Proprietà Meccaniche dei Fluidi

Fluidi

• **non hanno forma propria, assumono quella del recipiente che li contiene**
• **non sostengono gli sforzi di taglio (scorrimenti)**

GAS

• **non hanno forma e volume propri,**
• **occupano tutto lo spazio a disposizione** $\rho \approx 1{,}3 Kg/m^3$
• **sono facilmente comprimibili**

LIQUIDI

• **hanno volume definito e superficie limite**
• **sono incompressibili,** $\rho \approx 10^3 Kg/m^3$

•**Comportamenti diversi dovuti a diverse forze di legame tra le molecole nella fase liquida e gassosa**

DENSITA'

$$\rho = \frac{M}{V} \quad \Longrightarrow \quad [\rho] = [ML^{-3}]$$

Spazio interstellare		$10^{-18} \div 10^{-21}$ Kg/m^3
Vuoto di laboratorio		10^{-18} Kg/m^3
Idrogeno	T=0°C ; P=1 atm	$9\ 10^{-2}$ Kg/m^3
Aria	T=0°C ; P=1 atm	1,3 Kg/m^3
	T=100°C ; P=1 atm	0,95 Kg/m^3
	T=0°C ; P=50 atm	6,5 Kg/m^3
Ghiaccio		0,92 10^3 Kg/m^3
Acqua	T=0°C ; P=1 atm	1 10^3 Kg/m^3
	T=100°C ; P=1 atm	0,958 10^3 Kg/m^3
	T=0°C ; P=50 atm	1,002 10^3 Kg/m^3
Alluminio		2,7 10^3 Kg/m^3
Mercurio		1,36 10^4 Kg/m^3
Platino		2,14 10^4 Kg/m^3
Terra	Densita' media	5,52 10^3 Kg/m^3
	Densita' del nucleo	9,5 10^3 Kg/m^3
	Densita' della crosta	2,8 10^3 Kg/m^3
Sole	Densita' media	1,4 10^3 Kg/m^3
	Densita' nel centro	~1,6 10^5 Kg/m^3
Stelle Nane Bianche	Densita' centrale	$10^8 \div 10^{15}$ Kg/m^3
Nucleo Uranio		~ 10^{17} Kg/m^3

Unita' di misura:
S.I. → kg m^{-3}

Varia con:
1. **pressione**
2. **temperatura**

Varia:
1. **Poco nei liquidi**
2. **Molto nei gas**

Caratteristiche dei fluidi e forze

Fluidi sono sistemi continui composti da infiniti elementi di massa $dm = \rho dV$

Caratteristica dei fluidi: ***possibilità di scorrimento*** di una qualsiasi parte di fluido rispetto ad una adiacente o alla parete del contenitore

L'attrito interno si oppone allo scorrimento, non c'è forza di attrito statico che determina equilibrio come nei solidi

$\Downarrow$

quindi se fluido è in quiete ***le forze tra gli elementi di fluido sono normali alla superficie*** di separazione altrimenti gli elementi scorrerebbero tra di loro

Non si può parlare di forza applicata ad un punto di un fluido: per ciascun elemento ***dm*** si considerano:

- **Forze di volume proporzionali a dV**
- **Forze di superficie proporzionali a dS**
- **Pressione non ha caratteristiche direzionali →**

in figura l' elemento di fluido è in equilibrio.

Perchè ciò avvenga devo avere $p_a = p_b = p_c = p$

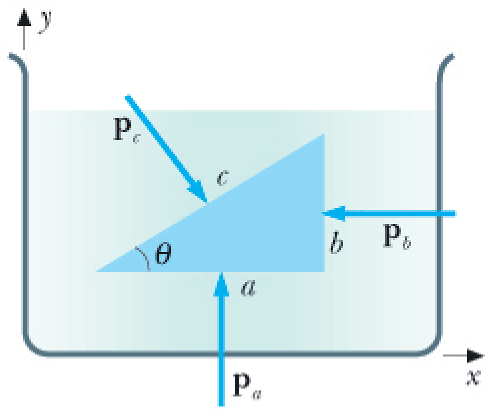


Figura 9.1
Pressione all'interno di un fluido.

Pressione

La pressione per un fluido non ha caratteristiche direzionali, essa è funzione scalare del punto che si considera all'interno del fluido e non dipende dall'orientazione della superficie su cui è misurata

La pressione in un punto di un fluido è il rapporto tra la forza agente su una superficie infinitesima che circonda il punto e l'area della superficie stessa

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS} \Longrightarrow p = \frac{dF}{dS}$$

$$p = \frac{F}{S}$$

Se nei punti della superficie S finita, la pressione è costante

Unità di misura SI

$$N \cdot m^{-2} \rightarrow (Pa)$$

Dimensioni:

$$[MLT^{-2}] \cdot [L^{-2}] = [ML^{-1}T^{-2}]$$

la pressione in un fluido si misura ad es con il Barometro aneroide (scatola deformabile)

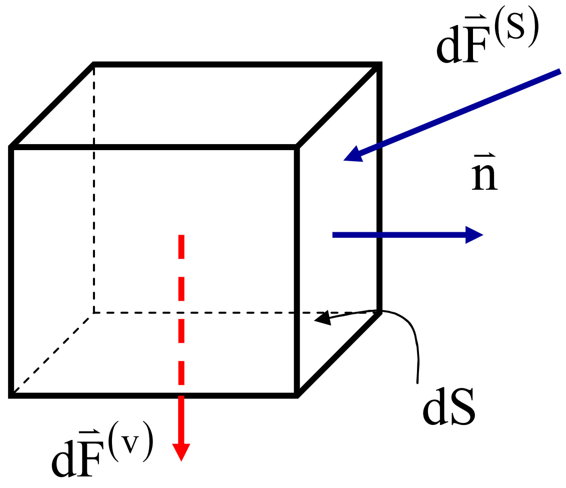
La PRESSIONE *è uno scalare*

altre unità:

$$1\ \text{bar} = 10^5\ \text{Pa}$$

$$1\ \text{atm} = 1.013 \cdot 10^5\ N \cdot m^{-2} = 1.013\ \text{Bar}$$

$$1\ \text{Torr} = 1\ \text{mm Hg} \quad \Rightarrow 760\ \text{mm Hg} = 760\ \text{Torr} = 1\ \text{atm}$$



$$\left.\begin{array}{l} F_t^{(S)} \Rightarrow \dfrac{dF_t^{(S)}}{dS} = \tau \\ F_n^{(S)} \Rightarrow \dfrac{dF_n^{(S)}}{dS} = p \end{array}\right\} \Rightarrow \text{scalari}$$

Forze di volume

Per ciascun elemento di massa ***dm*** del fluido si considerano forze di volume proporzionali a ***dV,*** come ad esempio la forza peso

$$dF^{(V)} = g dm = g \cdot \rho dV$$

Forze di superficie

Forze di superficie si manifestano sulle superfici di contatto e/o di separazione di fluidi e sono proporzionali alla superficie.

$$\underbrace{dF^{(s)} \Rightarrow p \cdot ds}$$

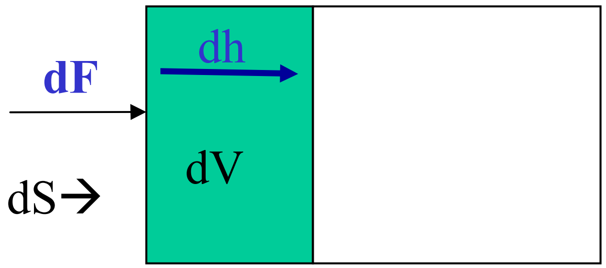
$$p = \frac{dF_n}{dS} \qquad \tau = \frac{dF_t}{dS}$$

Sforzo normale   Sforzo di taglio

NOTA:

- In un fluido in equilibrio sono assenti gli sforzi di taglio e si hanno solo forze normali
- nei fluidi in moto si hanno anche sforzi di taglio

Lavoro delle forze di pressione



Supponiamo di avere forza $dF = pdS$ che agisce ortogonalmente a dS, che si sposta di dh .

Il lavoro è: $\mathbf{dW = dF\ dh = p\ dS\ dh}$

$dW = p\ dV$ con dV volume infinitesimo ⟹ $W = \int p dV$

Struttura microscopica dei fluidi

Solidi →forza di legami tra i componenti atomi o molecole tale che restano fisse o oscillano attorno a posizione di equilibrio . Solidi difficili da deformare alto valore di modulo di Young

Liquidi →legame meno forte, componenti si muovono, ma restano legati (no forma propria, impossibilità a resistere a sforzo di taglio, incompressibilità)

Gas→ molecole in movimento e molto distanti tra loro. Forze intermolecolare decrescono con distanza, non riescono a tenere legate le molecole (no forma e volume proprio, facilmente compressibili, no resistenza a sforzi di taglio)

Equilibrio di un fluido in presenza della forza peso

Un fluido si dice in quiete, ***se tutti gli elementi del fluido hanno accelerazione e velocità nulla, in un sistema di riferimento inerziale***

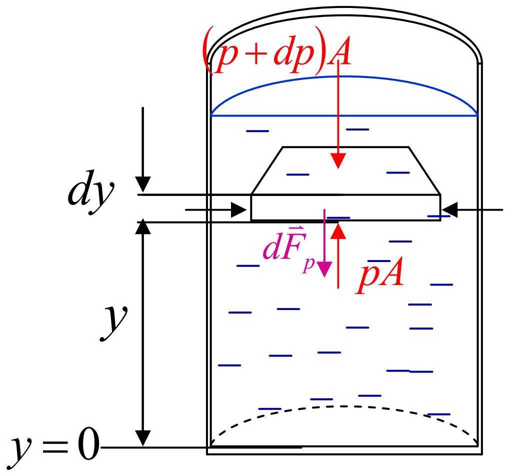
Consideriamo un **piccolo elemento di volume** di fluido in equilibrio

Forze agenti sull'elemento dm:

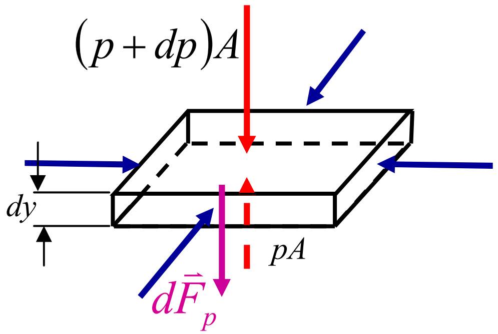
- forza esterna di volume: ***forza peso*** (F_v)
- ***forze di pressione***, dovute al fluido circostante (F_p)

