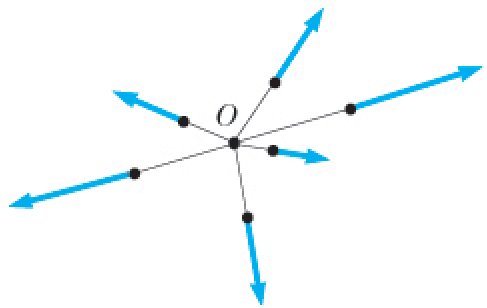
Gravitazione

La forza gravitazionale è una Forza centrale

Le forze centrali sono molto importanti in fisica (2 corpi); agiscono in certe zone dello spazio con queste proprietà:

- in ogni punto sono dirette verso un punto fisso O detto centro della forza

- il modulo è solo funzione di distanza dal centro



$$\vec{F} = F\,\vec{u}_r$$

- **repulsiva: F e r sono paralleli (esempio F tra 2 cariche elettriche di stesso segno)**
- **attrattiva F e r sono antiparalleli** come tra 2 masse o 2 cariche elettriche di segno opposto

forza funzione di posizione che agisce in data zona dello spazio, modifica lo spazio, e genera un campo di forza che agisce su ogni particella che si trovi nello spazio in cui c'e il campo.

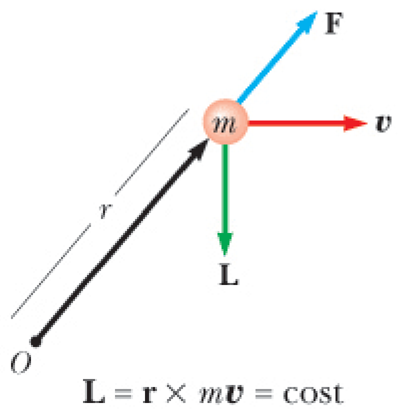
prima del '600 (Newton) nella gravitazione (Universo) non c'era niente da spiegare corpi celesti e corpi terreni erano descritti separatamente…poi

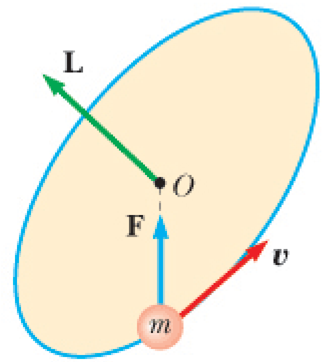
Proprietà delle forze centrali

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = r\vec{u}_r \times F(r)\vec{u}_r = 0 \Rightarrow \vec{L} = \overrightarrow{\text{costante}}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{costante}$$

In campo di forze centrali momento della forza rispetto al centro è nullo
Quindi il momento angolare L è costante. Quindi anche costante il piano dei vettori r e v Traiettoria di P è curvilinea e piana. Il verso di L definisce il verso di percorrenza delle traiettoria.



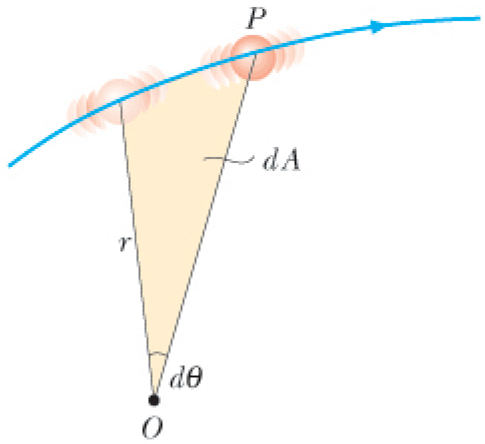


In cinematica si è visto che nel moto curvilineo si può esprimere la velocità tramite le componenti radiali e ortogonale a questa per cui il momento angolare diventa :

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m(\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = \vec{r} \times m\vec{v}_\theta$$

Dato che r e v_r sono paralleli e r e v_θ sono perpendicolari il modulo è

$$L = mrv_\theta = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$$



Se L è costante è costante anche il suo modulo e quindi

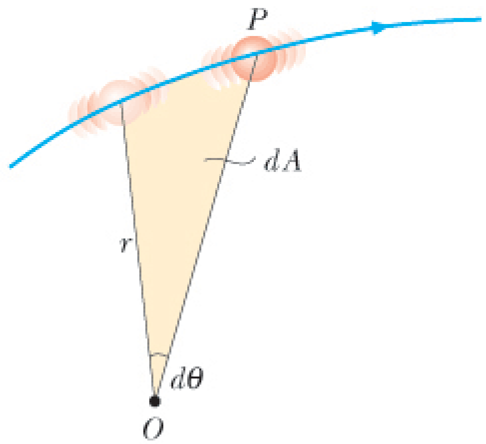
$$r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

