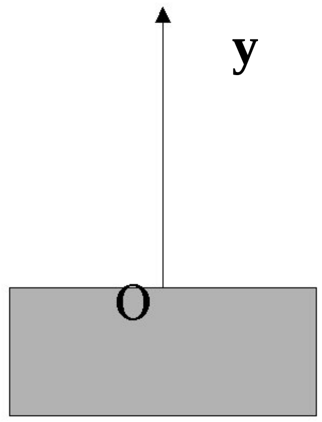
$$v_F = 72\frac{km}{h} = \frac{72}{3{,}6}\frac{m}{s} = 20\frac{m}{s}$$

Sol.: ***Auto***

$$v_f^2 = v_0^2 + 2a\cdot(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad x - x_0 = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2a} = \frac{400 - 100}{4} = 75m$$

$$v_f = v_0 + a\cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_f - v_0}{a} = \frac{10}{2} = 5s$$

Moto verticale: moto in caduta libera



Un caso particolare di moto uniformemente accelerato: *il moto in caduta libera*

Se si *trascura la resistenza dellâaria*, un corpo lasciato libero di cadere vicino alla superficie terrestre si muove verso il basso con unâaccelerazione costante che vale in modulo g=9,8 ms^{-2}

Si considera un *sistema di riferimento* con origine al suolo e *asse y* rivolto *verso lâalto* come in figura. In questo sistema

$$a = -g = -9{,}8\,\frac{m}{s^2}$$

- g non dipende dalla natura dei corpi (corpo umano, animali,oggetti in ferro, alluminio, legno, ecc.) e dalla loro forma ;

ï **allâinterno di un volume limitato g non dipende dalla posizione del corpo;**

ï **g è indipendente dal tempo (costante);**

ï **se il volume non è limitato:**

Å**g dipende dalla quota**

Å**g dipende dalla latitudine: è più grande ai poli, ed è più piccola allâequatore**

Å**alle nostre latitudini g vale circa $g = 9.81\ m/s^2$.**

Equazioni del moto ad accelerazione costante (caso particolare gravità)

(assumendo che lô istante iniziale sia t = 0)

a=costante	$a = -g$
$v(t) = v_0 + at$	$v_y(t) = v_{y0} - gt$
$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$y(t) = y_0 + v_{y0} t - \frac{1}{2}gt^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$v_y^2 = v_{y0}^2 - 2g(y - y_0)$

Legge oraria del moto in caduta libera

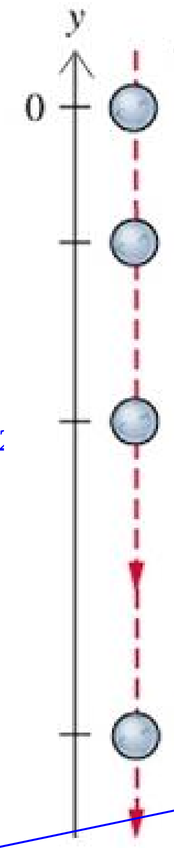
Un vaso di fiori, nellôistante t_0=0 cade da un balcone partendo da fermo. Il punto di partenza del corpo sia lô**origine del sistema**

$y_0 = 0$ m
v_0=0 m/s
a= -g =-9,8 m/s^2

Voglio trovare v(t) e y(t) →usiamo:

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0) = v_0 - g(t - t_0) \Longrightarrow v(t) = -gt$$

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \Longrightarrow y(t) = -\frac{1}{2} g t^2$$



t (s)	y (m)	v (m/s)	a (m/s^2)
0	0	0	–9.8
1	–4.9	–9.8	–9.8
2	–19.6	–19.6	–9.8
3	–44.1	–29.4	–9.8

Determinare la posizione e la velocità del corpo dopo 1s, 2s, 3s.

Soluzione

Esercizio

Una pietra cade da 3000 m. Con che velocità arriva al suolo?

Soluzione

y_0 = h=3000 m
v_0=0 m/s
a= -g =-9,8 m/s^2

$$a = -g \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_0 - g(t - t_0) = -gt$$

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\begin{cases} y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \\ v(t) = -gt \end{cases}$$

con h=3000 m

Quando arriva al suolo y =0

$$\begin{cases} 0 = h - \frac{1}{2}gt^2 \\ v(t) = -gt \end{cases}$$

da cui

t=24.73 s

v=242.61 m/s → 873 Km/h

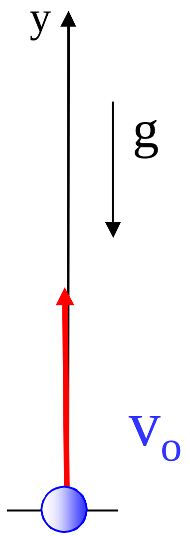
Più velocemente usando legame tra velocità e spazio

$$v_y^2 = v_{y0}^2 - 2g(y - y_0) \quad \Rightarrow \quad v_y^2 = -2g(0 - 3000)$$

$$v_y^2 = 2 \cdot 9{,}8 \cdot 3000 = 58800 \quad \Rightarrow \quad v = 242{,}49 \cdot \mathrm{m/s}$$

Esercizio

Un uomo salta da terra con $v = v_0$ verso lôalto. Fin dove arriva?



$$\begin{cases} y(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v(t) = v_0 - gt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(t) = v_0 \cdot t_{max} - \frac{1}{2} g t_{max}{}^2 \\ 0 = v_0 - g t_{max} \end{cases}$$

Nel punto più alto v = 0

$$\begin{cases} t_{max} = \dfrac{v_0}{g} \\ y(t_{max}) = v_0 \cdot \dfrac{v_0}{g} - \dfrac{1}{2} g \dfrac{v_0{}^2}{g^2} = \dfrac{v_0{}^2}{g} - \dfrac{1}{2} \dfrac{v_0{}^2}{g} = \dfrac{1}{2} \dfrac{v_0{}^2}{g} \end{cases} \Rightarrow y_{max} = \frac{1}{2} \frac{v_0{}^2}{g}$$

$$v_0 = \sqrt{2 g y_{max}}$$

Più velocemente usando legame tra velocità e spazio

$$v_y^2 = v_{y0}^2 - 2g(y - y_0) \Rightarrow 0 = v_0^2 - 2g(y_{max} - 0) \Rightarrow$$

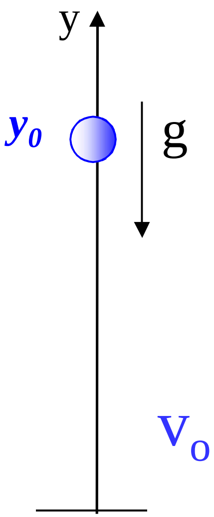
$$y_{max} = \frac{1}{2} \frac{v_0{}^2}{g}$$

$$v_0 = \sqrt{2 g y_{max}}$$

Esercizio

Se un oggetto cade da $y = y_0$ con quale velocità arriva a terra?

posso partire da equazione oraria



$$\begin{cases} y(t) = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v(t) = v_0 - gt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(t) = y_0 - \frac{1}{2} g t^2 \\ v(t) = -gt \end{cases}$$

$v_0 = 0$

Dato che non viene richiesto il tempo impiegato uso relazione tra spazio e velocità

$$\boxed{v_y^2 = v_{y0}^2 - 2g(y - y_0)} \Rightarrow v^2 = -2g(y - y_0) \Rightarrow$$

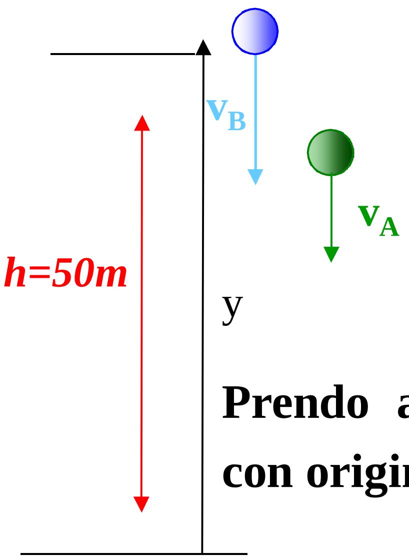
$$v^2 = -2g(0 - y_0) \Rightarrow v^2 = 2gy_0 \Rightarrow v = \sqrt{2gy_{max}}$$

Quando arriva a terra y=0

V è anche la velocità con cui deve partire da terra per arrivare a y_0

Esercizio

Da unôaltezza di 50 m lancio 2 pietre A e B (B è lanciata 1 s dopo A), v_{0A}= 2m/s verso il basso. Arrivano a terra insieme. Trovare v_{0B}, t_{finale}, v_{Af}, v_{Bf}.



$$\begin{cases} y_A = y_{0A} + v_{0A} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_A = v_{0A} - gt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 50 - 2t - 4.9t^2 \\ v_A = -2 - 9.8t \end{cases}$$

$v_0 = 2$ m/s

Prendo asse y rivolto verso lôalto con origine a terra

$$\begin{cases} t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+250}}{4.9} = 3.2s \\ v_{Af} = -2 - 9.8 \cdot 3.2 = -33.36 m/s \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_B = y_{0B} + v_{0B} \cdot (t-1) - \frac{1}{2} g(t-1)^2 \\ v_B = v_{0B} - g(t-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_B = 50 + v_{0B}(t-1) - 4.9(t-1)^2 \\ v_B = v_{oB} - 9.8(t-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 50 + v_{0B} \cdot 2.2 - 4.9(2.2)^2 \\ v_{Bf} = v_{0B} - 9.8 \cdot 2.2 = 33.36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{0B} = -\dfrac{50 - 4.9 \cdot 2.2^2}{2.2} = -11.95 m/s \\ v_{Bf} = -11.95 - 9.8 \cdot 2.2 = -33{,}51 m/s \end{cases}$$