Forza peso (F_v) $\quad dF_v = dF_{y,v} = -g\,dm = -\rho g A dy$

Forza di pressione (F_p) $\quad dF_p = pA - (p+dp)A$



$$dm = \rho dV = \rho A dy$$



Fluido in quiete $\Rightarrow$ $dF_p + dF_v = 0$

$$pA - (p+dp)A - \rho g A dy = 0$$

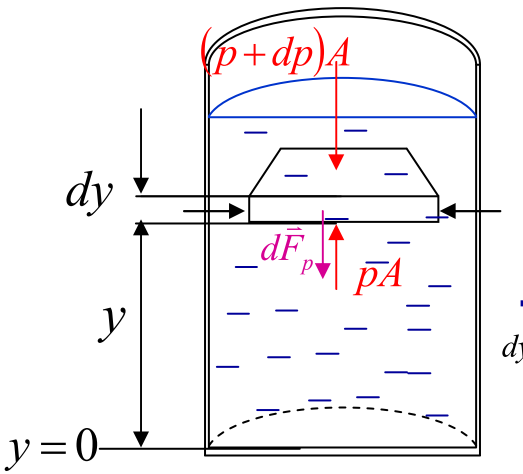
$$dpA = -\rho g A dy$$

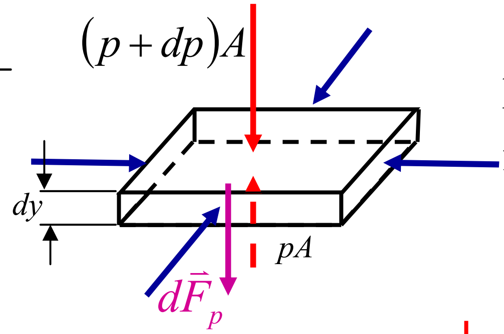
$$\boxed{\frac{dp}{dy} = -\rho g}$$

Legge di Stevino

$$\boxed{\frac{dp}{dy} = -\rho g}$$

$$dp = -\rho g dy$$





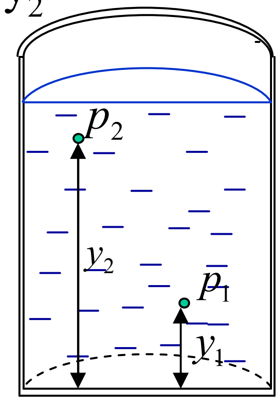
se in un fluido agisce la forza peso, la pressione nel fluido non può essere costante, ma varia in accordo con la relazione sopra per avere l'equilibrio statico

Tra due punti qualsiasi alle quote y_1 e y_2 in un fluido:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\rho g \int_{y_1}^{y_2} dy$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{p_2 - p_1 = -\rho g (y_2 - y_1)}$$



Se y_2 è sulla superficie libera p_2 corrisponde a p_0:

$$p_0 - p_1 = -\rho g h$$

Con h= profondità di p_1

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{p_1 = p_0 + \rho g h}$$

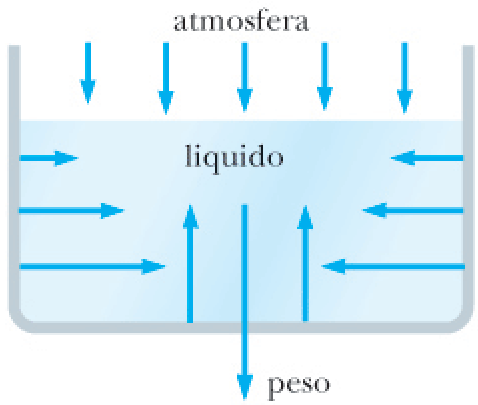
Questa relazione è detta ***legge di Stevino*** e mostra che in un liquido con ρ costante, ***la pressione cresce linearmente con la profondità***

Legge di Stevino

$$p_1 = p_0 + \rho g h$$

Se fluido ha densità costante la pressione cresce linearmente con la profondità

Se ho bacino di acqua che ha $\rho = 10^3 Kg/m^3$



sottoposto a pressione atmosferica $p_0 \cong 10^5 Pa$

Ho che la pressione ad una certa profondità h:

$$p(h) = (10^5 + 9{,}8\ 10^3\ h)\ Pa$$

ogni 10 metri la pressione aumenta di circa un bar (circa 1 atm)

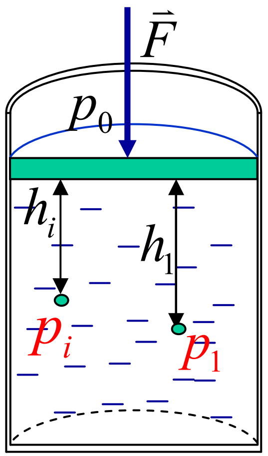
Considero l'acqua praticamente incompressibile quindi a densità costante

E' possibile trovare la legge di Stevino calcolando il peso di colonna di liquido alta h

$$\mathbf{mg = \rho Vg = \rho Shg} \Rightarrow p = \frac{F}{S} = \frac{\rho g h S}{S} = \rho g h$$

Conseguenze della legge di Stevino

1. Legge di Pascal



Dalla legge di Stevino: $\mathbf{p_1 = p_0 + \rho g h}$

Con p_0 pressione esterna

Segue che ***ogni cambiamento della pressione esterna dà luogo a un uguale variazione di p in tutto il fluido***

$$\begin{cases} p_1 = p_0 + \rho g h_1 \\ p_i = p_0 + \rho g h_i \end{cases}$$

Se la pressione esterna subisce una variazione:

$$p_0 \rightarrow p_0 + \Delta p_0$$

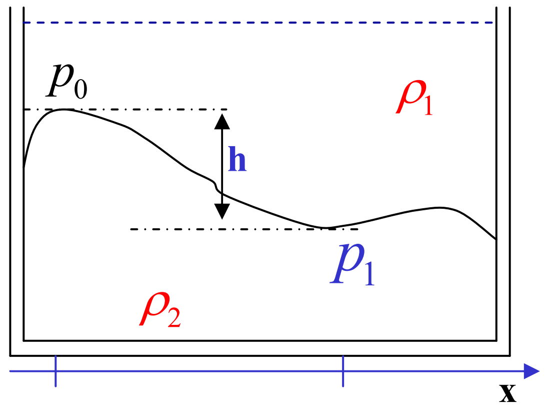
$$\begin{cases} p_1' = p_1 + \Delta p_0 \\ p_i' = p_i + \Delta p_0 \end{cases}$$

Tutti i punti nel fluido subiscono la stessa variazione di pressione

Conseguenze della legge di Stevino

2. Superfici isobariche

La superficie di separazione di liquidi di diversa densita' è sempre orizzontale



Si supponga che non sia così.

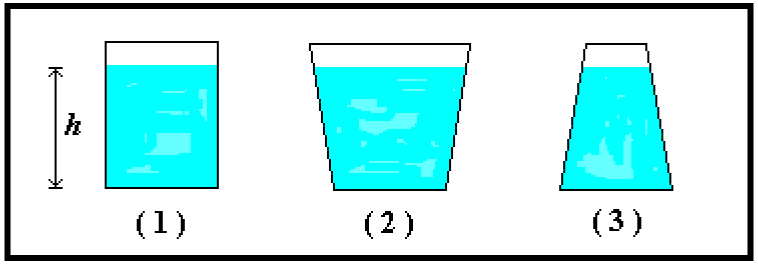
In figura sono rappresentati due fluidi di densità diverse ρ_1 e ρ_2 separati da una superficie non orizzontale. Per la legge di Stevino alla stessa quota ci deve essere la stessa pressione indipendentemente dalla coordinata x. Dunque considerando posizioni x diverse posso esprimere p_1 come segue:

$$\begin{cases} p_1 = p_0 + \rho_1 gh \\ p_1 = p_0 + \rho_2 gh \end{cases} \Rightarrow p_0 + \rho_1 gh = p_0 + \rho_2 gh \Rightarrow \rho_1 gh = \rho_2 gh$$

Essendo: $\rho_1 \neq \rho_2$ $\Rightarrow$ Perché sia soddisfatta questa eguaglianza bisogna che: $h = 0$

Conseguenze della legge di Stevino

3. Paradosso idrostatico



Una conseguenza della legge di Stevino è che ***la pressione dipende solo dalla profondità alla quale essa viene misurata e non dalla forma del recipiente che contiene il fluido.***

Consideriamo i tre recipienti rappresentati in figura aventi ugual base e riempiti con uno stesso liquido fino ad una altezza *h*. La pressione sul fondo di ogni recipiente dovuta al peso del liquido, secondo la legge di Stevino, assume lo stesso valore nei tre vasi. $p = \rho g h$

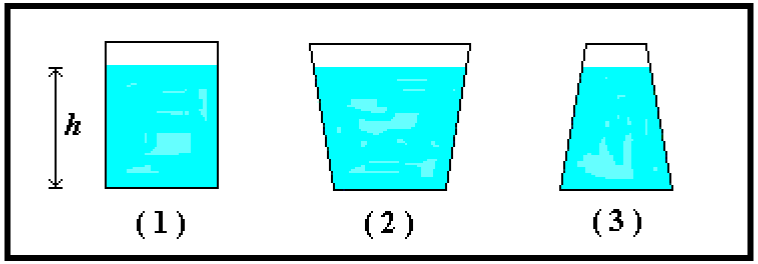
La forza F che agisce sul fondo è: $F = pA = \rho g h \cdot A$

Ovvero la forza è uguale al peso del liquido di volume $V = A \cdot h$, cioè il peso del liquido contenuto nel vaso (1).

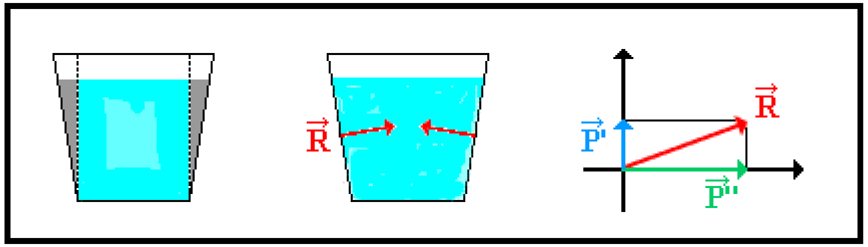
Il ***paradosso idrostatico*** consiste proprio in questo: ***pur essendo il peso del liquido contenuto nei vari recipienti diverso a seconda dei casi, la forza esercitata sul fondo (nelle condizioni sopra indicate) è uguale per tutti e tre i casi e pari al peso del liquido contenuto nel recipiente (1).***

Conseguenze della legge di Stevino

Paradosso idrostatico - continuazione

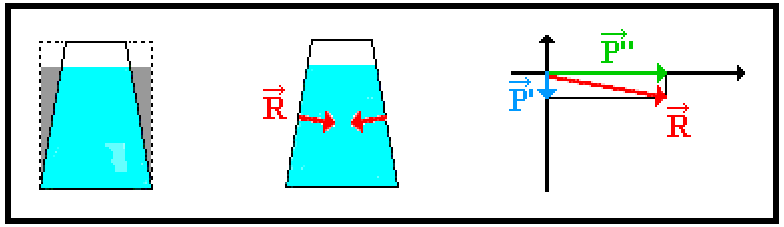


La forza esercitata sul fondo è uguale per tutti e tre i casi e pari al peso del liquido contenuto nel recipiente (1).