In un tempo dt il raggio vettore spazza un area infinitesima come indicato in figura , che è circa un triangolo di base r dθ e altezza r quindi di area

$$\frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Posso esprimere la velocità areolare come

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m}$$



Quindi se L è costante anche la velocità areolare è costante:
La traiettoria di un punto che si muove in campo di forze centrali giace in un piano fisso che passa per il centro ed è percorsa in modo che la velocità areolare sia costante .Quindi è costante il termine

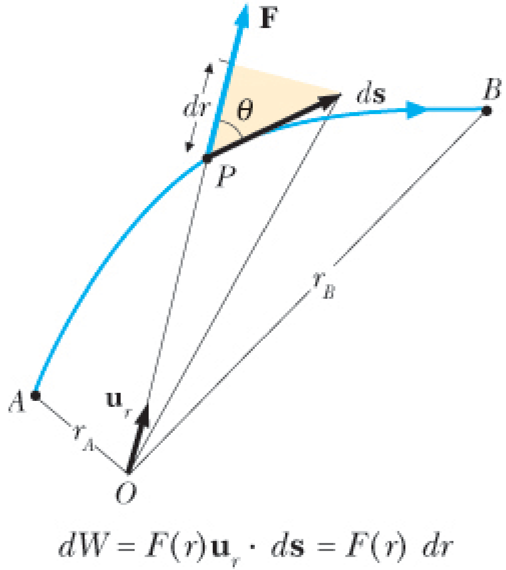
$$r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Se la traiettoria è chiusa, caso dei pianeti, la costanza della velocità areolare implica che

$$\frac{dA}{dt} = C = \frac{A}{T} \Rightarrow \frac{A}{T} = \frac{L}{2m} \Rightarrow T = \frac{2m}{L} A$$

Proprietà delle forze centrali

Le forze centrali sono conservative. Infatti dato che F=F(r) ed è parallela ad r scrivo il lavoro come



$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F(r)\vec{u}_r \cdot d\vec{s}$$

$$W = \int_A^B F(r)\,dr = f(r_B) - f(r_A)$$

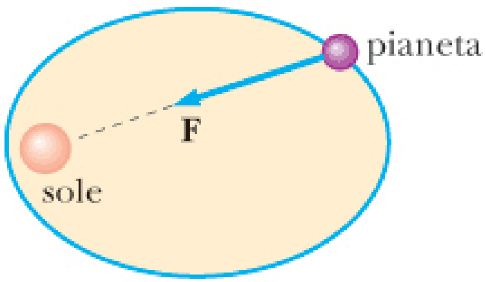
Il lavoro dipende solo dalle coordinate del punto iniziale e finale e non dal percorso, condizione per avere una forza conservativa : le forze centrali sono conservative

La Forza Gravitazionale

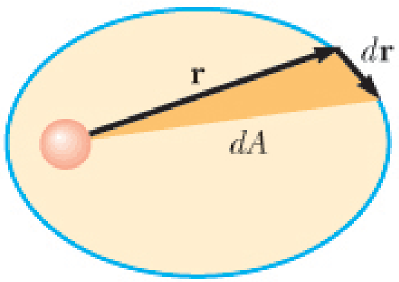
Newton (1642-1727) **nel 1666 (** **pubblicata nel 1687** **) ipotizza che la caduta dei gravi ed il moto dei corpi celesti siano regolati dalle stesse leggi e ricava la legge di gravitazione universale**

Newton si basa sulle osservazioni cinematiche di Tycho Brahe(1570-1600) ed i calcoli del matematico Keplero che sono riassunti in 3 leggi (1600-1620)