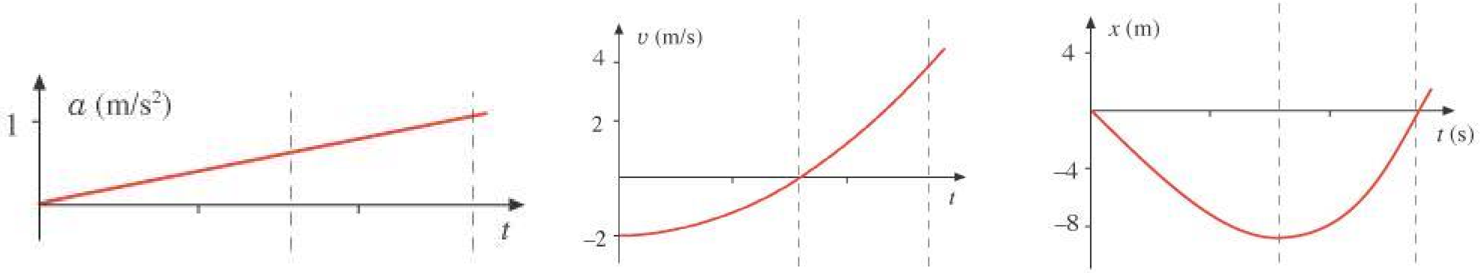
Esempi: se a non è costante

Spazio, Velocità e Accelerazione se a = kt

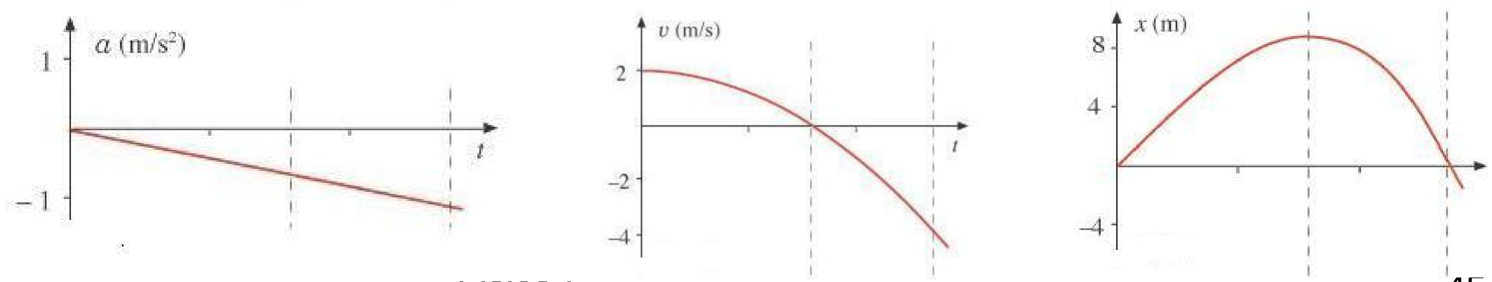
$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt \qquad v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} kt \cdot dt \Rightarrow \qquad v(t) = v_0 + \frac{k(t^2 - t_0^2)}{2} \qquad \text{se } t_0=0\text{:} \quad v(t) = v_0 + \frac{k \cdot t^2}{2}$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt \qquad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t}\left[v_0 + \frac{k \cdot t^2}{2}\right]dt \qquad \text{se } t_0=0 \text{ e } x_0=0\text{:} \quad x(t) = v_0 t + \frac{k \cdot t^3}{6}$$

a=0,1 ·t m/s²
Quindi k=0,1
v_0 =-2 m/s,
x_0 =0 m



a=- 0,1 · t m/s²
v_0 =2 m/s,
x_0 =0 m



Moto periodico

Il moto di una particella si dice periodico quando

ad intervalli di tempo uguali la particella torna a passare nella stessa posizione con la stessa velocità.

Se immaginiamo una pallina che cade verticalmente e rimbalza in modo perfettamente elastico su un piano orizzontale, oppure una biglia che rimbalza fra le sponde di un biliardo urtandole perpendicolarmente, così da muoversi avanti e indietro lungo un segmento di retta, abbiamo due esempi (anche se solo ideali) di moto periodico unidimensionale.

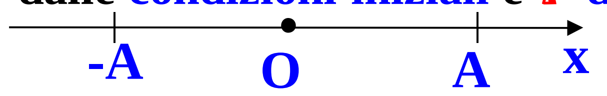
Quali sono le leggi orarie e come sono fatti i grafici di $x(t)$?

Moto armonico semplice

Moto armonico semplice: **particolare tipo di moto periodico lungo un asse rettilineo, che ha notevole importanza anche perché alla sua descrizione si rifanno numerosi altri fenomeni fisici, non limitati al solo campo della meccanica. Si ha un moto armonico semplice lungo un asse quando la sua legge oraria è del tipo:**

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

Dove *A* e ϕ sono dei parametri che dipendono dalle condizioni iniziali e ω dalla fisica



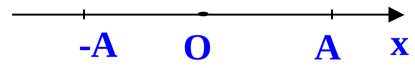
***A* - comunemente chiamata *ampiezza*.**

ω - si chiama *frequenza angolare o pulsazione,* ed ha dimensione dell'inverso di un tempo.

ϕ - è l'argomento del seno al tempo *t=0*; quindi cambiare *la fase* è equivalente a ridefinire l'origine dei tempi.

Moto armonico semplice

$x(t) = A\,\text{sen}\,(\omega t + \phi)$



Caratteristiche spaziali del moto armonico semplice.

Il valore di sen (ω t + ϕ) varia tra -1 e 1, quindi l'ampiezza dell'intervallo in cui si muove l'oggetto è 2A con centro nellôorigine.

Al tempo t=0, il punto occupa la posizione x(0)=A sen(ϕ). Le costanti A e ϕ definiscono la posizione iniziale del punto.

La funzione seno è una funzione periodica, quindi anche la funzione x(t) che definisce il moto armonico è periodica. Se si fa trascorrere un tempo $t=2\pi/\omega$, l'argomento del seno cambia di 2π e dunque x(t) riassume gli stessi valori,

Ad esempio: se per $t=t_0$ $x(t_0) = A\,\text{sen}\,(\omega t_0 + \phi)$

per $t=t_0+2\pi/\omega$ → $x(t_0 + 2\pi/\omega) = A\text{sen}(\omega(t_0 + 2\pi/\omega) + \phi) = A\text{sen}\left(\omega t_0 + \cancel{\omega}\cdot\frac{2\pi}{\cancel{\omega}} + \phi\right) = A\text{sen}\,(\omega t_0 + \phi)$

Dunque $T = \frac{2\pi}{\omega}$ **esprime la durata di un'oscillazione completa.**

***T* è il periodo del moto.**

Moto armonico semplice

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

La relazione sopra fa capire il *significato della pulsazione* ω: il moto si ripete velocemente (T piccolo) se la pulsazione è grande, mentre la ripetizione è più lenta (T grande) per bassi valori della pulsazione.

La quantità che viene indicata generalmente con f o con ν è uguale all'inverso di T. Essa si chiama frequenza e descrive il numero di oscillazioni al secondo, ovvero quanti angoli giri compie l'argomento del coseno nell'unità di tempo.

$$f = \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Questa relazione può essere considerata come definizione di frequenza e pulsazione (una volta definito il periodo), o di periodo e frequenza (una volta definita la pulsazione) ecc.

Il periodo e quindi la frequenza di un moto armonico semplice sono indipendenti dallôampiezza del moto. Fissato il valore della pulsazione (legato alla fisica) si ha una *classe di moti armonici,* caratterizzati dallo stesso periodo, che differiscono per i diversi valori dellôampiezza e della fase.

Moto armonico semplice: Velocità e accelerazione

Funzione **velocità.** Se si deriva rispetto al tempo la legge oraria si ottiene:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

Controllo delle dimensioni: $[v]=[A][\omega]= [LT^{-1}]$

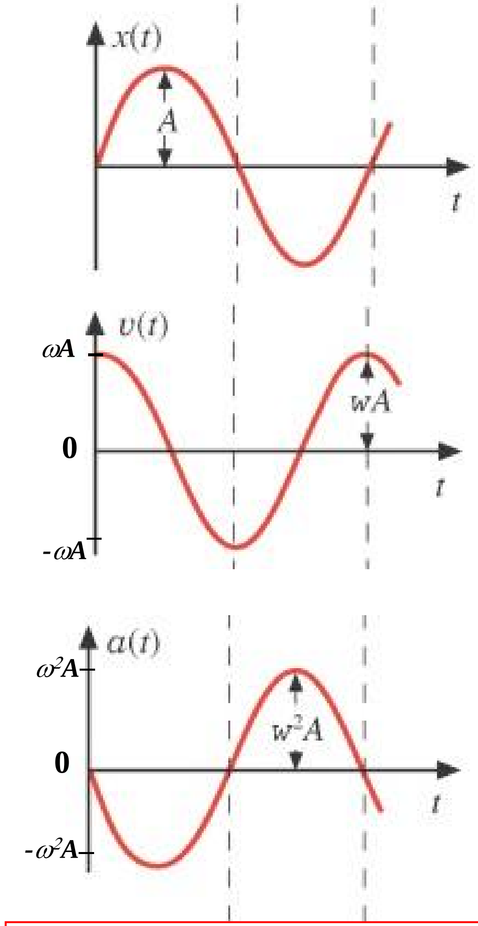
Derivando ancora si ottiene la funzione **accelerazione:** $a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \mathrm{sen}(\omega t + \phi)$