Per il recipiente (2) il peso del liquido contenuto è maggiore della forza esercitata sul fondo.

Il paradosso in questo caso si spiega con il fatto che parte del peso del liquido contenuto è sostenuto dalla forza normale R, avente componente P' verso l'alto, esercitata dalle pareti del recipiente stesso. In effetti la porzione di liquido ombreggiata è sostenuta dai lati del recipiente.

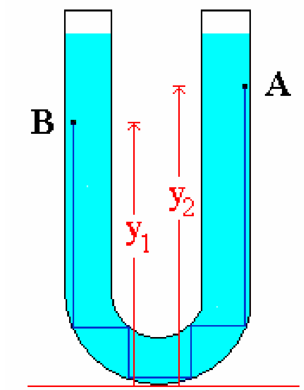


Per lo stesso principio nel caso del recipiente (3) la forza di reazione delle pareti del recipiente avrà una componente P' verso il basso che andrà a sommarsi al peso del liquido a quella quota e darà comunque come risultato una forza F di intensità equivalente al peso del liquido contenuto in (1)

in questo caso il peso del liquido contenuto in (3) è minore di quello contenuto in (1).

Conseguenze della legge di Stevino

4. Vasi comunicanti



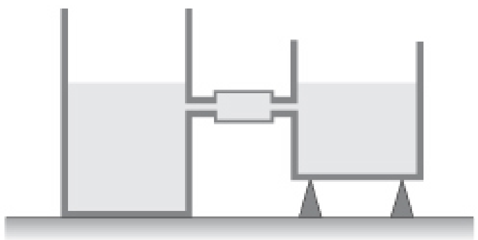
Conseguenza della legge di Stevino è che ***in un sistema di vasi comunicanti il fluido contenuto raggiunge la stessa quota indipendentemente dalla forma dei recipienti.***

Nel caso rappresentato in figura la differenza di pressione tra due punti qualsiasi si calcola attraverso la formula:

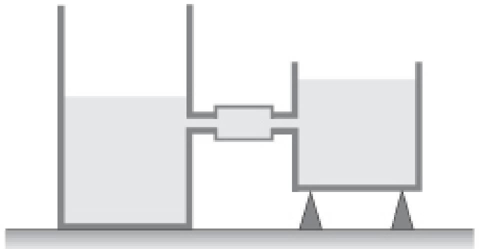
$$\boxed{p_2 - p_1 = -\rho g\left(y_2 - y_1\right)}$$

Poiché, per la legge di Stevino si ha differenza di pressione solo in corrispondenza di variazioni di quota, se le superfici A e B sono soggette alla stessa pressione, $\Delta p=0$,

$\Rightarrow$ allora saranno alla stessa quota $y_2=y_1$



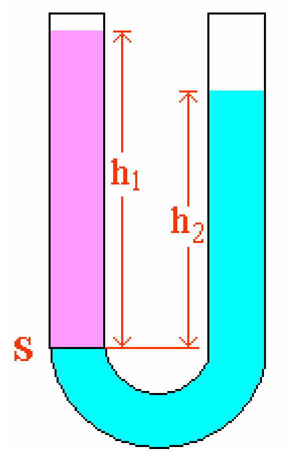
Condizione di equilibrio



Condizione di non equilibrio. Si osserva un flusso di liquido fino allo stabilirsi della stessa quota

Conseguenze della legge di Stevino

4. Vasi comunicanti - Misura di densità



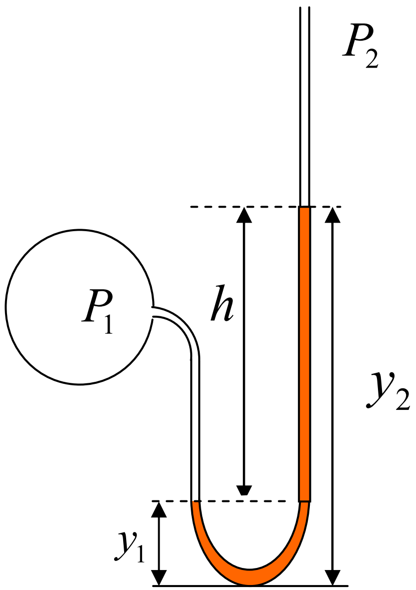
Se il tubo è riempito con liquidi non miscibili di densità diverse ρ_1 e ρ_2 , le altezze raggiunte dal fluido nei due rami saranno diverse: h_1 e h_2. Sulla superficie S di separazione tra i due liquidi agiranno rispettivamente verso il basso e verso l'alto le pressioni idrostatiche delle colonne h_1 e h_2.
In condizioni di equilibrio le due pressioni si bilanceranno:

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 \Longrightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{h_1}{h_2}$$

Pertanto due liquidi non miscibili in vasi comunicanti ***raggiungono altezze inversamente proporzionali alle proprie densità.***

Conseguenze della legge di Stevino

4. Vasi comunicanti - Barometri a tubo aperto



Se il fluido ha densità ρ: $$p_1 + \rho g y_1 = p_2 + \rho g y_2$$

$$p_1 = p_2 + \rho g (y_2 - y_1) = p_2 + \rho g h$$

Se $p_2 = p_0 =$ pressione atmosferica :

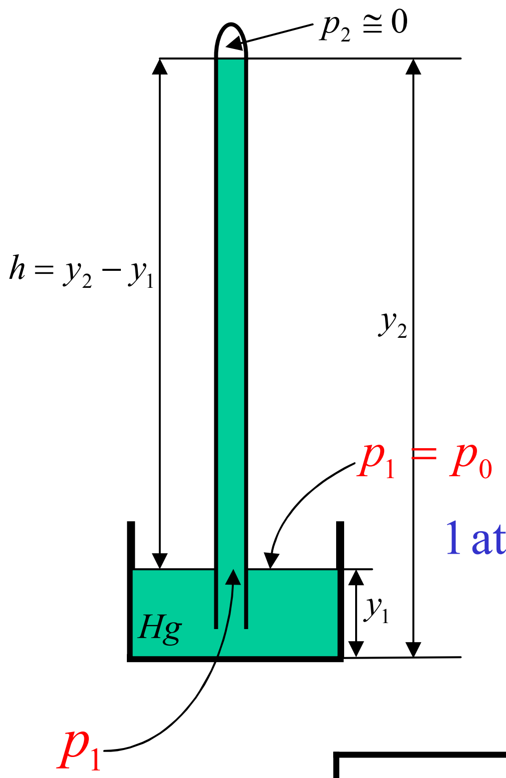
$$p_1 = p_0 + \rho g h$$

$$\boxed{p - p_0} = \rho g h$$

pressione differenziale

A partire dalla misura di h si ricava il valore di p_1

Misura della pressione (atmosferica). E. Torricelli (1608-1647)



$$p_0 = p_1 \Longrightarrow p_0 = \rho g h$$

Per convenzione il livello di riferimento della pressione atmosferica è quello esercitato da una colonna di mercurio:

- alla temperatura di 0°C,
- con h=76 cm,
- ρ =13,595 10^3 kg/m3

$$1\,\text{atm} = \left(13.5950 \cdot 10^3\,\text{Kg/m}^3\right)\left(9.81\,\text{m/s}^2\right)\left(0.76\,\text{m}\right) = 1.013 \cdot 10^5\,\text{N/m}^2$$

$$\Downarrow$$

$$1\text{atm} = 1.013 \cdot 10^5\,\text{Pa}$$

	Pa	bar	mbar	atm	Torr
1Pa = 1N/m²	**1**	**10^{-5}**	**10^{-2}**	**9.8692 10^{-6}**	**750.06 10^{-5}**
1bar =0.1MPa	**10^5**	**1**	**10^3**	**0.98692**	**750.06**
1mbar =10^2Pa	**10^2**	**10^{-3}**	**1**	**0.98692 10^{-3}**	**0.75006**
1 atm =760 Torr	**101325**	**1.013**	**1013.25**	**1**	**760**
1 Torr =1mm Hg	**133.322**	**0.00133**	**1.333**	**1.3158 10^{-3}**	**1**

Caratteristiche medie dell'atmosfera

	Altitudine (Km)	Pressione (bar)	Densita' (Kg/m^3)	Temperatura °C	Altezza di scala (Km)	
	0	1.01325	1.225	15	8.43	
	2	0.7950	1.0066	15	8.06	Nubi(90%H_2O)
troposfera	4	0.6166	0.8195	-11	7.68	
	8	0.3565	0.5258	-37	6.93	
tropopausa	12	0.1940	0.3119	-56	6.37	ozono
	16	0.1045	0.1665	-56	6.37	
Stratosfera	20	0.0553	0.0889	-56	6.38	
	30	0.0119	0.0179	-42	6.83	
	40	0.0030	0.0040	-12	7.73	
Ionosfera	60	0.0002	0.0003	-19	7.57	Ionizzata e condutrice, riflessione delle Radioonde, aurore boreali
	80	$1.0\ 10^{-5}$	$2.12\ 10^{-5}$	-107	4.97	
	100	$2.14\ 10^{-7}$	$3.73\ 10^{-7}$	-74	6.02	
	150	$5.33\ 10^{-9}$	$1.76\ 10^{-9}$	+758	32.40	
	200	$1.63\ 10^{-9}$	$3.67\ 10^{-10}$	+1131	48.12	

La Pressione Atmosferica

La pressione atmosferica è originata dall'attrazione gravitazionale da parte della terra della massa di gas che la circonda. Quindi la pressione atmosferica diminuisce con l'altezza: il peso della colonna d'aria è minore

Ipotesi:

- densità proporzionale a p (T=cost.) $\Rightarrow \dfrac{\rho}{\rho_0} = \dfrac{p}{p_0}$
- g costante (indipendente da h)
- il gas atmosferico obbedisce alla legge dei gas perfetti (pV=cost.)