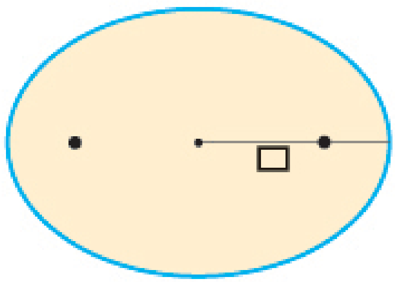
1. **i pianeti si muovono su orbite ellittiche di cui il Sole occupa uno dei fuochi**
2. **I pianeti si muovono con velocità areolare costante**
3. **i quadrati dei periodi di rivoluzione sono proporzionali ai cubi delle distanze medie dal Sole (semi-asse maggiore)**



orbita ellittica
I legge



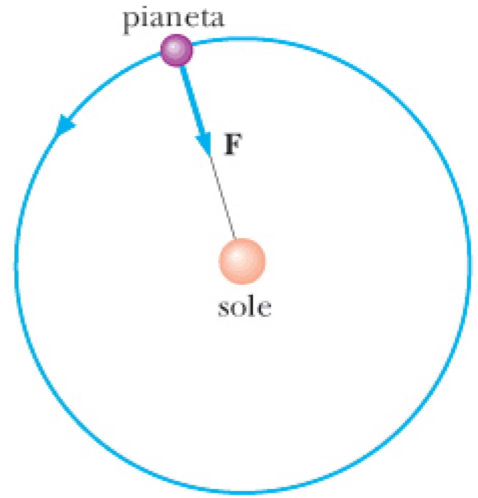
dA / dt = costante
II legge



$T^2 = ka^3$
III legge

Da Keplero alla legge di gravitazione

In prima approssimazione le orbite dei pianeti sono circolari . Se la velocità areolare è costante il moto del pianeta è circolare uniforme infatti



$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{costante}$$

Se r è costante lo è anche la velocità angolare il che implica che la forza sia centripeta (solo componente in direzione radiale) e deve valere che:

$$F = m\omega^2 r = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Per la terza legge di Keplero

$$\frac{T^2}{r^3} = K = \text{cost.}$$

Forza esercitata dal sole sui pianeti è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal sole

$$F = \frac{4\pi^2 m}{kr^2}$$

Da Keplero alla legge di gravitazione

Consideriamo il sistema Terra Sole. La forza esercitata dal sole sulla terra è

$$\Rightarrow F_{S,T} = \frac{4\pi^2 m_T}{k_T r^2} \qquad\qquad \Rightarrow F_{T,S} = \frac{4\pi^2 m_S}{k_S r^2}$$

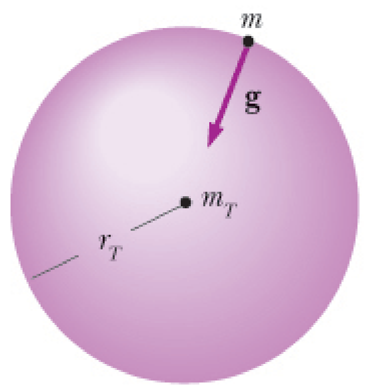
Se le relazioni valgono per qualsiasi coppia di corpi la Forza esercitata dalla terra sul sole è simile e le due forze devono essere eguali in modulo quindi

$$\frac{4\pi^2 m_S}{k_S r^2} = \frac{4\pi^2 m_T}{k_T r^2} \Rightarrow \frac{m_S}{k_S} = \frac{m_T}{k_T} \Rightarrow m_S k_T = m_T k_S$$

Se definisco
$$\gamma = \frac{4\pi^2}{m_T k_S} = \frac{4\pi^2}{m_S k_T}$$

Trovo la **legge di gravitazione universale**

$$F = \gamma \frac{m_S m_T}{r^2}$$



La legge di gravitazione universale

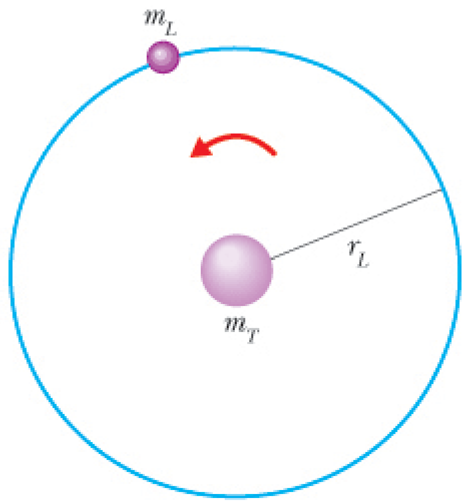
$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Forza tra due masse qualsiasi m_1 e m_2
è negativa quindi la forza è attrattiva