Da cui risulta: $$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

Questa particolarità, in base alla quale **l'accelerazione è proporzionale ed opposta allo spostamento** dalla posizione di equilibrio, **contraddistingue e caratterizza i moti armonici**.

quando troveremo dei sistemi nei quali si può affermare che accelerazione e spostamento sono legati in questo modo, potremo dire che tali sistemi si muovono di moto armonico. E anzi, dalla costante di proporzionalità sarà possibile dedurre T (ovvero f, ovvero ω)

Moto armonico semplice: spazio, velocità e accelerazione



$$x(t) = A\,\text{sen}\,(\omega t + \phi)$$

con $\phi=0$: $x(t) = A\,\text{sen}\,(\omega t)$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t)$$

La velocità ha il *valore massimo nel centro* di oscillazione (x=0) dove vale ωA e *si annulla agli estremi* (x=A, x=-A) dove si inverte

il senso del moto

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\text{sen}(\omega t)$$

Lꞌaccelerazione *si annulla nel centro* di oscillazione e assume il *valore massimo* (ω^2A in modulo) *agli estremi*, dove si inverte la velocità

NOTA: A parte il valore dellꞌampiezza, le tre funzioni x(t), v(t), a(t) mostrano lo stesso andamento temporale: la forma ed il periodo sono uguali, cꞌè solo uno spostamento di una rispetto allꞌaltra lungo lꞌasse del tempo, ovvero sono sfasate.

La velocità è sfasata di π/2 rispetto allo spostamento. [$\text{sen}(\theta+\pi/2)=\cos(\theta)$]

Lꞌaccelerazione è sfasata di π rispetto allo spostamento [$\text{sen}(\theta+\pi)=-\text{sen}(\theta)$]

Moto armonico semplice:
lôequazione differenziale del moto armonico

si è ricavato che

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

Essendo **lôaccelerazione** definita come

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Si ricava dunque:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

Equazione differenziale del moto armonico

La condizione necessaria e sufficiente affinché un moto sia armonico è che valga questa equazione differenziale

Velocità e accelerazione in funzione della posizione nel moto armonico

$$a = -\omega^2 x$$

$$\int_{x_0}^{x} a(x)dx = -\omega^2 \int_{x_0}^{x} x dx \qquad \Rightarrow -\frac{1}{2}\omega^2 (x^2 - x_0^2) = \frac{1}{2}\omega^2 (x_0^2 - x^2)$$

Dalla relazione tra accelerazione e velocità

$$\int_{x_0}^{x} a dx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

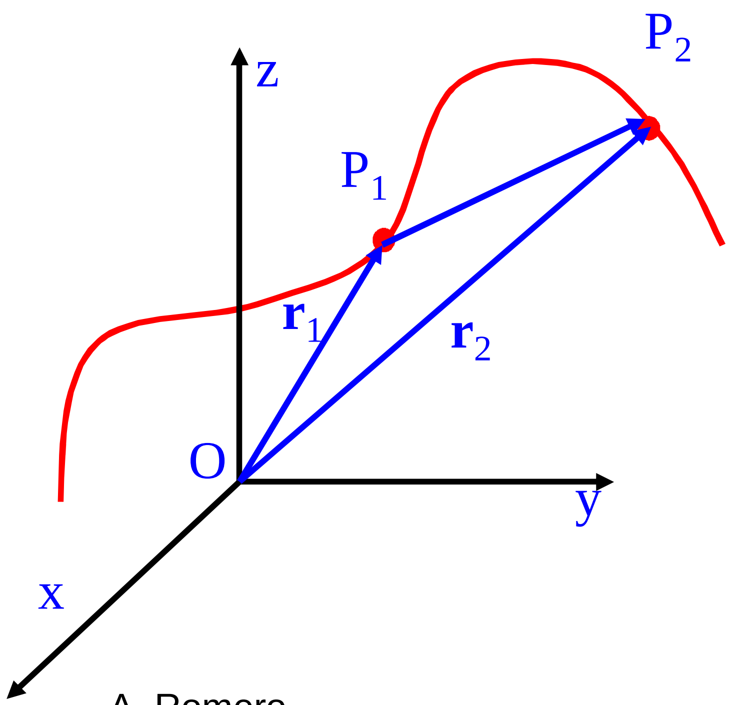
Eguagliano le due espressioni per lôintegrale di a(x) otteniamo

$$\frac{1}{2}\omega^2 (x_0^2 - x^2) = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) \qquad v^2 = v_0^2 + \omega^2 (x_0^2 - x^2)$$

Moto in due e in tre dimensioni

Nel caso in cui il moto non sia vincolato a svolgersi lungo una retta ma avviene su una linea curva in un piano o nello spazio, la descrizione del moto diviene più complessa necessita di un numero più grande di informazioni.
Non basta ad esempio specificare il valore numerico dello spazio percorso, ma occorre precisare in quale direzione ed in quale verso avviene.

Dunque nel caso più generale di moto in due o tre dimensioni, ***lo spostamento, la velocità e lâaccelerazione sono grandezze vettoriali***.

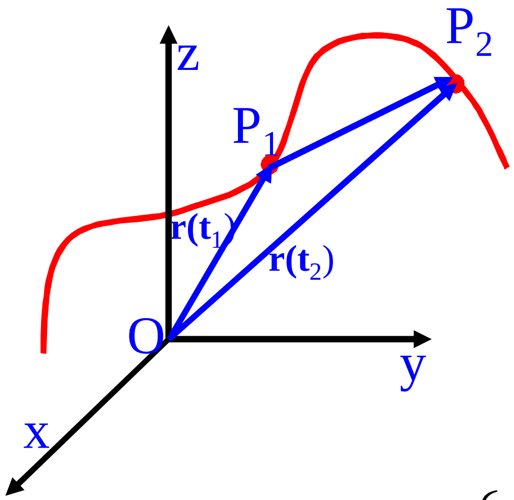


Si consideri una corpo puntiforme che si muove percorrendo una curva nello spazio.Allâistante t_1, si trova nel punto P_1 (situazione rappresentata dal **vettore posizione** $\mathbf{r}_1$)

Ad un istante successivo t_2 la particella si trova nel punto P_2; il vettore $\mathbf{r}_2$ rappresenta questa posizione

Moto in due e in tre dimensioni

La posizione di un punto P può essere quindi individuata per mezzo di un raggio vettore che congiunge lôorigine con il punto P: $\mathbf{r}(t)=\mathbf{OP}=x(t)\mathbf{u}_x+y(t)\mathbf{u}_y+z(t)\mathbf{u}_z$



Con: $x(t), y(t), z(t)$: coordinate del punto P

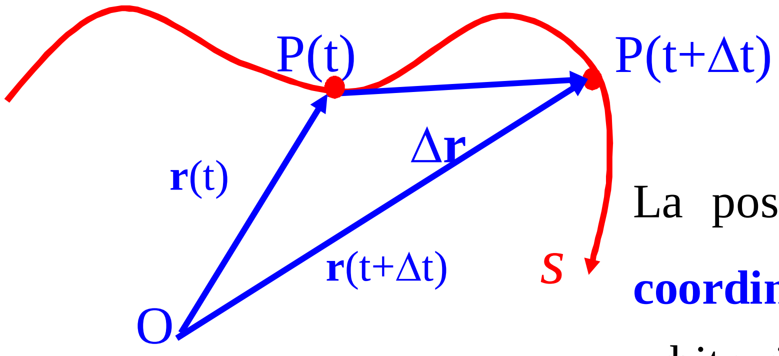
$\mathbf{u}_x,\mathbf{u}_y,\mathbf{u}_z$: versori degli assi cartesiani

Se è nota la dipendenza dal tempo di **r**, cioè la funzione **r**(t), è individuato il moto del punto P: conoscere **r**(t) in 3 dimensioni significa conoscere x(t) e y(t) e z(t) oppure r(t) e θ(t) e φ(t)

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \Rightarrow \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad \vec{r} = \vec{r}(t) \Rightarrow \begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}$$

La legge oraria (vettoriale) è *sempre* equivalente a *tre equazioni scalari*

Equazioni parametriche della traiettoria



Velocità e spostamento

La posizione del punto può anche essere individuata da un **coordinata curvilinea** S, misurata a partire da un origine arbitraria.

Il **vettore spostamento** è la variazione del vettore posizione: $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

Non è detto che il modulo del vettore spostamento sia uguale alla lunghezza della traiettoria.

L'incremento del raggio vettore Δr è in genere diverso dallo spazio effettivamente percorso.