Chiamando y la quota: $\dfrac{dp}{dy} = -\rho g$ con: $\dfrac{\rho}{\rho_0} = \dfrac{p}{p_0} \Rightarrow \rho = \dfrac{p}{p_0}\rho_0$

$$\frac{dp}{dy} = -g\rho_0 \frac{p}{p_0} \Rightarrow \frac{dp}{p} = -g\frac{\rho_0}{p_0}dy = -\frac{dy}{a}$$

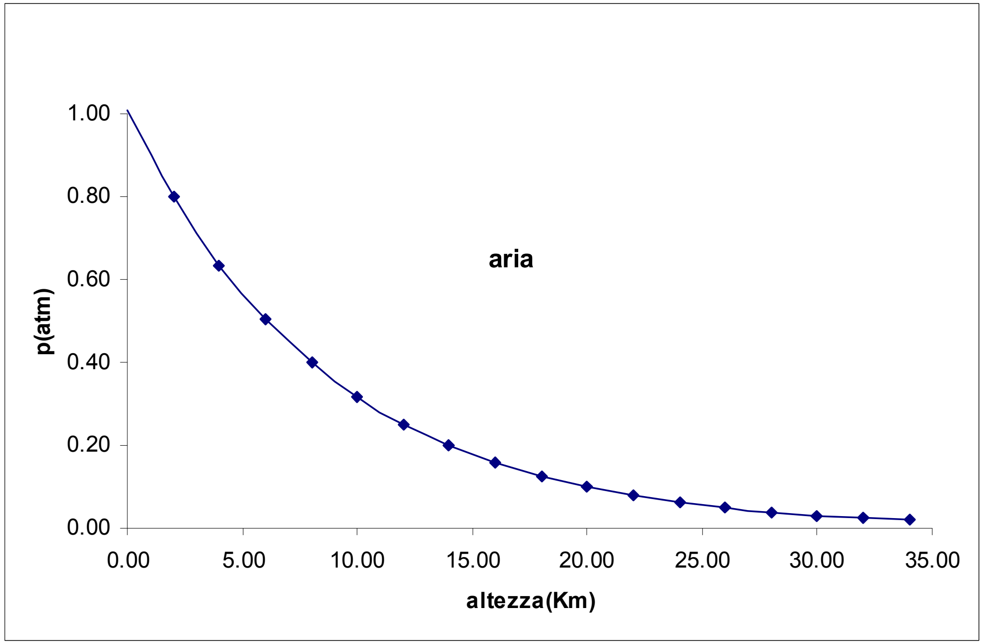
Con: $a = \dfrac{p_0}{g\rho_0} = \dfrac{1{,}013 \cdot 10^5}{9{,}8 \cdot 1{,}3} = 7{,}95 \cdot 10^3 \text{ m} \cong 8\text{km}$

Altezza di scala

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{1}{a}\int_0^y dy \Rightarrow \ln\frac{p}{p_0} = -\frac{z}{a}y$$

$$p = p_0 e^{-g\frac{\rho_0}{p_0}y} = p_0 e^{-\frac{y}{a}}$$

La Pressione Atmosferica

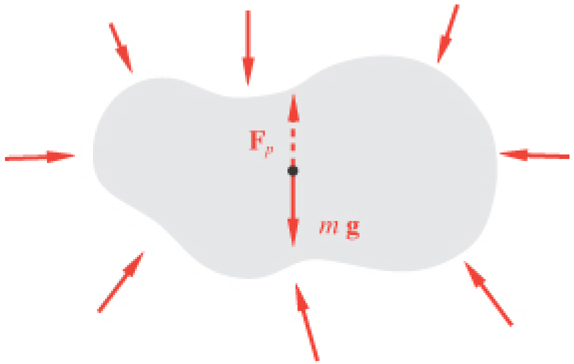


$$p = p_0 e^{-\frac{y}{a}}$$

Nell'atmosfera isoterma la pressione decresce esponenzialmente con l'altezza

Principio di Archimede

Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del fluido spostato.



In un fluido in equilibrio sotto l'azione della gravità isoliamo idealmente un volume finito di fluido V di forma qualsiasi.

La risultante delle forze di pressione, esercitate dal resto del fluido sulla parte isolata, è uguale ed opposta alla forza peso della stessa.

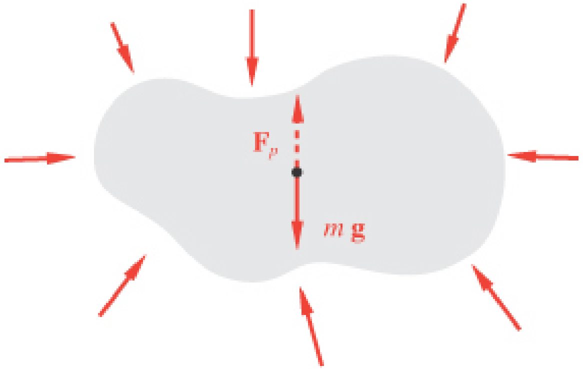
Infatti per la condizione di equilibrio del volume V, si ha:

$$\vec{F}_p + m\vec{g} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_p = -m\vec{g}$$

$m = \rho V$

Con ρ: densità del fluido

Forza di pressione esercitata sul fluido di volume V dal resto del fluido



Principio di Archimede

$$\vec{F}_p = -m\vec{g} = -\rho V \vec{g}$$

Forza di pressione esercitata sul fluido di volume V dal resto del fluido

Se ora sostituiamo allo stesso volume V di fluido un identico volume di qualsiasi altra sostanza di densità ρ' e massa: m'=ρ'V.

La risultante F_p delle forze di pressione esercitate dal fluido circostante non cambia, mentre varia la forza peso del volume preso in considerazione, dunque la forza risultante risulta:

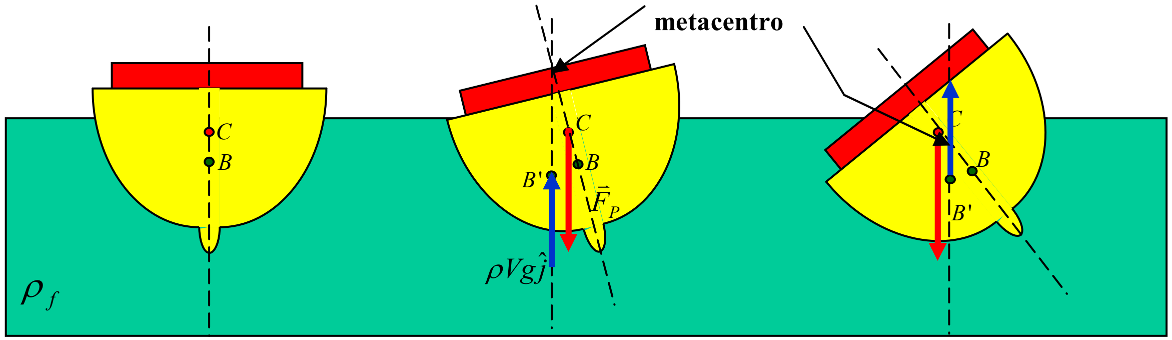
$$\vec{F}_R = \vec{F}_p + m'\vec{g} \Rightarrow \vec{F}_R = -m\vec{g} + m'\vec{g} = -\rho V\vec{g} + \rho' V\vec{g} = (\rho' - \rho) V\vec{g}$$

$$\vec{F}_R = (\rho' - \rho) V\vec{g}$$

Se ρ'>ρ la forza risultante ha la stessa direzione e verso di g e quindi il corpo scende nel fluido, se invece ρ'<ρ il corpo sale

La spinta verso l'alto ricevuta dal corpo è detta spinta di Archimede: $\vec{F}_A = \vec{F}_p = -\rho V\vec{g}$

Principio di Archimede



Profilo di barca
C=centro di massa (=baricentro)
B=centro di spinta

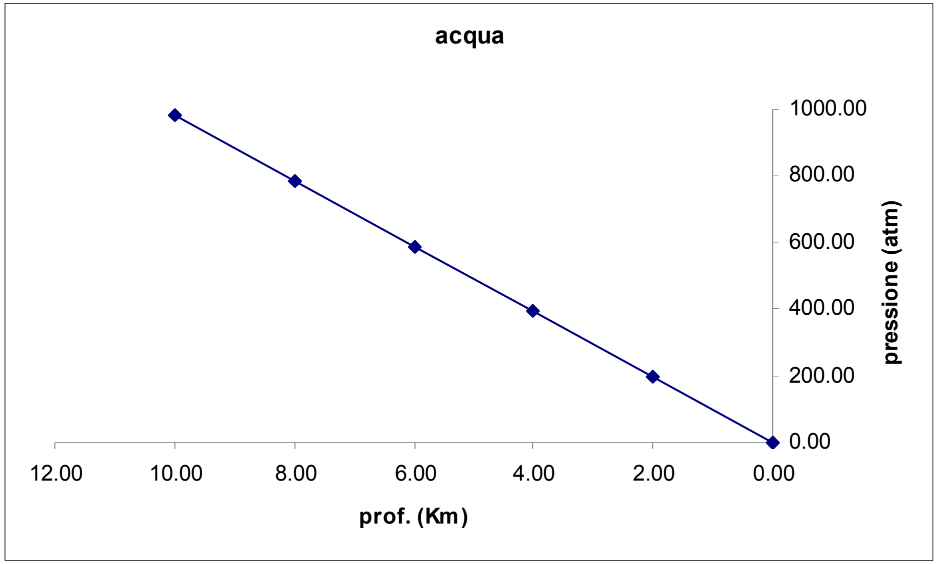
Se il centro di spinta ed il centro di gravita' non sono sulla stessa verticale si hanno momenti che agiscono in modo da riportare o allontanare dall' equilibrio il sistema

All' equilibrio: Il centro di spinta di Archimede è sulla verticale per C (centro di massa)

Se C è più basso di B → eq. stabile

Se C≡B→eq. indifferente

Se C è meno profondo di B→ eq. instabile



Esempio

Quale frazione del volume totale di un iceberg emerge dall'acqua? Sia la densità del ghiaccio ρ_i=0.92 g/cm^3 e quella dell' acqua di mare ρ_a=1.03 g/cm^3.

peso dell'iceberg: $P_i = \rho_i V_i g$ *Con: V_i: volume totale dell'iceberg*

peso dell' acqua spostata (spinta di Archimede): $P_a = \rho_a V_a g$ *Con: V_a: volume sommerso dell'iceberg*

All'equilibrio: $P_a = P_i \Rightarrow \rho_i V_i g = \rho_a V_a g$

$$\frac{\rho_i}{\rho_a} = \frac{V_a}{V_i} = \frac{0.92}{1.03} = 89\%$$

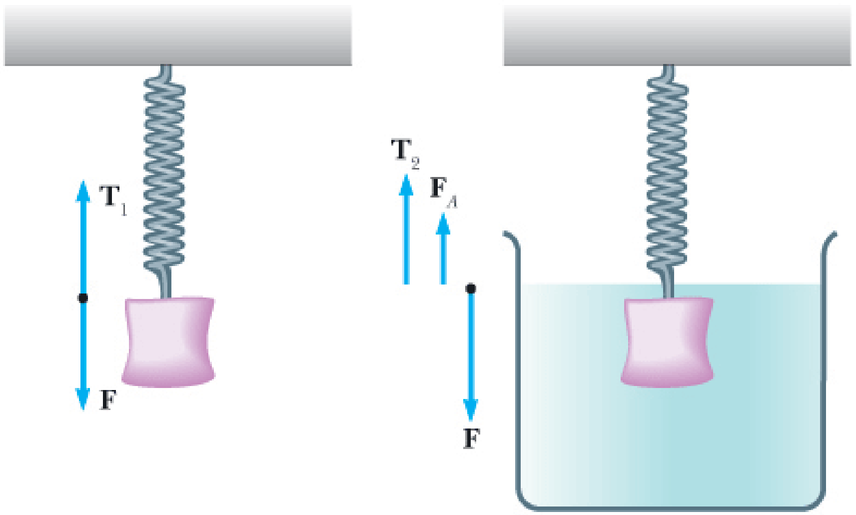
emerge 11% del volume dell' iceberg

Misura di densità e volume

Un corpo compatto di massa m_c è sospeso a un dinamometro che all'equilibrio segna T_1= 5,88 N. E' poi immerso completamente in acqua e il dinamometro segna T_2= 3,70 N. Trovare il volume V del corpo e la sua densità ρ_c.