γ costante di gravitazione universale trovata analiticamente equagliando per un corpo sulla terra laF di gravitazione e la forza peso e dai parametri dell'orbita lunare

$$F = \gamma \frac{m_T m}{r^2} = mg \Rightarrow g = \gamma \frac{m_T}{r^2}$$

$$F_{T,L} = \gamma \frac{m_T m_L}{r_L^2} = m_L \omega_L^2 r_L$$

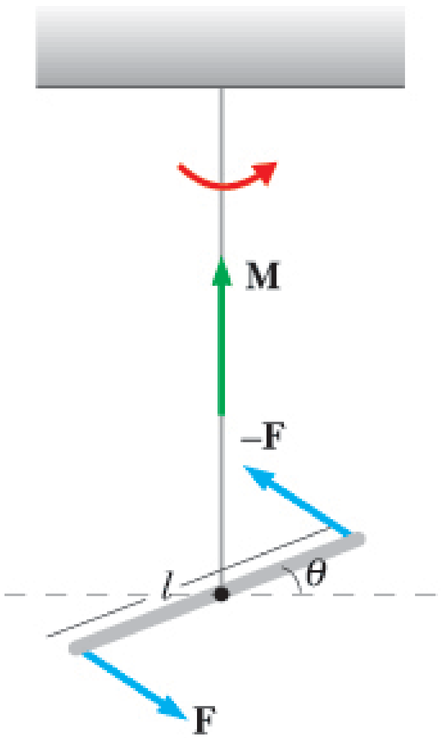


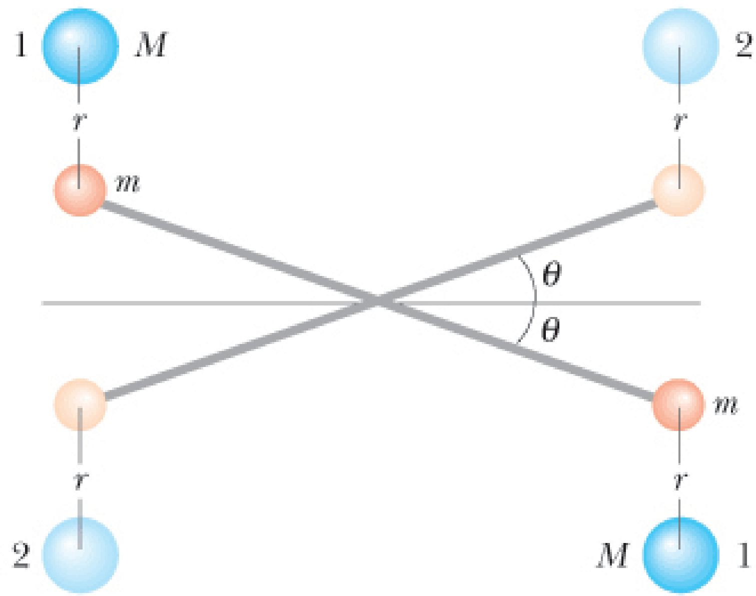
Dimensioni:

$$\left[L^3 M^{-1} T^{-2}\right]$$

Valore: $$6.67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2} = m^3 Kg^{-1} s^{-2}$$

Misura di γ con la Bilancia di torsione di Cavendish





Massa inerziale e gravitazionale

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{12}$$

Le masse che compaiono in questa formula sono legate all'interazione gravitazionale e a priori potrebbero essere diverse dalla massa inerziale che compare nella **F**=m**a** . Sulla superficie terrestre posso scrivere

$$m_I g = \gamma \frac{m_G m_{TG}}{r_T^2} \quad \Longrightarrow \quad g = \gamma \frac{m_{TG}}{r_T^2} \frac{m_G}{m_I}$$