Esempio: un punto che percorrere un'orbita chiusa ritornando al punto di partenza: il raggio vettore non cambia ma il punto ha percorso una traiettoria finita ($\Delta \mathbf{r}=0$, $\Delta s \neq 0$)

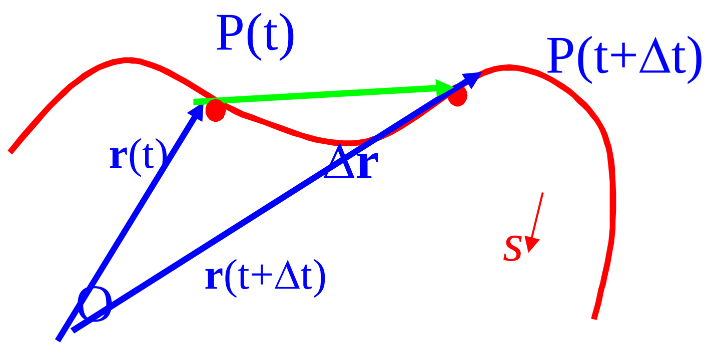
Si considerino le due posizioni occupate dal punto P al tempo t e t+Δt, si può definire il **vettore** velocità media, dato da:

$$\mathbf{v}_{media} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

Dalla velocità media alla velocità vettoriale istantanea:

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{r}(t+\Delta t) - \mathrm{r}(t)}{\Delta t} \quad \text{per } \Delta t \to 0 \qquad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

è ***la derivata del raggio vettore rispetto al tempo***



Velocità

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$ è ***la derivata del raggio vettore rispetto al tempo***

Lõincremento d**r** del raggio vettore risulta:

- ✓ in **direzione tangenziale** alla traiettoria nel punto P
- ✓ in **modulo** eguale allo spostamento infinitesimo **ds** lungo la traiettoria,

$$d\mathbf{r} = ds\,\mathbf{u}_T$$

con $\mathbf{u}_T$: **versore della tangente alla curva,** variabile nel tempo man mano che il punto avanza

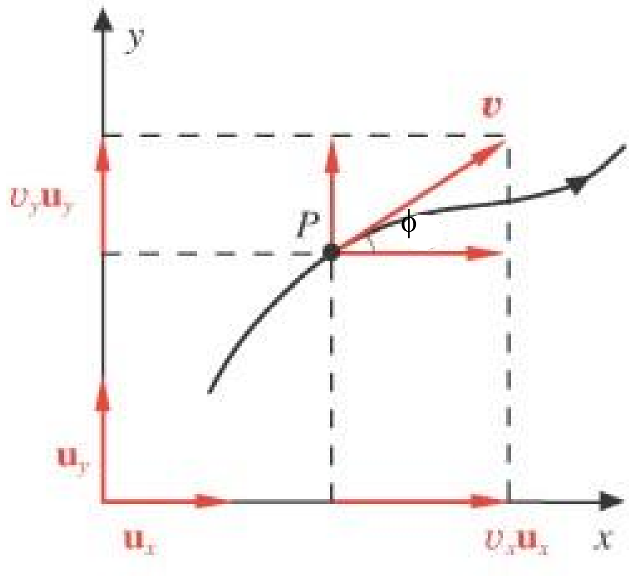
La velocità diviene quindi: $$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt}\,\mathbf{u}_T$$

Pertanto la velocità vettoriale **v** individua in ogni istante con la sua direzione e il suo verso ***la direzione ed il verso del moto*** e con il suo ***modulo*** v=ds/dt, la velocità istantanea con cui è percorsa la traiettoria

Velocità in componenti

La posizione di un punto P può essere individuata per mezzo di un raggio vettore che congiunge lôorigine con il punto P: $\mathbf{r}(t)=\mathbf{OP}=x(t)\mathbf{u}_x+y(t)\mathbf{u}_y+z(t)\mathbf{u}_z$

Velocità in componenti cartesiane (esempio in 2 dimensioni)



$$\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{u}_x+y(t)\mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\mathbf{u_x}+\frac{dy}{dt}\mathbf{u_y}=v_x\mathbf{u_x}+v_y\,\mathbf{u_y}$$

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$$

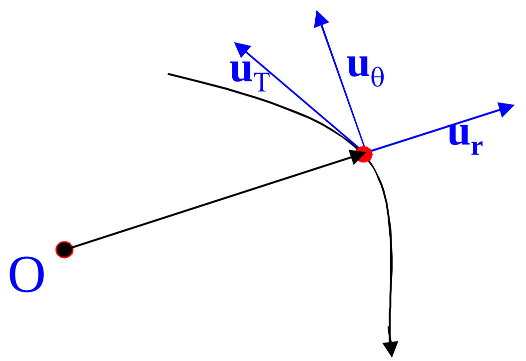
$$\mathrm{tg}\,\phi=\frac{V_y}{V_x}$$

modulo di **v**

angolo tra **v** e lôasse x

Velocità in componenti

Velocità in componenti polari (esempio in 2 dimensioni)



Si introducano i versori:

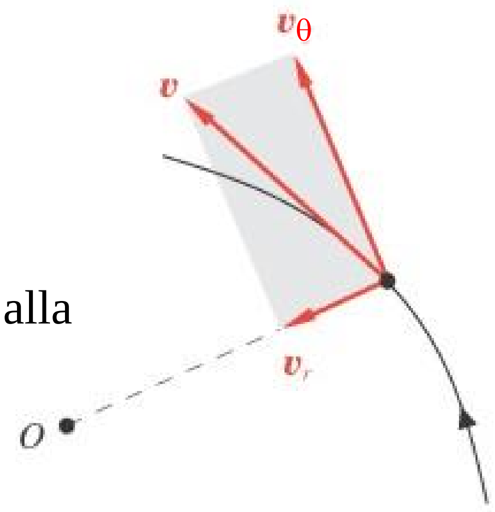
$\mathbf{u}_r$: *versore parallelo alla direzione del raggio vettore* $\mathbf{r}$

$\mathbf{u}_\theta$: *versore perpendicolare al raggio vettore* $\mathbf{r}$

$\mathbf{r}$ può essere espresso come $\mathbf{r} = r\,\mathbf{u}_r$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_\mathbf{r} + r\frac{d\mathbf{u}_\mathbf{r}}{dt} \Rightarrow \mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_\mathbf{r} + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\mathbf{d} = \mathbf{v}_\mathbf{r} + \mathbf{v}_\mathbf{d}$$

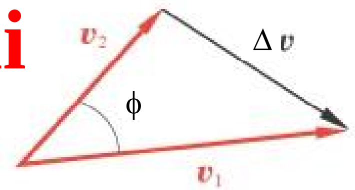
La velocità che è sempre tangente alla traiettoria, può essere scomposta in due componenti:



✓ $\mathbf{v}_\mathbf{r}$: ***velocità radiale***, diretta lungo $\mathbf{r}$ e di modulo dr/dt, dipende dalle variazioni del modulo del raggio vettore

✓ $\mathbf{v}_\theta$: ***velocità trasversa***, ortogonale a $\mathbf{r}$ e di modulo $rd\theta/dt$, collegata alla variazione di direzione del raggio vettore

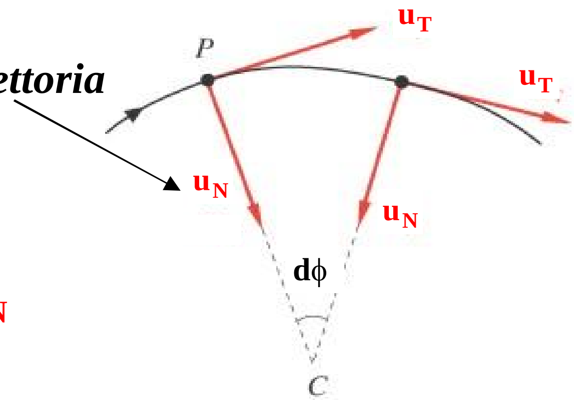
Accelerazione in due e in tre dimensioni



Il **vettore accelerazione** media è dato da: $\mathbf{a}_{media} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1}$

Lôaccelerazione nel moto piano o nello spazio deve esprimere le variazioni della velocità sia come modulo che direzione e quindi si può esprimere con due componenti, ***una legata alla variazione del modulo della velocità e lôaltra legata al cambiamento di direzione del moto***

u_N: *versore ortogonale a u_T diretto verso* ***la concavità della traiettoria***



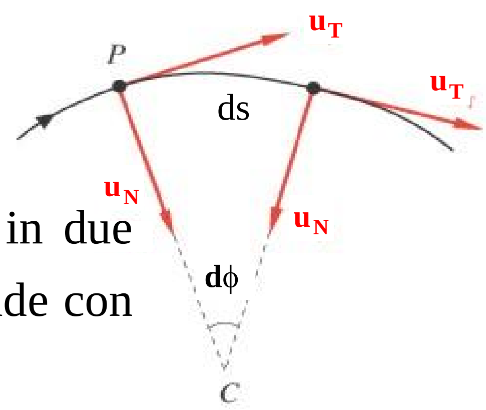
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \frac{d}{dt}\left(v\mathbf{u_T}\right) = \frac{dv}{dt}\mathbf{u_T} + v\frac{d\mathbf{u_T}}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\mathbf{u_T}} + \underbrace{v\frac{d\phi}{dt}\mathbf{u_N}}$$

componente parallela a **v** che esprime la variazione del modulo della velocità: *accelerazione tangenziale*

componente ortogonale a **v** che esprime la variazione della direzione della velocità. $d\phi/dt$ dice quanto rapidamente varia la direzione di $\mathbf{u_T}$

accelerazione centripeta

Accelerazione in due dimensioni



$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u_T} + v\frac{d\phi}{dt}\mathbf{u_N}$$

Si consideri la figura. Per dt→0, le rette normali alla traiettoria in due punti molto vicini tra di loro, si incontrano nel punto C, che coincide con il centro della circonferenza tangente alla traiettoria nel punto P

- C: centro di curvatura
- CP = R: raggio di curvatura della traiettoria nel punto P

Al variare della posizione di P sulla traiettoria, varia R, che diviene infinito nei tratti rettilinei.