T_1 è la forza peso del corpo mentre T_2 è il peso meno la spinta di Archimede . Quindi

$\mathbf{T_1 = m_c g}$ **e** $\mathbf{T_2 = m_c g - m_a g \rightarrow m_a g = T_1 - T_2}$ **con** $\mathbf{m_a g} = \rho_a V g$



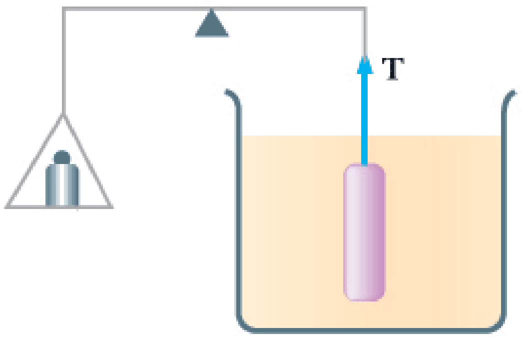
Trovo la massa $m_c = T_1/g = 0{,}6$ Kg e

V da $\mathbf{V}\, \rho_a\, \mathbf{g = T_1 - T_2} \rightarrow \mathbf{V = 2{,}22\ 10^{-4}\ m^3}$

$$\rho_c = m_c/V \quad = 2{,}7\ 10^3\ kg/m^3$$

Misura di densità e volume

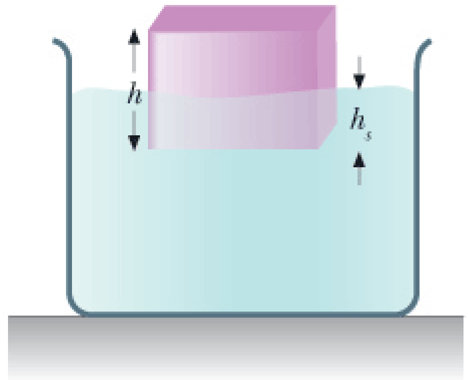
Se immergo completamente cilindro di massa m e volume V noto e misuro con una bilancia la tensione T ottengola densità ignota di un liquido



T è il peso meno la spinta di Archimede . Quindi

$T - m_c g = m_l g$ → $\rho_l V g = T_1 - m_c g$ **da cui ricavo facilmente la densità del fluido**

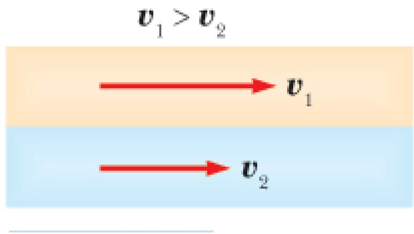
Se ho parallelepipedo di densità ρ immerso in parte in liquido di densità ignota ρ_l ho che peso di corpo e spinta di archimede sono eguali



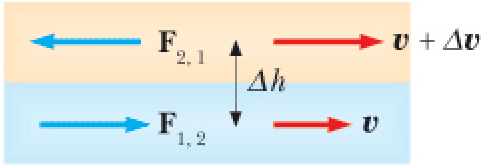
$\rho V g = \rho_l V_s g$ $\quad V_s$ è la parte di liquido spostato da cui ricavo **facilmente la densità del fluido dato che i volumi sonopropozionali a h e h_s**

$$\rho_1 = \rho \frac{V}{V_s} = \rho \frac{h}{h_s}$$

Attrito interno. Viscosità



Quando si verifica una condizione di scorrimento relativo tra due elementi di fluido, compare lungo l'area di contatto una forza tangenziale di attrito, detta forza di attrito interno, con ***verso sempre contrario a quello della velocità relativa***.



L'elemento 1 esercita una forza sull'elemento 2 e viceversa: le 2 forze sono uguali ed contrarie. Se la velocità $v_1>v_2$, ***la forza di attrito interno è ritardante per il primo elemento e accelerante per il secondo***

Sperimentale si trova che il modulo della forza di attrito interno si può esprimere come:

$$\boxed{dF = \eta dS \frac{dv}{dn}}$$

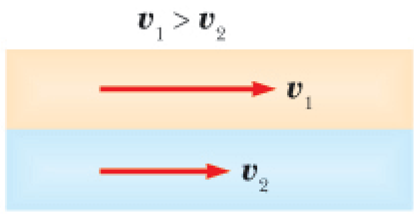
Con:

- ds: area di contatto
- dv/dn: variazione del modulo di velocità lungo la direzione ortogonale
- ***η: viscosità del fluido*** (dipende dal tipo del liquido e dalla temperatura – nei liquidi η decresce all'aumentare della temperatura, nei gas cresce)

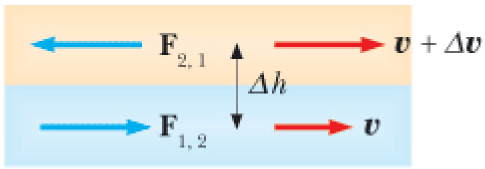
Viscosità

$$\boxed{dF = \eta dS \frac{dv}{dn}}$$

η: viscosità del fluido



Unità di misura SI $[\eta] = \left[\frac{N}{m^2} m \frac{s}{m}\right] = \left[\frac{Kg \cdot m \cdot s^{-2}}{m^2} m \frac{s}{m}\right] = \left[kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}\right]$



Dimensioni di η: $[\eta] = \left[ML^{-1}T^{-1}\right]$

Anche se nel S.I l'unità di misura è il kg/ms, nella pratica si usa l'unità di misura: poise e il sottomultiplo centipoise

$$1 \text{poise} = 10^{-1} kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$$

Alcun valori:

- olio ricino: 1 (20 °C)
- Glicerina: 1.5 (20°C)
- Acqua: 1.8 10^{-3} (0°C);
  1.0 10^{-3} (20°C);
  2.8 10^{-4} (100°C)
- sangue: 4 10-3
- olio lubrificante SAE 20: 0.3 (40°C)

Fluidi ideali

Si definisce fluido ideale, un fluido la cui viscosità η è nulla (η=**0**) e la cui densità è costante (ρ=cost)

Un fluido ideale è un fluido non viscoso e incomprimibile

TABELLA 9.1 Viscosità

Fluido	Temperatura (°C)	η (poise)
acqua	0	$1.79 \cdot 10^{-2}$
acqua	20	$1.00 \cdot 10^{-2}$
acqua	100	$0.30 \cdot 10^{-2}$
alcool etilico	20	$1.20 \cdot 10^{-2}$
mercurio	20	$1.55 \cdot 10^{-2}$
sangue	37	0.23
olio per motori	30	2.5
glicerina	20	15
vetro	700	$1.00 \cdot 10^{11}$
pece	15	$1.30 \cdot 10^{11}$
aria	20	$1.71 \cdot 10^{-4}$
idrogeno	20	$0.88 \cdot 10^{-4}$

Moto di un fluido – Regime stazionario

***Fluido in moto stazionario*:**

la velocita' delle particelle in ogni punto del fluido e' **costante nel tempo.** Cioè, la velocita' di ogni particella che passa in un dato punto e' sempre la stessa, mentre punti differenti sono in genere caratterizzati da velocità diverse. Nel regime stazionario quindi ***la velocità è funzione della sola posizione***

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x,y,z)$$

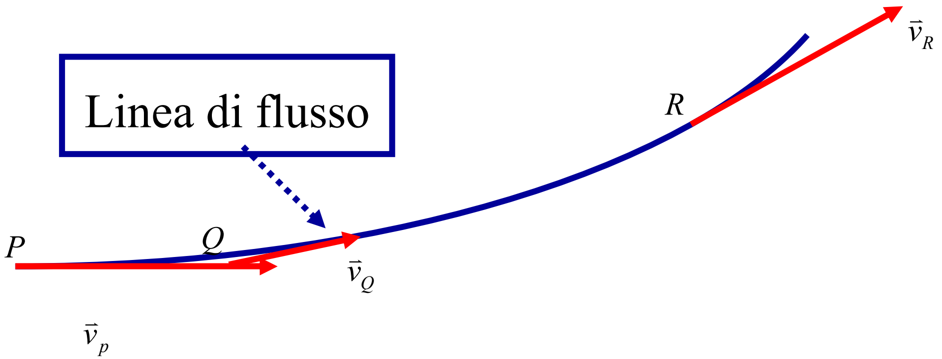
Fluido in moto non stazionario:

la velocità in ogni punto del fluido è, in generale, dipendente dal tempo

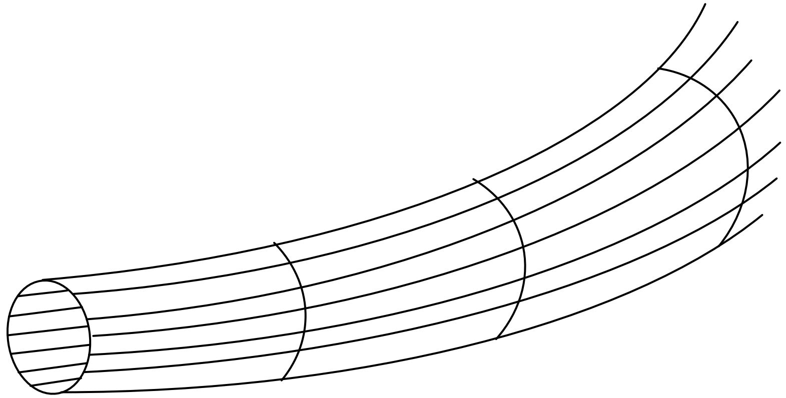
Tubi di flusso

In un fluido stazionario la velocita in ogni punto è costante

→ogni particella che arriva nei diversi punti in P, Q, R ha velocità V_P, V_Q, V_R)



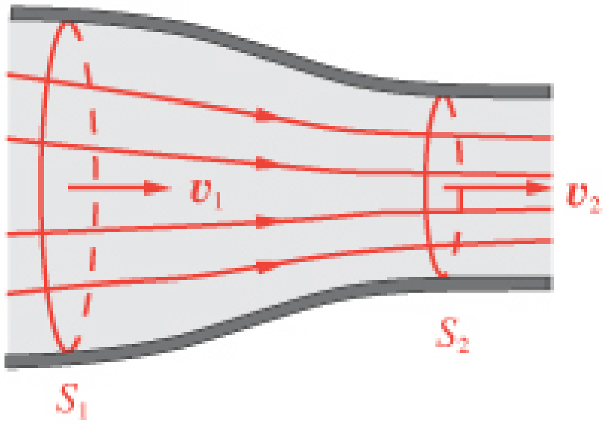
1. Due linee di flusso non possono **mai incrociarsi**
2. L' insieme delle linee di flusso non cambia nel tempo
3. L' insieme delle linee di flusso passanti per una linea chiusa immersa nel fluido definisce un: **tubo di flusso**



In un tubo di flusso:

le velocità delle particelle di fluido che si muovono sulla superficie è parallela alla superficie stessa

Durante il moto nessuna particella può entrare o uscire dal T.d.F.