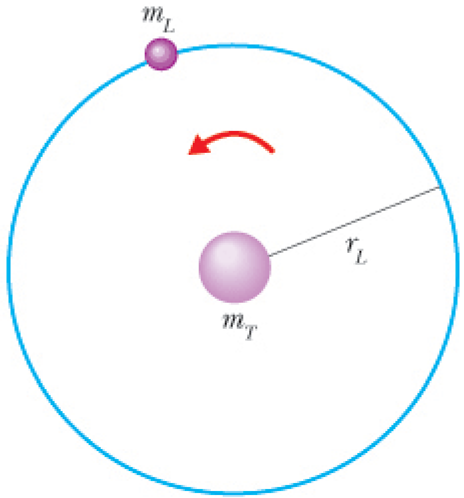
Sperimentalmente si è verificato che **g è** indipendente dai corpi il che implica che il rapporto

$$\frac{m_G}{m_I}$$

è costante cioe m_G e m_I sono proporzionali o eguali e non dipendono ad es. dalla sostanza di cui sono fatti. Si sono eseguiti vari esperimenti a metà 800 e recentemente per verificare con elevata precisione la eguaglianze dei due tipi di masse. Due corpi di materiale diverso appesi a fili a piombo per effetto della rotazione terrestre avrebbero deviazioni terrestre. I risultati sono negativi

Esempio

Si osserva che un pianeta ha un satellite che ruota con orbita circolare di raggio 1,5 10^5 Km. Il periodo di rotazione T è 12 giorni. Da questi dati posso Trovare la massa del pianeta?



Si posso perché se il moto è circolare uniforme deve valere
Stessa relazione scritta per il sistema terra luna

$$F_{P,S} = \gamma \frac{m_P m_S}{r_{P,S}^2} = m_S \omega_S^2 r_{P,S} \Rightarrow m_P = \frac{\omega_S^2 r_{P,S}^3}{\gamma}$$

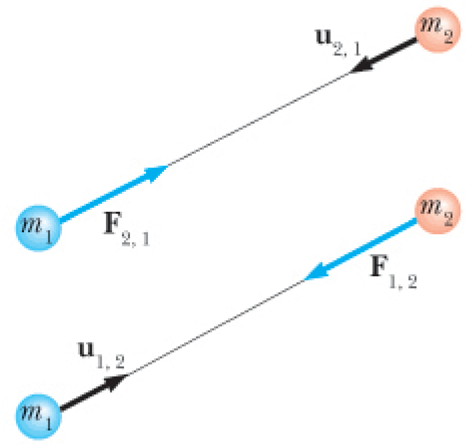
Sostituendo i valori :

$$m_P = \frac{\frac{4\pi^2}{T^2} r_{P,S}^3}{\gamma} = \frac{\frac{39.5}{(12 \cdot 86400)^2}(1{,}5 \cdot 10^8)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}}$$

$$\Rightarrow m_P = \frac{\omega_S^2 r_{P,S}^3}{\gamma} = 1{,}86 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$$

per i satelliti artificiali terrestri fissato il T è fissata la distanza dalla superfice terrestre (dal centro della terra)

Campo Gravitazionale



$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{12}$$

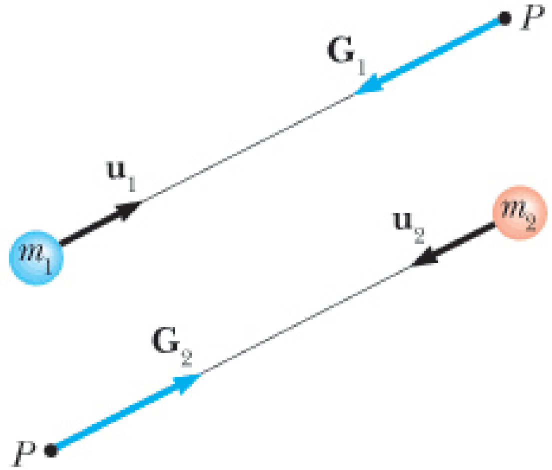
questa è la forza che lega due masse qualsiasi, $u_{1,2}$ è il versore che va m_1 a m_2. Posso riscrivere le due forze come

$$\vec{F}_{12} = (-\gamma \frac{m_1}{r^2} \vec{u}_{1,2}) m_2 \qquad \vec{F}_{2,1} = (-\gamma \frac{m_2}{r^2} \vec{u}_{2,1}) m_1$$

Pongo il termine tra parentesi eguale a G_i, campo gravitazionale, generato dalla massa m_i