$ds = Rd\phi \;\Rightarrow\; d\phi/ds = 1/R$ ⇨ $$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}v$$

Dunque lôaccelerazione diviene: $$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u_T} + v\frac{d\phi}{dt}\mathbf{u_N} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u_T} + v\cdot v\frac{1}{R}\mathbf{u_N}$$

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u_T} + \frac{v^2}{R}\mathbf{u_N} = \mathbf{a_T} + \mathbf{a_N}}$$

Esercizio

La velocità di una particella in moto sul piano x y è data da

v= [6,0t- 4,0t^2] i +(8,0)j. ***Con t>0***

A. Quanto vale lôaccelerazione allôistante t=3 s?

B. In che momento lôaccelerazione lungo x si annulla?

C. In che momento la velocità assume il valore di 10 m/s?

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d\left[\left(6{,}0\cdot t-4{,}0\cdot t^2\right)\ \mathbf{i}+8{,}0\,\mathbf{j}\right]}{dt}=\left(6{,}0-8{,}0\cdot t\right)\mathbf{i}\,\frac{m}{s^2}$$

*NOTA: Il vettore accelerazione non ha componente **j** in quanto in questa direzione la velocità è costante nel tempo*

Sol.: ***A***. Allôistante t=3s $\quad a(t=3s)=6{,}0-8{,}0\cdot 3=6{,}0-24{,}0=-18{,}0\,m/s^2$

Esercizio -continuazione

B. L'accelerazione si annulla nell'istante t in cui è soddisfatta la seguente relazione:

$$a = 0 \;= 6{,}0 - 8{,}0 \cdot t$$

$$\Downarrow$$

$$t = \frac{6{,}0}{8{,}0} = 0{,}75\,\mathrm{s}$$

C. La velocità vale 10 m/s nell'istante t in cui: $|\mathbf{v}(t)|^2 = 100$

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{v(t)_x^2 + v(t)_y^2}$$

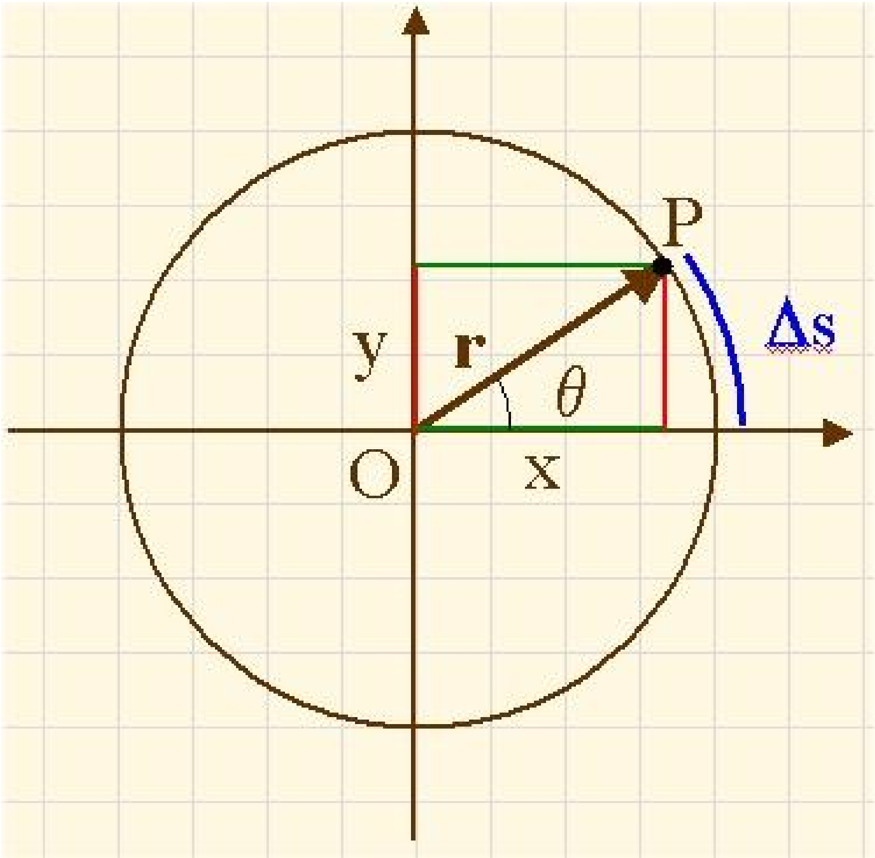
$$100 = (6{,}0t - 4{,}0t^2)^2 + (8{,}0)^2 \Rightarrow 100 - 64 = (6{,}0t - 4{,}0t^2)^2 \Rightarrow (6{,}0t - 4{,}0t^2) = \pm 6$$

$6{,}0t - 4{,}0t^2 = +6$ $\Rightarrow$ Soluzioni immaginarie

$$6{,}0t - 4{,}0t^2 = -6 \Rightarrow 4t^2 - 6t - 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 24}}{4} = \frac{3 \pm 5{,}6}{4} = \frac{8{,}6}{4} = 2{,}3\,\mathrm{s}$$

Moto circolare

- Il punto P percorre una traiettoria circolare.
- Il modulo di **r** è costante.



$$|\mathbf{r}| = \text{costante} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

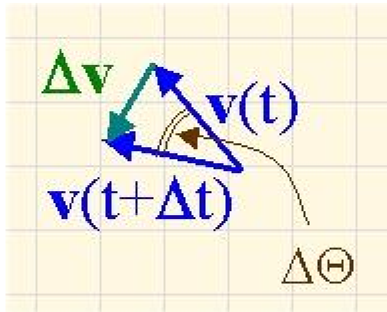
$$x = |\mathbf{r}| \cos\theta$$

$$y = |\mathbf{r}| \sin\theta$$

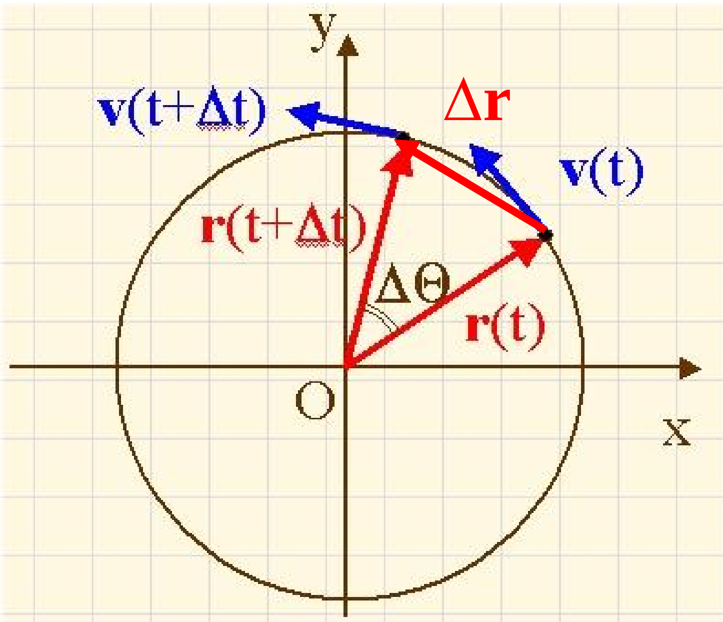
Moto circolare uniforme

- La traiettoria è una circonferenza
- Modulo della velocità è costante.

Nonostante il modulo di v sia costante, la velocità (come vettore) non è costante, in quanto la sua direzione cambia



lôaccelerazione non è nulla.



$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u_T} + \frac{v^2}{R}\mathbf{u_N} = \mathbf{a_T} + \mathbf{a_N}$$

La componente tangenziale è nulla in quanto il modulo di v non cambia (dv/dt=0), mentre $a_N \neq 0$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a_N} = \frac{v^2}{R}\mathbf{u_N}$$

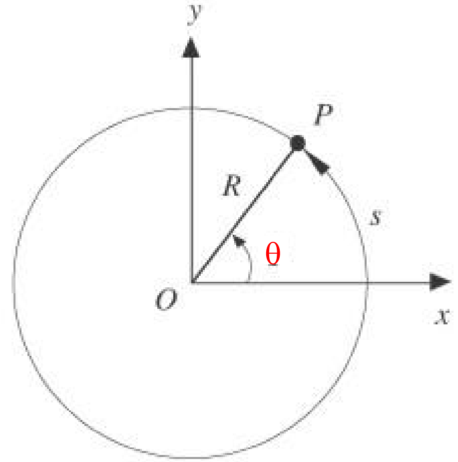
Il moto circolare uniforme è un moto accelerato con accelerazione costante, ortogonale alla traiettoria

Moto circolare uniforme

Il moto può essere descritto facendo riferimento allo spazio percorso s(t) oppure utilizzando lôangolo $\theta(t)$ sotteso allôarco s(t) (**$\theta(t)=s(t)/R$**), ovvero lavorando in un sistema di coordinate polari, in cui r(t)=costante=R e $\theta = \theta(t)$

Siamo interessati alle variazioni di angolo nel tempo e pertanto si definisce la *velocità angolare*:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$



$$\omega = \frac{v}{R} \qquad v = \omega R$$

La velocità angolare è proporzionale alla velocità con cui è percorsa la circonferenza

Utilizzando la definizione di velocità angolare può essere ridefinita lôaccelerazione:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_N = \frac{v^2}{R}\mathbf{u}_N = \omega^2 R\mathbf{u}_N$$

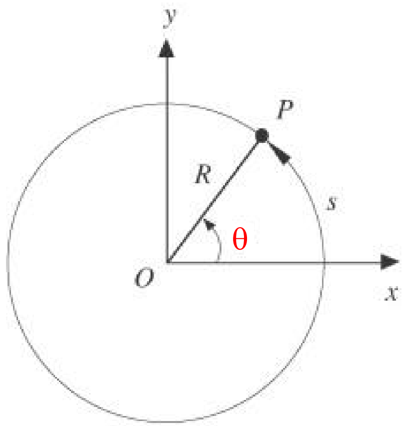
Nel moto circolare uniforme il punto percorre una circonferenza di lunghezza $2\pi r$ nel tempo T (chiamato *periodo di rivoluzione* o semplicemente ***periodo***):

$$T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Moto circolare non uniforme