Equazione di continuita'

Consideriamo un tubo di flusso di sezione infinitesima ds, ortogonale alle linee di corrente: il prodotto **dq=vdS** è detto ***portata del tubo di flusso e rappresenta tutto il volume che passa attraverso la superficie S in un secondo***

Un tubo di flusso può cambiare sezione, ma se:

- il fluido è ideale (quindi ***incomprimibile***), cioè se la densità è costante
- se si è in condizioni di ***regime stazionario*** (cioè la configurazione di linee di corrente rimane immutabile)

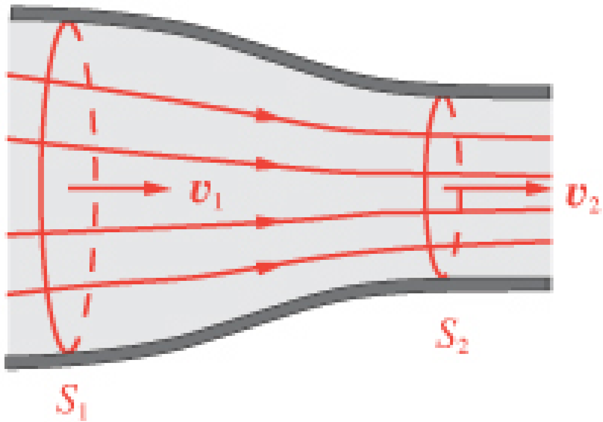
⇩

la portata è la stessa in qualsiasi sezione

Infatti fissate due qualsiasi sezione del tubo di flusso, la massa ivi contenuta può entrare e uscire solo dalle sezioni, se è in regime stazionario, e non può cambiare densità se è un fluido ideale

⇩

vdS = costante



Equazione di continuita'

vdS = costante

Per un tubo di flusso di dimensioni finite, la portata è data da:

$$q = \int_S dq = \int_S v dS = v_m S$$

media delle velocità nei vari punti di S

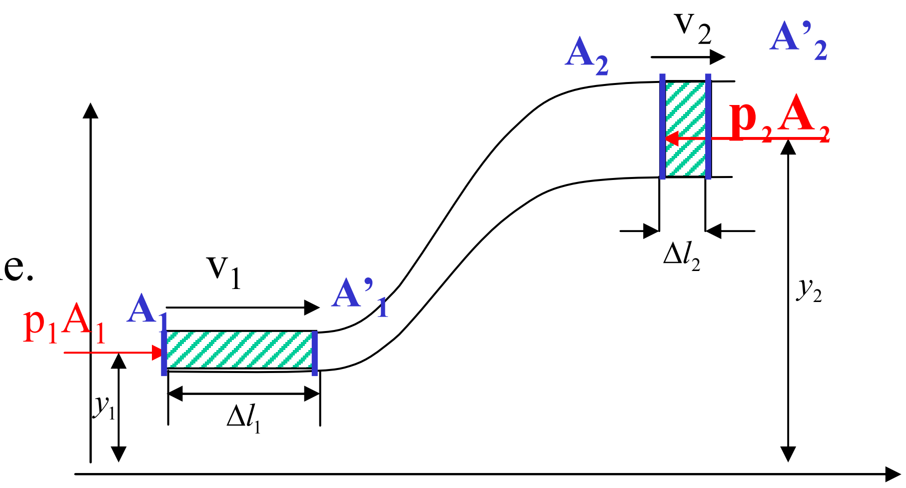
$$\boxed{v_m S = \text{costante}}$$

Equazione di continuità per i fluidi ideali in regime stazionario

Dove la **sezione diminuisce**, la **velocità aumenta** e dove la **sezione aumenta** la **velocità diminuisce**

Equazione di Bernoulli

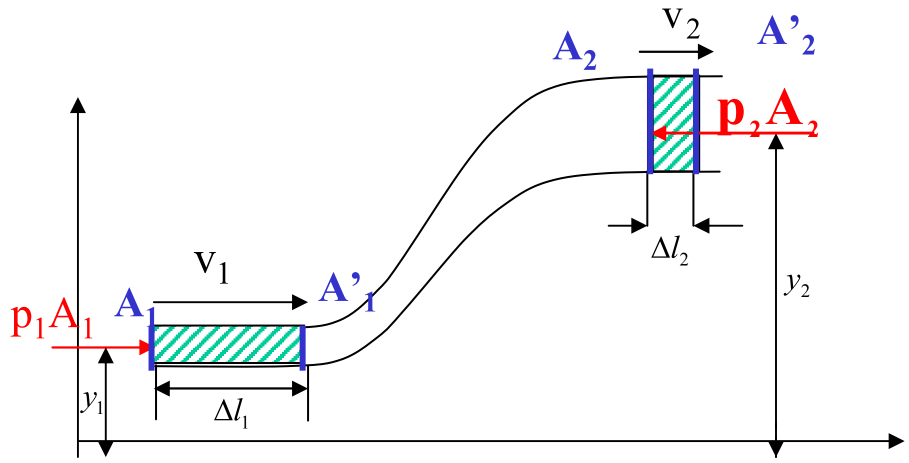
Consideriamo un fluido:
- incompressibile
- non viscoso
- in moto stazionario lungo una tubazione.



Consideriamo lo spostamento del fluido nel condotto che porta la massa che si trova tra le sezioni A_1 e A_2 a trovarsi dopo un intervallo di tempo Δt tra i punti A_1' e A_2'.

Il volume entrante sarà uguale a quello uscente (per l'incomprimibilità): $A_1 \Delta l_1 = A_2 \Delta l_2$
e la massa di questo fluido sarà: $\Delta m = \rho \Delta V$

Equazione di Bernoulli



Per effetto del movimento del fluido la massa Δm nel tempo Δt è stata spostata dalla quota y_1 alla quota y_2 e la sua velocità è variata da $\mathbf{v_1}$ a $\mathbf{v_2}$.

Per trovare una legge che regola il moto in questo tipo di condotto è necessario applicare il teorema dell'energia cinetica al fluido contenuto inizialmente tra i punti A_1 e A'_1 ovvero alla massa di fluido Δm .

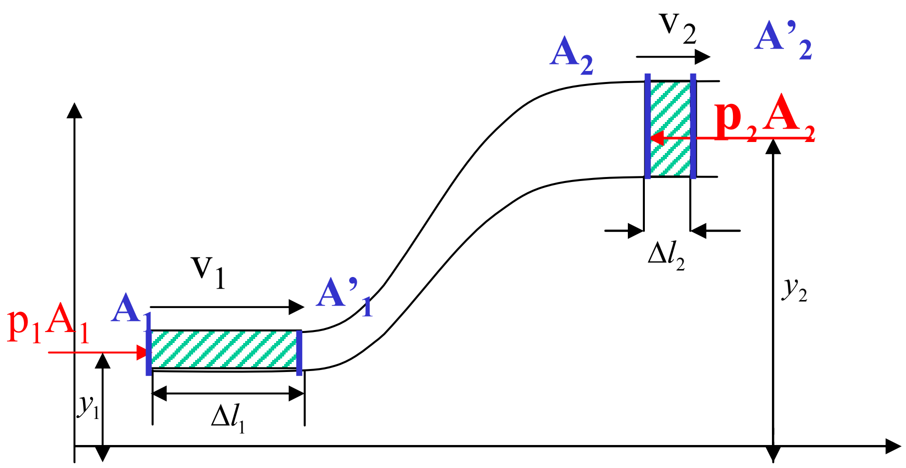
Variazione Energia Cinetica: $\Delta E_c = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2$

Lavoro della forza peso $W_g = -\Delta m g (y_2 - y_1)$

Lavoro forze di pressione: $W_p = W_{p1} + W_{p2} = (p_1 A_1 \Delta l_1) + (-p_2 A_2 \Delta l_2) = (p_1 - p_2)\Delta V$

Equazione di Bernoulli

Dal teorema dell'energia: $\Delta E_c = W_p + W_g$



$$\frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 = (p_1 - p_2)\Delta V - \Delta m g (y_2 - y_1)$$

$$\Delta m = \rho\, \Delta V$$

$$(p_1 - p_2)\Delta V = g\rho\Delta V(y_2 - y_1) + \frac{1}{2}\rho\Delta V\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

$$(p_1 - p_2) = g\rho(y_2 - y_1) + \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

$$\boxed{p_1 + g\rho y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + g\rho y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2}$$

$$p + g\rho y + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{cost.}$$

Teorema di Bernoulli

Nota: Se il fluido è in quiete

⇓

Legge di Stevino

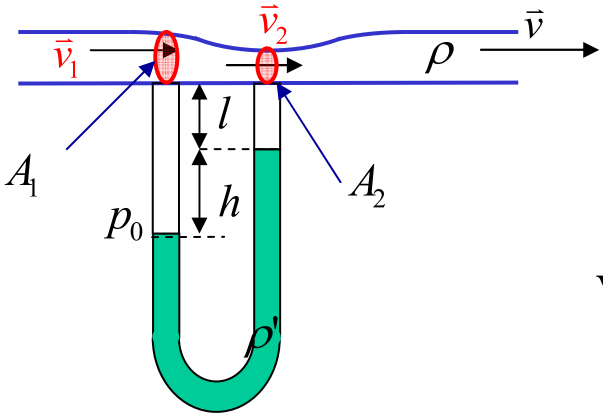
Conseguenze del teorema di Bernoulli

1) Venturimetro

è usato per misurare la velocità dei fluidi. In una condotta orizzontale si ha che:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{cost.}$$