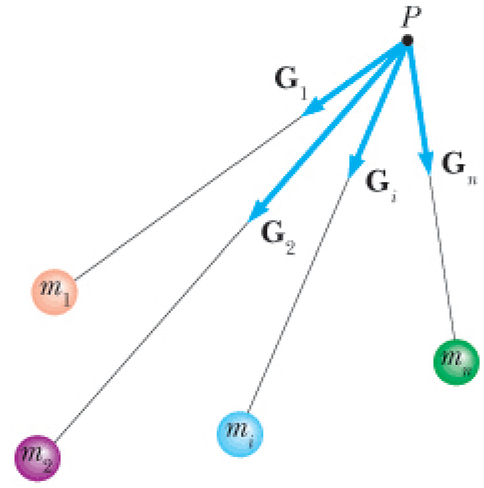
$$G_1 = (-\gamma \frac{m_1}{r^2} \vec{u}_1) \Rightarrow \vec{F}_{1,2} = m_2 \vec{G}_1$$

$$G_2 = (-\gamma \frac{m_2}{r^2} \vec{u}_2) \Rightarrow \vec{F}_{2,1} = m_1 \vec{G}_2$$



Campo Gravitazionale

Le formule sopra scritte valgono per masse puntiformi o a simmetria sferica. Se ci sono più masse vale il principio di sovrapposizione; se G_i è il campo della iesima massa



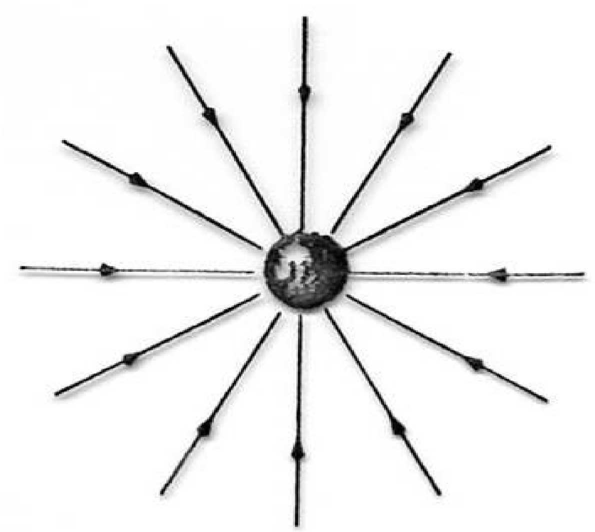
$$G_i = -\gamma \frac{m_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

Sommo vettorialmente ed ho il campo totale in un punto generico P

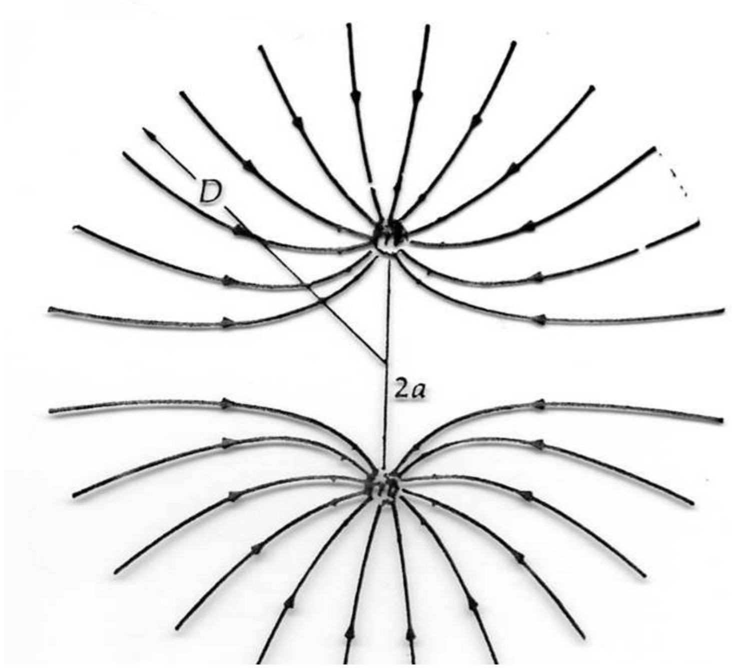
$$G(P) = \sum_{1}^{n} {}_i \left(-\gamma \frac{m_i}{r_i^2} \vec{u}_i\right)$$

Rappresentazione grafica dei campi : linee di forza

1. Il vettore del campo ha la direzione della tangente alla linea di forza in ogni punto
2. iniziano e finiscono sulle “sorgenti” del campo
3. la loro densità è proporzionale all’ intensità del campo
4. la loro distribuzione nello spazio in genere rispecchia le “simmetrie” delle sorgenti