Nel caso di moto circolare non uniforme, il modulo della velocità con cui è percorsa la circonferenza non è costante e quindi:

- lôaccelerazione centripeta $a_N=v^2/R$ non è costante varia modulo di **v**
- lôaccelerazione tangenziale non è nulla ($a_T=dv/dt\neq 0$)



Siccome v in modulo non è costante, non lo è neanche la velocità angolare ω e si può definire ***lôaccelerazione angolare:***

$$\alpha=\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{1}{R}\frac{dv}{dt}=\frac{a_T}{R}$$

Nel moto circolare, se è **nota la legge oraria $\theta(t)$,** con due **derivazioni** si possono ricavare le espressioni per la velocità ω e lôaccelerazione α angolare in analogia con quanto fatto per il moto accelerato

$$\omega=\frac{d\theta}{dt} \qquad \alpha=\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Viceversa se è **nota la funzione $\alpha(t)$ si può integrare ottenendo:**

$$\left\{\begin{aligned} \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega &= \int_{t_0}^{t}\alpha(t)dt \\ \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta &= \int_{t_0}^{t}\omega(t)dt \end{aligned}\right.$$

Relazioni tra accelerazione, velocità angolare e angolo con Ŭ costante

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha dt \Longrightarrow \boxed{\omega(t) = \omega_0 + \alpha(t - t_0)}$$

Operando con un ulteriore integrazione ho la funzione angolo:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega(t)dt \Longrightarrow \theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)dt \Longrightarrow \theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} [\omega_0 + \alpha(t - t_0)]dt$$

$$\Longrightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{\alpha(t - t_0)^2}{2}$$

Se t_0 è uguale a zero

$$\Longrightarrow \omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

In analogia con il caso lineare ottengo

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

Equazioni del moto ad accelerazione lineare costante e angolare costante

(assumendo che lõistante iniziale sia t = 0)

a=costante $\longrightarrow$ $\alpha = \cos t$

$$v(t) = v_0 + at \quad \longrightarrow \quad \omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \longrightarrow \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad \longrightarrow \quad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

Notazione vettoriale

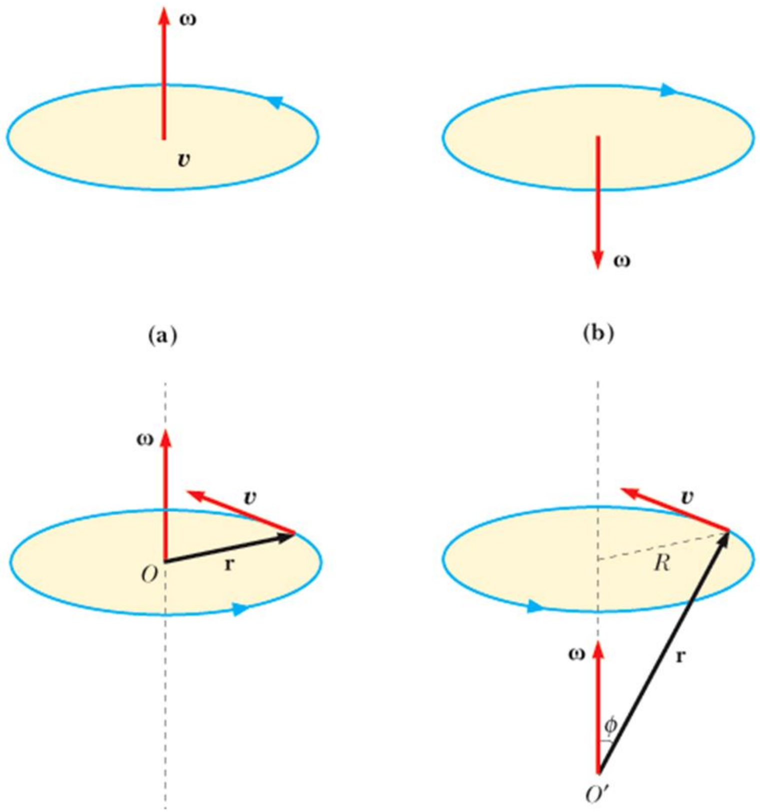
Si può definire la **velocità angolare** come il **vettore** ɤ con modulo dd/dt è perpendicolare al piano della circonferenza percorsa dal punto e verso tale che dalla fine del vettore ɤ il moto appaia in verso antiorario .

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) =$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$



Esempio

La Terra si muove attorno al Sole descrivendo unôorbita circolare di raggio r =1.5 10^8 Km. Quanto vale la velocità media della Terra (rispetto al Sole)? Quanto vale la velocità angolare?

T =1 anno=365· 24 ·3600 = 3.16 10^7 s

Circonferenza: **s** =2´ *1.5 10^8 Km= 2´ *1.5 10^{11} m

Velocità

$$v = \frac{2\pi \cdot 1.5 \cdot 10^{8}}{3.16 \cdot 10^{7}} = 29.8\ \text{Km}\ \text{s}^{-1} = 29.8 \frac{\text{Km}}{\text{s}} \frac{3.610^{3}\,\text{s}}{\text{h}} = 107.310^{3} \frac{\text{Km}}{\text{h}}$$

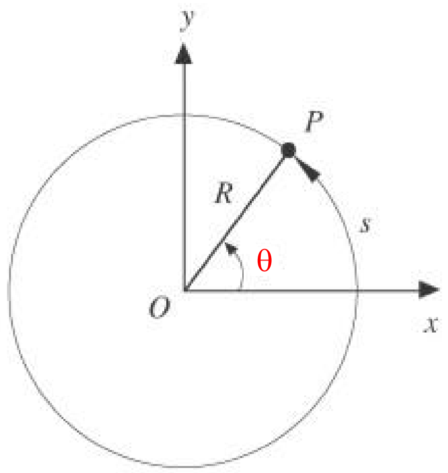
$$= 29800\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Velocità angolare

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{29800}{1{,}5 \cdot 10^{11}} = 2{,}0 \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Esercizio

Un ventilatore fa 1200 giri/minuto, di raggio R=0,15m. Quanta strada fa P in un giro?Quanto vale **v? ed a**?



$$f = 1200\,\frac{\text{giri}}{\text{min}} = 20\,\frac{\text{giri}}{\text{s}} \Longrightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{20} = 0{,}05\text{s}$$

$$T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \Longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}05} = 125{,}6\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Strada compiuta in un giro $S = 2\pi R = 2\pi \cdot 0{,}15 = 0{,}94\,\text{m}$

Velocità del punto: v $v = \omega R = 125{,}6 \cdot 0{,}15 = 18{,}84\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

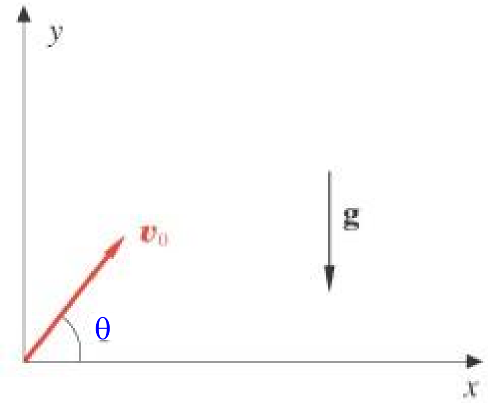
Accelerazione: a $a = \frac{v^2}{R} = \frac{18{,}84^2}{0{,}15} = 2366\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Accelerazione: ordini di grandezza

Protoni accelerari a FNAL	$9\ 10^{13}$ ms^{-2}
Palla da baseball	$3\ 10^{4}$ ms^{-2}
Pallone da calcio	$3\ 10^{3}$ ms^{-2}
automobile a 100Km/h contro ost. fisso	10^{3} ms^{-2}
Paracadutista allôapertura del paracadute	$3.2\ 10^{2}$ ms^{-2}.
Accelerazione di gravità sul Sole	$2.7\ 10^{2}$ ms^{-2}
Aviogetto in risalita dopo una picchiata	80 ms^{-2}
Perdita di coscienza dellôuomo	70 ms^{-2}
Accelerazione di gravità sulla Terra	9.8 ms^{-2}
Frenata di unôautomobile	~8 ms^{-2}
Accelerazione di gravità sulla Luna	1.7 ms^{-2}
Rotazione della Terra (Equatore)	$3.4\ 10^{-2}$ ms^{-2}
Rivoluzione della Terra	$0.6\ 10^{-2}$ms^{-2}

Moto parabolico dei corpi

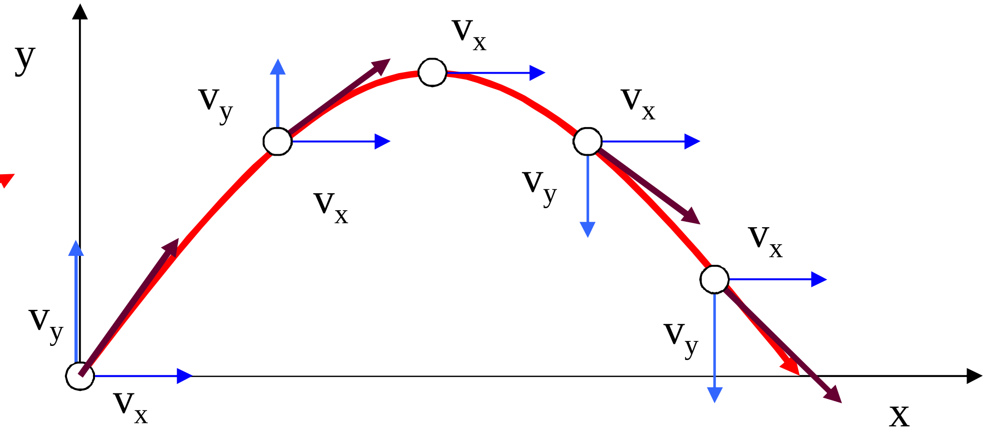
Uno degli esempi più noti di moto in due dimensioni è quello del moto del **proiettile**, dove per proiettile si intende ***qualunque oggetto puntiforme lanciato con una velocità iniziale e che subisce poi lôeffetto della gravità.*** (es. pallina da tennis, pallone etc)



Assunzioni:

- il **proiettile** può essere approssimato con un **punto materiale;**
- la **resistenza dellôaria** è trascurabile e non ha nessun effetto sul moto;
- nel moto del proiettile **le componenti orizzontale** (lungo lôasse x) e **verticale** (lungo lôasse y) sono **indipendenti fra loro**.