Per un fluido incomprimibile, se cresce la velocita' deve diminuire p



$$\rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2$$

$$v_2 = \frac{A_1 v_1}{A_2}$$

$$p_{A_1} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_{A_2} + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$p_{A_1} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_{A_2} + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_1 v_1}{A_2}\right)^2$$

$$p_{A_2} - p_{A_1} = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right)$$

$$v_1^{\,2} = A^2{}_2 \frac{2\left(p_{A_2} - p_{A_1}\right)}{\rho\left(A_2^2 - A_1^2\right)}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\left(p_{A_2} - p_{A_1}\right)}{\rho}\frac{A_2^2}{\left(A_2^2 - A_1^2\right)}}$$

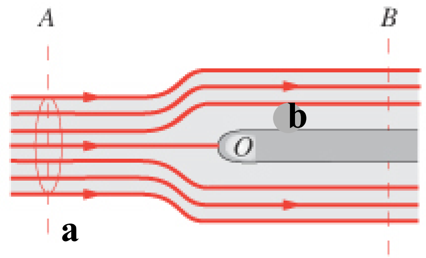
$$v_1 = \text{costante}\sqrt{\left(p_{A_2} - p_{A_1}\right)}$$

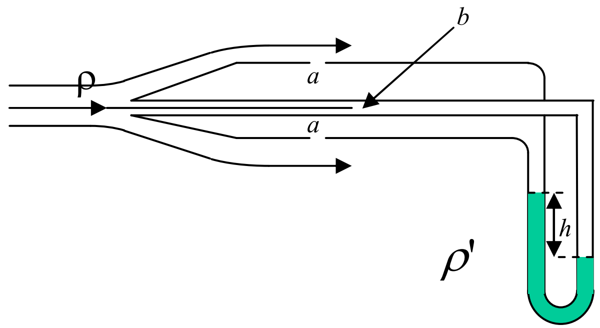
Dalla misura di Δp si possono ricavare v_1 e v_2

Conseguenze del teorema di Bernoulli

2) Tubo di Pitot

usato per misurare la velocità dei gas. In una condotta orizzontale, viene posto un punto di ostacolo. In tale punto **b** il fluido è fermo





b: zona di stagnazione

$$p_a + \frac{1}{2}\rho v_a^2 = p_b$$

Dalla misura della differenza di pressione tra il punto b in cui il fluido è fermo e il punto a, si ricava la velocità

$$p_b = p_a + \rho' g h \longrightarrow \frac{1}{2}\rho v_a^2 = \rho' g h \longrightarrow v_a = \sqrt{\frac{2hg\rho'}{\rho}}$$

Si usa per misurare velocità di aereo che si muove rispetto a fluido

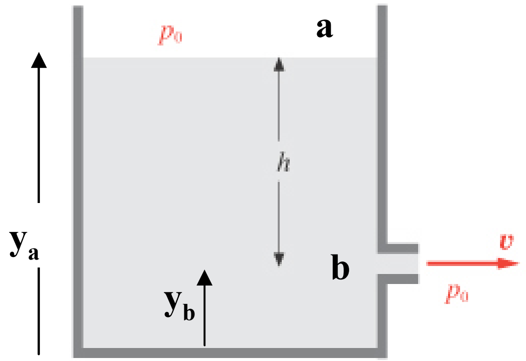
Se ho manometro a Hg che segna dislivello di 10 cm calcolare velocità di aereo

$$v_{aereo} = \sqrt{\frac{2hg\rho'}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot 9{,}8 \cdot 13{,}6 \cdot 10^3}{1{,}29}} = \sqrt{20662} = 143{,}7\,\frac{m}{s} = 517\,\frac{Km}{h}$$

Conseguenze del teorema di Bernoulli

3) Teorema di Torricelli

Da un foro posto ad una altezza h dalla superficie superiore di un fluido contenuto in un serbatoio, ***il fluido esce con una velocità pari a quella che avrebbe se scendesse in caduta libera per un tratto h.***



applicando l'equazione di Bernoulli ai punti (a) e (b) della figura, consederando v_a (circa) nulla, data la grande massa di fluido nel recipiente

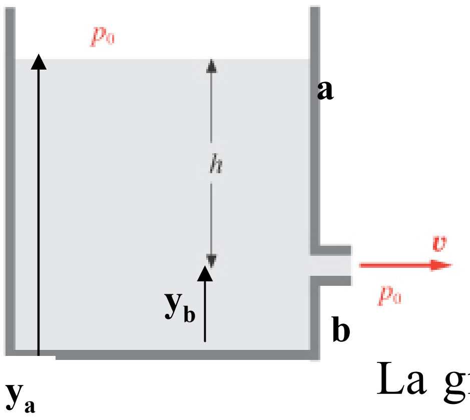
$$\cancel{p_a} + g\rho y_a = \cancel{p_b} + g\rho y_b + \frac{1}{2}\rho v_b^2$$

Essendo sia (a) che (b) in comunicazione con l'atmosfera, p_a e p_b saranno uguali e pari alla pressione atmosferica, quindi risolvendo rispetto $\mathbf{v_b}$:

$$v_b^2 = 2g(y_a - y_b) = 2gh \quad \Rightarrow \quad v_b = \sqrt{2gh}$$

Teorema di Torricelli: esempio

A che distanza arriva il getto di acqua che fuoriesce dal foro nella parete verticale con la velocità appena trovata se l'altezza del fluido nel recipiente è y_a ?



Il fluido esce con velocità orizzontale v_b e poi segue il moto del proiettile con equazioni

$$v_x = v_b \;;\; x = v_b t$$

$$y = y_b - \frac{1}{2} g t^2 \Longrightarrow 0 = y_b - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y_b}{g}}$$

La gittata si trova mettendo y=0 e trovando il tempo quindi sostituendolo nella espressione di x (si poteva anche usare l'equazione della parabola)

$$x = \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{2y_b}{g}} = \sqrt{4hy_b} = \sqrt{4(y_a - y_b)y_b}$$

Se il foro è ad altezza $h' = y_b$ ho stessa gittata infatti : $$x' = \sqrt{4y_b(y_a - y_b)}$$

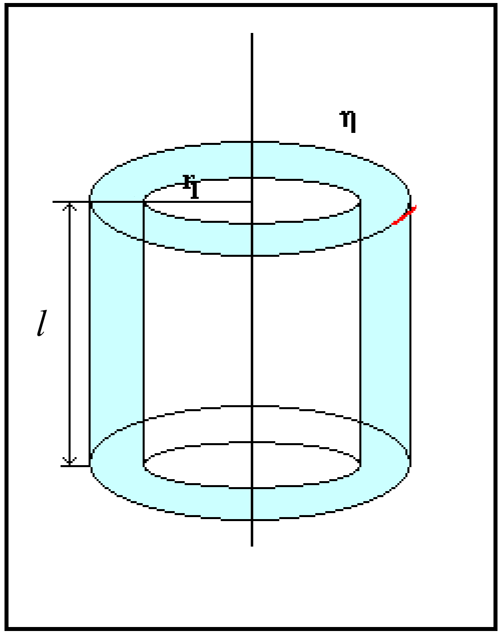
L'altezza a cui fare il foro per avere la gittata massima è la metà del recipiente per ragioni di simmetria della formula o facendo la derivata

Fluidi reali – il moto laminare

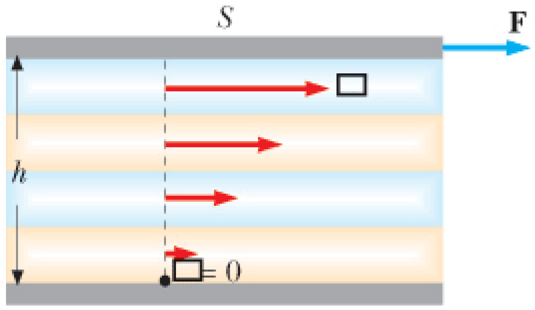
Nei fluidi reali $\eta \neq 0$ $\Rightarrow$ - presenza di attriti interni al fluido

-esistenza di forze tangenziali che fanno scorrere strati di fluido gli uni sugli altri

Moto laminare: il regime è stazionario, con le linee di corrente costanti nel tempo



Supponiamo che il fluido scorra in un condotto cilindrico di raggio R. In questo tipo di moto, il fluido a contatto con le pareti del condotto è fermo. Avvicinandosi all'asse del condotto la velocità aumenta, per cui abbiamo ***strati cilindrici coassiali di fluido che scorrono l'uno dentro l'altro con velocità diverse***. Velocità massima sull'asse del condotto

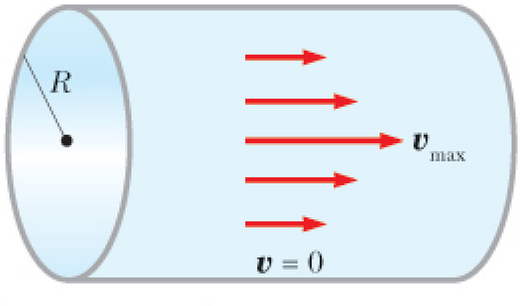


Fluidi reali – il moto laminare

La Forza necessaria per mantenere il moto laminare tra due lastre distanti h in regime stazionaro è

$$F = \eta S \frac{v}{h}$$

Si considera un condotto orizzontale, lungo l , con una differenza di pressione p_1-p_2 agli estremi, si dimostra:



2.

Velocità massima per r =0

$$v_{max} = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2$$

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right)$$

per r =R, alla parete

$$v_{min} = 0$$

La portata del condotto è data dalla legge di Hagen-Poiseuille: $$q = \frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{p_1 - p_2}{l}$$

***NOTA**: nel regime laminare la portata, la velocità dei singoli strati e la velocità media sono proporzionali al gradiente di pressione*