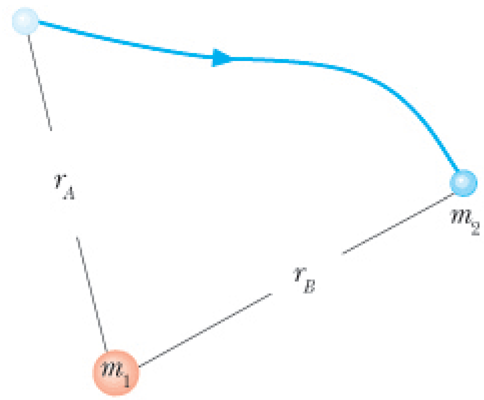
Linee di forza che indicano il campo gravitazionale vicino ad una massa puntiforme. La direzione delle Linee di Forza indica la direzione del campo in ogni punto; la densità delle linee è proporzionale all' intensità del campo



Linee di forza che indicano il campo elettrico generato da due cariche puntiformi di stessa intensità e di stesso segno

Energia potenziale del Campo Gravitazionale

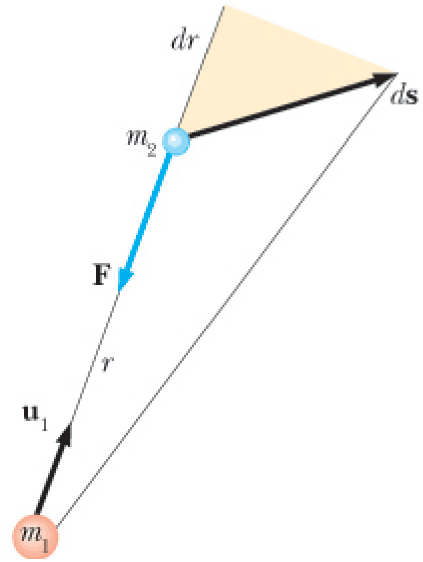
Calcoliamo il lavoro compiuto dalla forza per spostare una massa da un punto A ad un punto B



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$W_{AB} = \int_A^B -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_1 \cdot d\vec{s} = \int_A^B -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr$$

$$W_{AB} = -\gamma m_1 m_2 \left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A}\right) = E_{p,A} - E_{p,B}$$



Definiamol'energia potenziale della forza di gravità che come già detto è una forza conservativa

$$E_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

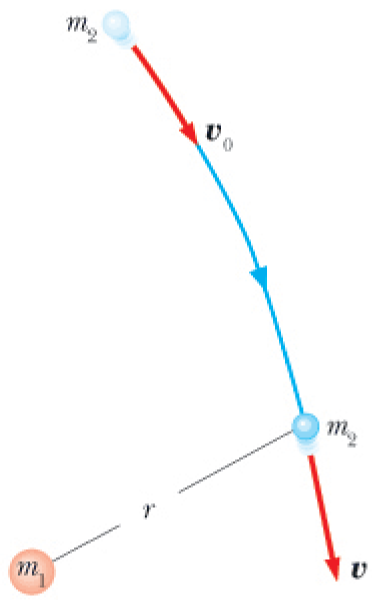
W è nullo se spostamento è tra due posizioni con stessa distanza (r) da m_1; energia potenziale non cambia

dalla definizione di potenziale
Trovo relazione tra forza e E_p:

$$E_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

$$\boxed{F(r) = -\frac{dE_p}{dr}}$$

E_p <0 per r finito
Ep =0 per R=∞
W>0 se m viene da ∞



infatti $$\frac{d}{dr}\left(-\gamma \frac{m_1 m_2}{r}\right) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

per una distribuzione continua:

$$\mathbf{W(r) = -m \int \frac{\gamma}{r} dm}$$

la forza di Newton è corretta solo se m ha una distribuzione di massa sferica o se è puntiforme altrimenti vale per gli elementi dm
per i sistemi legati E totale <0

$$\mathbf{E = \frac{1}{2} mv^2 - \gamma \frac{Mm}{r} < 0}$$

considariamo infatti un corpo di massa m (satellite) orbitante attorno ad un corpo di massa M(pianeta). Sia M fisso nell' origine di un sistema di riferimento inerziale e l' orbita di m sia circolare.