Esempio di traiettoria



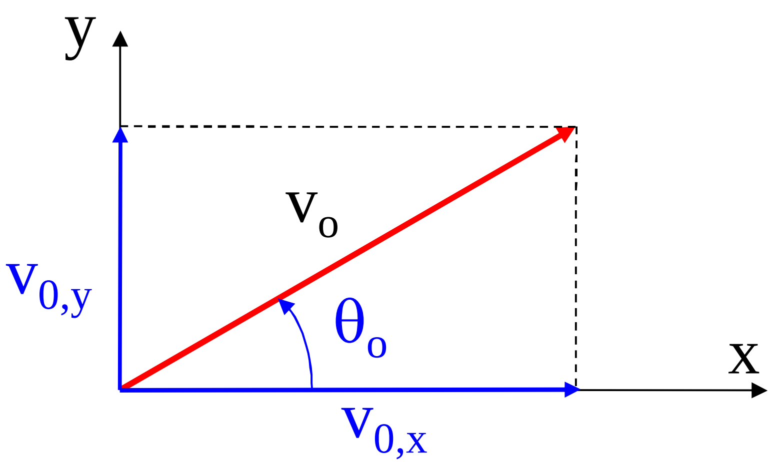
Moto del proiettile: velocità iniziale

Si può sempre trovare un sistema di riferimento tale per cui il **moto** si svolge in un **piano.**

La velocità iniziale ha due componenti

$$\mathbf{v}_0 = v_{0,x}\mathbf{i} + v_{0,y}\mathbf{j}$$

In generale è noto lôangolo θ_0 formato dal vettore $\mathbf{v}_0$ rispetto al verso positivo dellôasse x. Da questo e dal modulo della velocità iniziale si **possono ricavare le componenti** iniziali del vettore **velocità:**



$$v_{0,x} = v_0 \cos\theta_0$$

$$v_{0,y} = v_0 \sin\theta_0$$

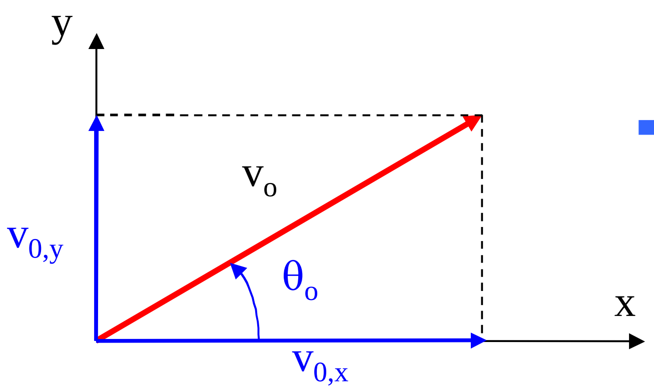
Moto del proiettile

Moto orizzontale

Lungo la componente orizzontale del moto non vi è alcuna accelerazione.

Il moto è pertanto *rettilineo uniforme* con velocità $v_x = v_{0,x}$.

Se x_0 è la componente orizzontale della posizione iniziale (a t=0), la **coordinata x** del punto materiale al tempo t sarà data da:



$$x(t) = x_0 + v_{0,x} t$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cos\theta_0 t$$

Moto del proiettile

Moto lungo la direzione verticale

Lungo la componente verticale ***il moto è uniformemente accelerato*** con accelerazione pari a **- g** (accelerazione di gravità).

La **velocità in direzione y** (verso positivo: quello verso lôalto) è data da :

$$v_y(t) = v_{0,y} - gt \Rightarrow v_y(t) = v_0 \sin\theta_0 - gt$$

Infine, se y_0 è la componente verticale della posizione iniziale (a t = 0), la **coordinata y** del punto materiale al tempo t è data da:

$$\mathbf{y(t) = y_0 + (v_0 \sin\theta_0) \cdot t - \frac{1}{2} g t^2}$$

se y_0 =0 $$y(t) = (v_0 \sin\theta_0) \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

Moto del proiettile

Traiettoria

La traiettoria di un punto materiale è data dallôinsieme delle posizioni successive occupate dal punto.

Essa viene scritta in questo caso come una ***curva y(x)*,** ovvero come una relazione fra le coordinate del punto materiale che vale ad ogni istante. Per ricavare la traiettoria nel caso del proiettile dalla legge oraria per la componente x ricaviamo t

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x(t) - x_0}}{\mathbf{v_{0,x}}} = \frac{\mathbf{x(t) - x_0}}{\mathbf{v_0 \cos\theta_0}}$$

Sostituiamo t nellôespressione della legge oraria per la componente y

$$y = y_0 + \left(v_0 \sin\theta_0\right) \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \longrightarrow$$

$$\mathbf{y(x) = y_0 + \left(v_0 \sin\theta_0\right) \frac{(x - x_0)}{v_0 \cos\theta_0} - \frac{1}{2} g \left[\frac{(x - x_0)}{v_0 \cos\theta_0}\right]^2}$$

Moto del proiettile

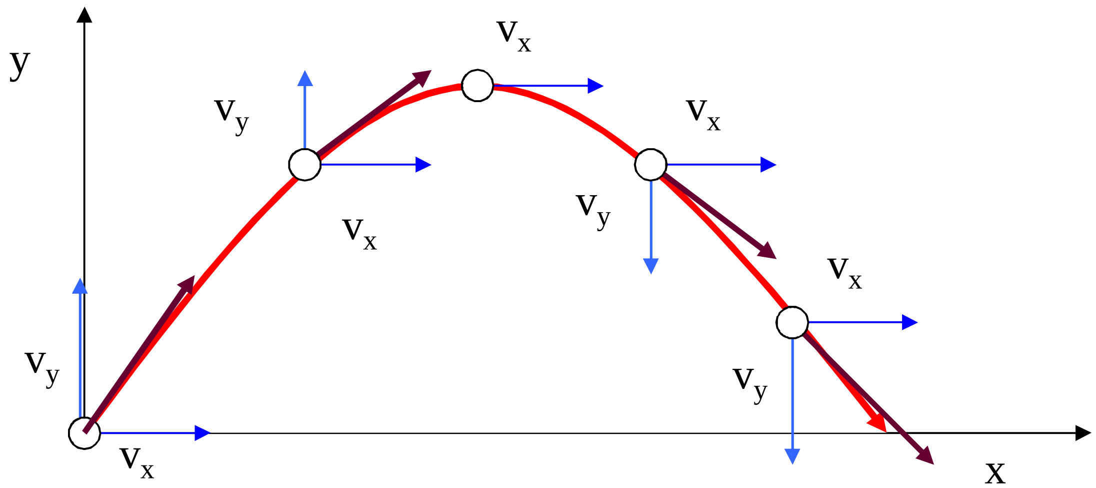
Traiettoria

La traiettoria del proiettile è quindi una **parabola sul piano xy**,

la cui equazione è la seguente:

$$y(x) = y_0 + \mathrm{tand}_0 (x - x_0) - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}(x - x_0)^2$$

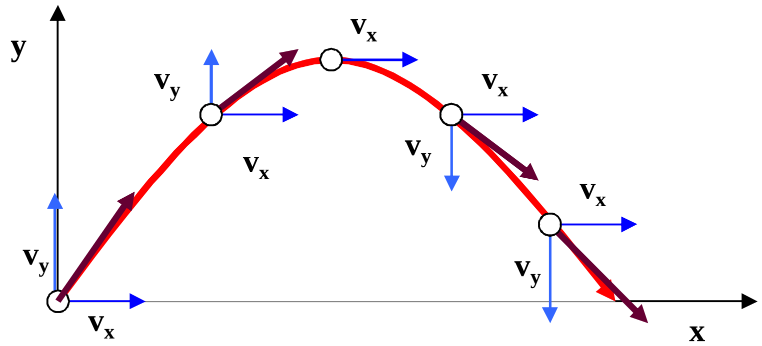
Se a t=0 il punto è nellôorigine (x_0=0 e y_0=0): $$y(x) = x \cdot \tan\theta_0 - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta_0)^2} x^2$$



Moto del proiettile

Punto di massima altezza

Si possono calcolare le coordinate x_M e y_M del punto di altezza massima raggiunto dal proiettile.