Moto vorticoso

Il moto di un fluido viscoso e incomprimibile può avere due regimi diversi: il regime **laminare** o il **regime vorticoso** o turbolento, in cui gli strati liquidi acquistano velocità quasi uguale alla massima a breve distanza dalle pareti, inoltre si formano vortici visibili all'interno del liquido.
Si osserva sperimentalmente che ***un flusso laminare, al variare di alcune condizioni, può diventare turbolento***.
Osborne Reynolds, attorno al 1883, studiò sperimentalmente e teoricamente la natura di queste condizioni: attraverso esperimenti nei quali un flusso d'acqua di velocità regolabile era reso osservabile iniettandovi dei coloranti, egli ricavò la formula di un parametro adimensionale che caratterizza il tipo di moto del fluido, per un condotto cilindrico:

$$R_e = \rho \frac{vR}{\eta}$$

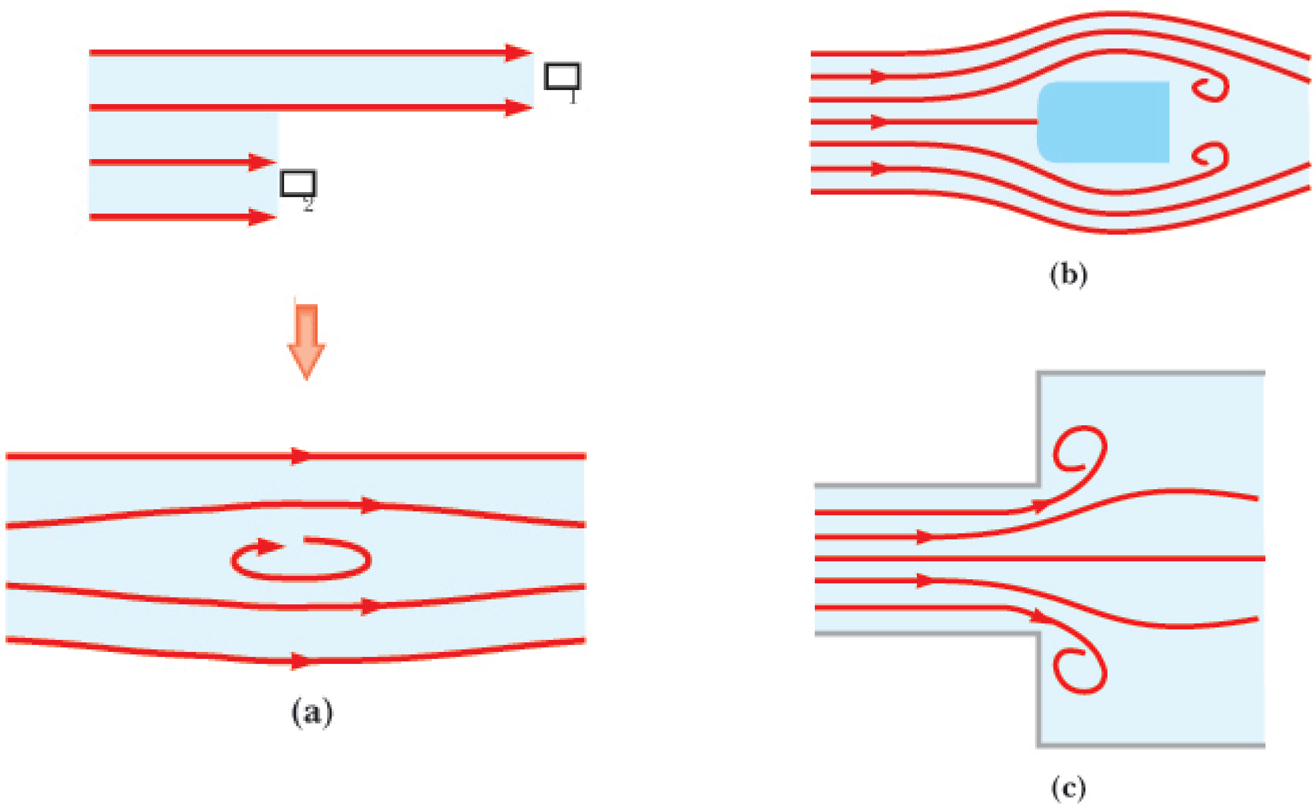
Con:

$\rho =$ *densità del fluido*

$v =$ *velocità del fluido*

$R =$ *raggio del condotto*

$\eta =$ *coeff. di viscosità del fluido*

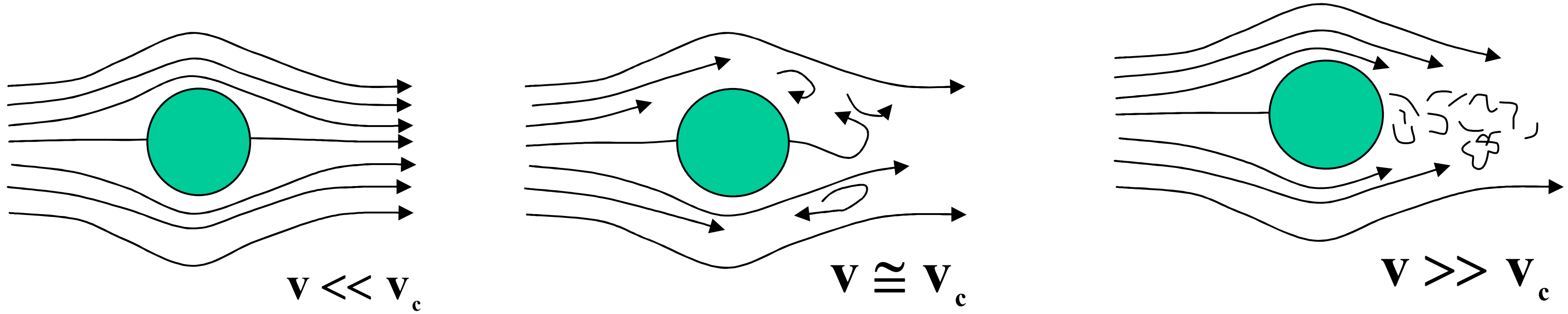

(a)
(b)
(c)

Moto vorticoso

$$R_e = \rho \frac{vR}{\eta}$$ ***Numero di Reynolds***

Si ha la transizione da regime laminare a regime vorticoso, quando il parametro adimensionale R_e ha il valore di 1200. La velocità critica per la transizione vale dunque:

$$v_c = 1200 \frac{\eta}{\rho R}$$



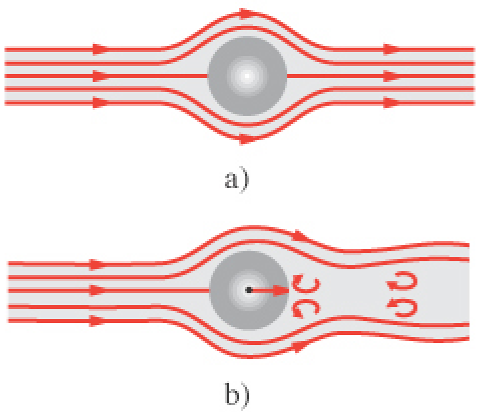
In regime vorticoso si dimostra che: $$\frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{k}{R}\frac{\rho v_m^2}{2}$$

Il gradiente di pressione è una funzione quadratica della velocità anziché lineare

Moto in un fluido. Resistenza del mezzo

Moto di un corpo immersi in un fluido

L'interazione con il fluido si manifesta attraverso una forza, che si oppone al moto e si chiama resistenza del mezzo, il cui effetto dipende dal moto relativo tra corpo e fluido

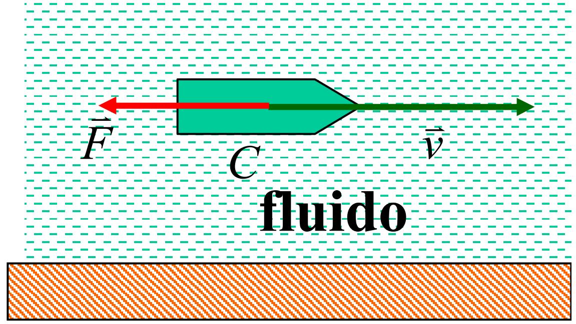


Si consideri una sfera immersa in un fluido in moto. Se il fluido è ideale (fig.a) si ha completa simmetria delle linee di corrente e quindi la stessa pressione a monte ed a valle della sfera. La sfera non subisce alcuna spinta e rimane ferma (paradosso di D'Alembert)

Se invece il fluido è reale si forma una scia vorticosa. Dunque la pressione a valle è minore di quella a monte e quindi si manifesta una forza che trascina la sfera.

I parametri che determinano la resistenza del mezzo sono la forma e le dimensioni del corpo

Moto in un fluido. Resistenza del mezzo



Espressione generale della ***resistenza del mezzo*** $F_{res} = \frac{1}{2} c S \rho v^2$

Dove **c** è un coefficiente adimensionale che dipende dalla forma.

In **regime vorticoso c** è costante e F_{res} è proporzionale a v^2 $F_{res} \propto v^2$

In **regime laminare c** è funzione dell'inverso della velocità, $F_{res} \propto v$

$\Downarrow$

F_{res} risulta lineare con la velocità (forza di attrito viscosa già studiata)

$$\vec{F}_v = -K\eta\vec{v}$$

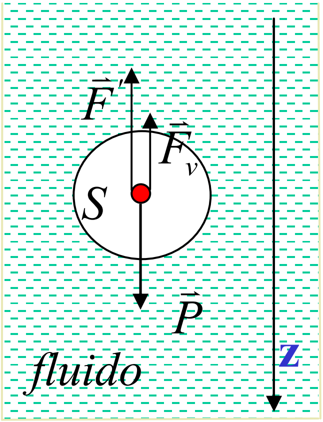
$\eta > 0$: coefficiente di viscosità

$K > 0$: dipende dalla forma del corpo

Per un corpo sferico: $K = 6\pi R$ $\Rightarrow$ $\vec{F}_v = -6\pi R\eta\vec{v}$ ***Legge di Stokes***

Esempio

Consideriamo una sferetta S di raggio R e densità ρ che si muove verticalmente in un fluido di densità ρ'< ρ cosicchè S scende verso il basso. La sferetta è sottoposta alle seguenti forze:



$$\vec{P} = m\vec{g} = \rho\frac{4}{3}\pi R^3\vec{g} \rightarrow \text{forza peso}$$

$$\vec{F}' = m'\vec{g} = -\rho'\frac{4}{3}\pi R^3\vec{g} \rightarrow \text{spinta idrostatica (Archimede)}$$

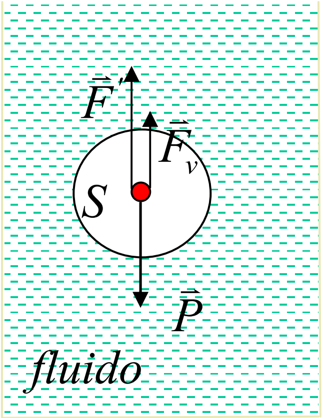
$$\vec{F}_v = -6\pi R\eta\vec{v} \rightarrow \text{legge di Stokes}$$

$$\boxed{\vec{P} + \vec{F}' + \vec{F}_v = m\frac{d\vec{v}}{dt}} \qquad m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{4\pi}{3}R^3(\rho - \rho')\vec{g} - 6\pi R\eta\vec{v}$$

$$\frac{dv}{\frac{4\pi}{3}R^3(\rho - \rho')g - 6\pi R\eta v} = \frac{dt}{m}$$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{dv}{\frac{4\pi}{3}R^3(\rho - \rho')g - 6\pi R\eta v} = \frac{1}{m}\int dt$$



Esempio -continuazione

Soluzione dell'equazione: $v(t) = A + Be^{\alpha t}$

con: $\alpha = -\frac{6\pi R\eta}{m} = -\alpha_0$

A,B: dai valori di v per $t = 0$ e $t = \infty$

$$\boxed{v(t) = v(\infty)\left(1 - e^{-\alpha_0 t}\right)}$$

$$v(\infty) = \frac{2(\rho - \rho')R^2 g}{9\eta}$$