$$v_y(t) = v_0 \sin\theta_0 - gt \Longrightarrow v(t = t_M) = v_0 \sin\theta_0 - g t_M = 0 \Rightarrow t_M = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g}$$

e inserendo t_M nelle leggi orarie x(t) e y(t) si ottengono le coordinate cercate:

Il punto di massima altezza è il punto in cui la componente y della velocità è nulla:

$$x_M = x_0 + v_0 \cos\theta_0 t_M = x_0 + \frac{v_0 \cos\theta_0 v_0 \sin\theta_0}{g} = x_0 + \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{2g}$$

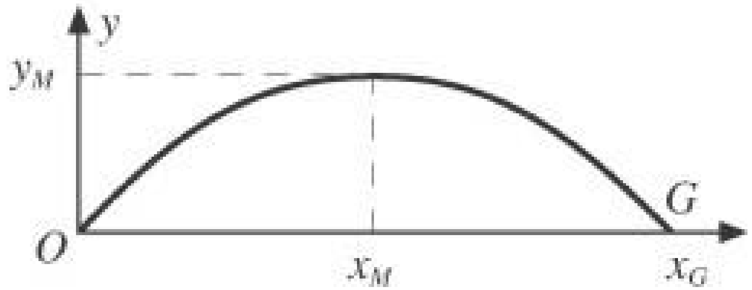
$$y_M = y_0 + v_0 \sin\theta_0 t_M - \frac{1}{2} g t_M^2 = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{g} - \frac{1}{2} g \left[\frac{v_0 \sin\theta_0}{g}\right]^2 = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{2g}$$

Se $x_0=0$

$y_0=0$

$$x_M = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{2g}$$

$$y_M = \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{2g}$$



Moto del proiettile

Gittata

Si può calcolare infine ***la gittata del proiettile***, ovvero la distanza alla quale il proiettile ripassa per la quota di lancio. Per fare questo si può utilizzare lôequazione della traiettoria e imponendo che la quota y(x) sia pari a y_0:

$$y(x) = y_0 + \tan\theta_0 (x - x_0) - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}(x - x_0)^2 = y_0$$

Ovvero:

$$\tan\theta_0 (x - x_0) - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}(x - x_0)^2 = 0$$

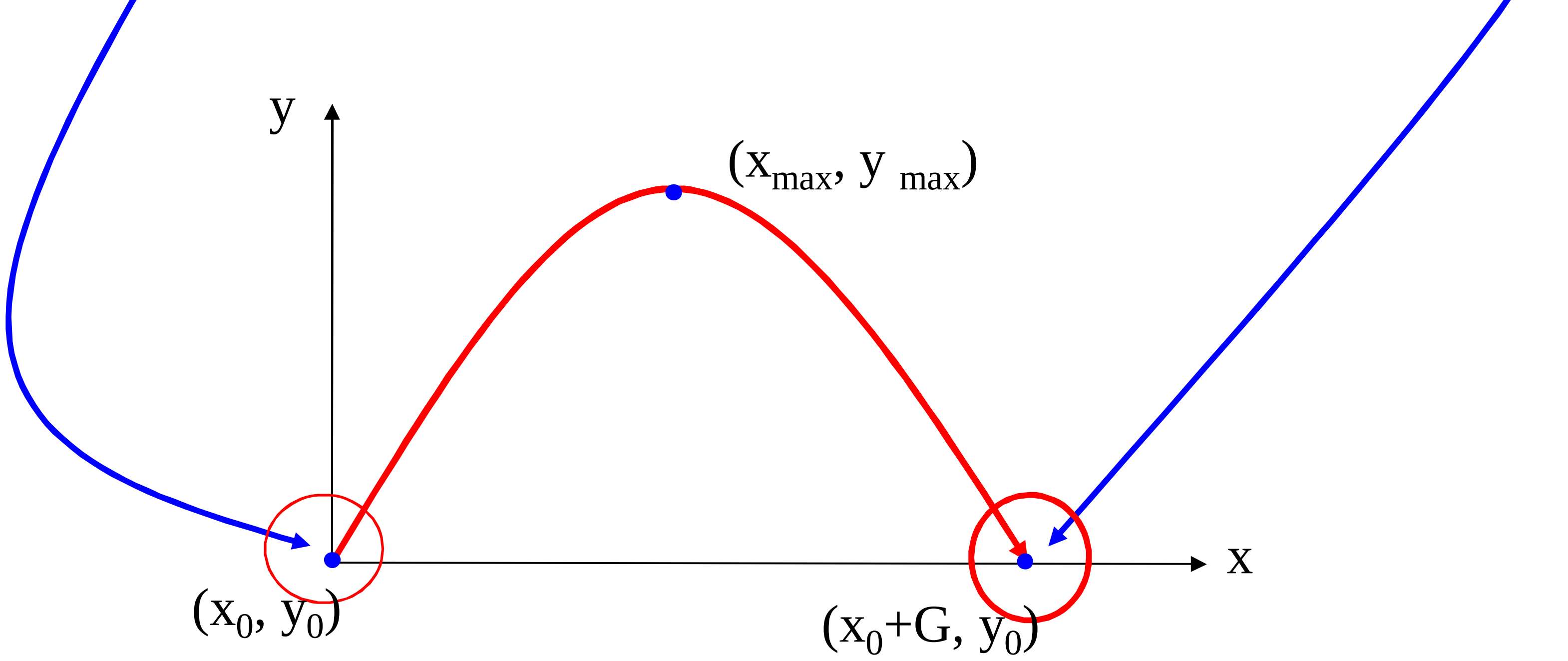
Gittata G

L'equazione precedente ha due soluzioni:

Soluzione 1: $x_1 - x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = x_0$ Posizione iniziale

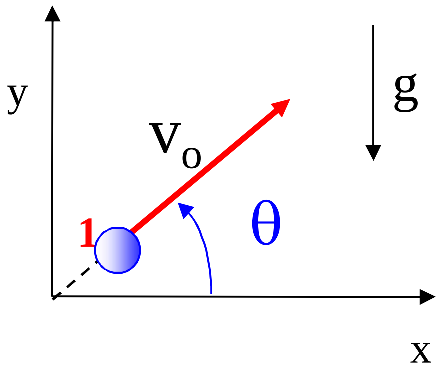
Soluzione 2: $x_2 - x_0 = \tan\theta_0 \dfrac{2(v_0\cos\theta_0)^2}{g} = \dfrac{2v_0^{\,2}\cos\theta_0\sin\theta_0}{g} = \dfrac{v_0^{\,2}\sin 2\theta_0}{g} = G$

G è massima quando $\sin 2\theta_0 = 1$ quindi $\theta_0 = \pi/4$



Esercizio

Una palla viene lanciata con una velocità v_0 =50 m/s che forma un angolo θ=37° con l'orizzontale. Trovare dopo quanto tempo cade a terra e il valore della gittata



Lungo la componente verticale ***il moto è uniformemente accelerato*** con accelerazione pari a **g.**

Velocità in direzione y: $v_y(t) = v_{0,y} - gt \Rightarrow v_y(t) = v_0 \sin\theta - gt$

Quando il punto raggiunge la massima altezza la componente y della velocità è nulla:

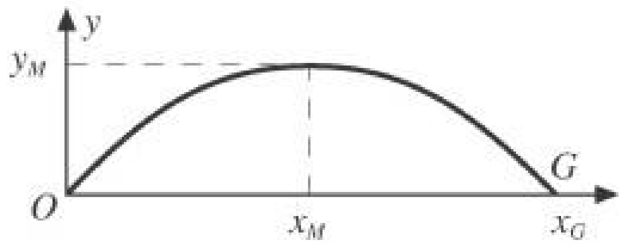
$$v(t = t_M) = v_0 \sin\theta - g t_M = 0 \qquad \Rightarrow t_M = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

Tempo in cui il corpo raggiunge terra:

$$t_T = 2t_M = 2\frac{v_0 \sin\theta}{g} = 2\frac{50\,\mathrm{sen}37°}{9{,}8} = 6{,}14\,\mathrm{s}$$

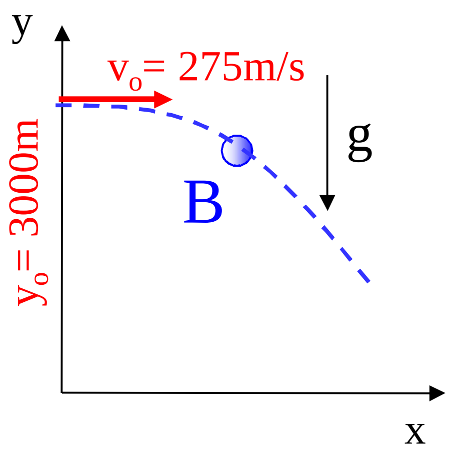
Gittata: $G = \dfrac{v_0^{\,2} \sin 2\theta}{g} = \dfrac{50^2 \sin(2 \cdot 37)}{9{,}8} = 245{,}2\,\mathrm{m}$

Oppure $\qquad x_G = v_0 \cos\theta_0\, 2t_M$



Esercizio

Un aereo viaggia a 3000 metri di altezza con una velocità di v_0=275m/s. Se sgancia una bomba a che distanza arriva?



Moto della bomba
$$\begin{cases} x(t) = v_{0,x}\,t \\ y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = 275t \\ y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

la bomba raggiunge il suolo a y=0 $\Rightarrow$ $0 = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$ $\Rightarrow$ $t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = \sqrt{\frac{6000}{9{,}8}} = 24{,}7\,s$

Distanza percorsa in direzione x: $x(24{,}7) = 275 \cdot 24{,}7$ $\Rightarrow$ $x = 6804\,m$