$$\boxed{E_p(r) = -\gamma \frac{Mm}{r}}$$

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2}$$

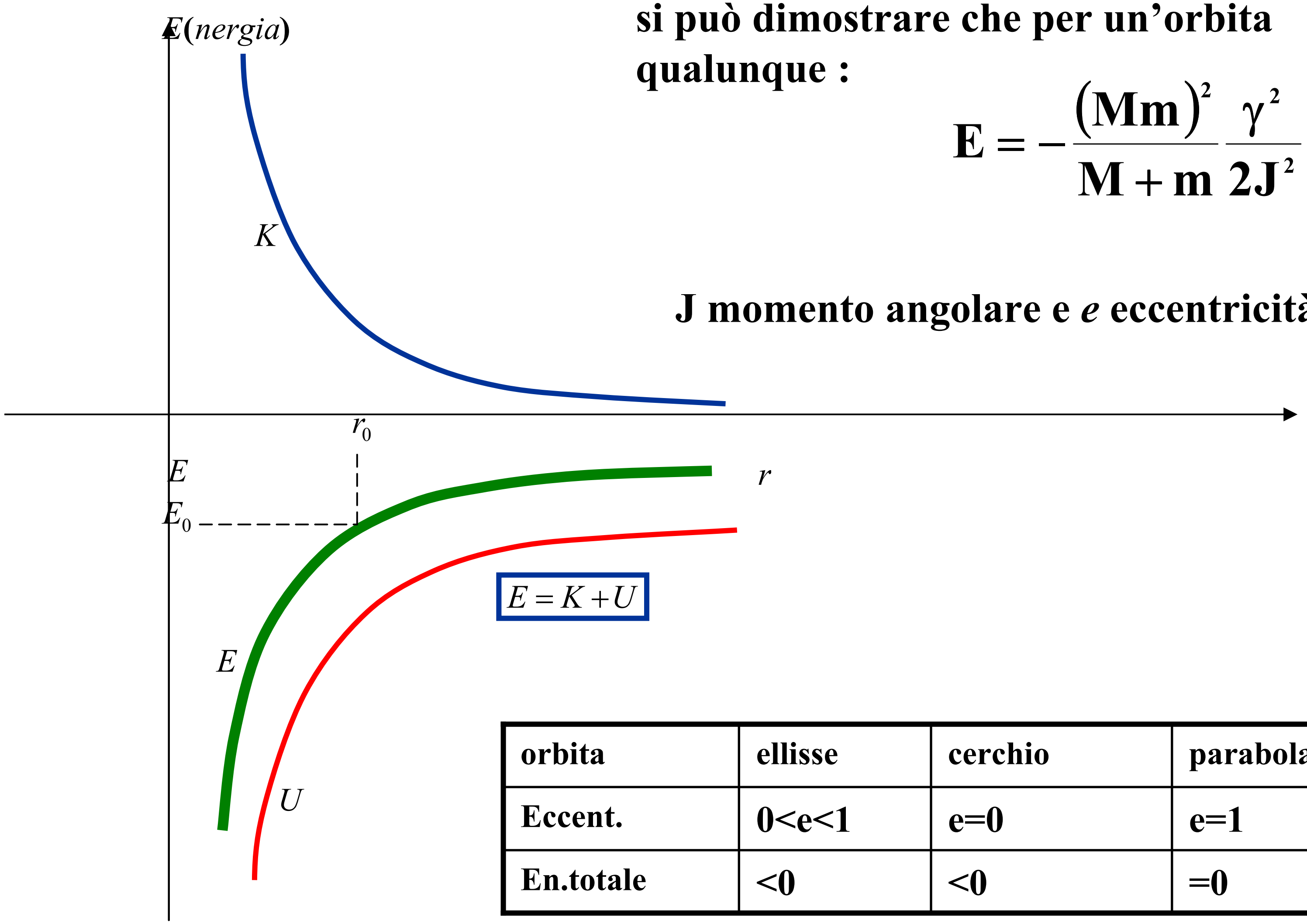
$$\gamma \frac{Mm}{(r)^2} = m\omega^2 r \longrightarrow \gamma M = \omega^2 r^3$$

$$\frac{\gamma M}{r} = \omega^2 r^2 \longrightarrow \boxed{E_K = \frac{1}{2}\frac{\gamma Mm}{r}}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}\gamma\frac{Mm}{r} - \gamma\frac{Mm}{r}$$

$$\boxed{E = -\frac{1}{2}\gamma\frac{Mm}{r} < 0}$$

vale per tutti i sistemi legati



si può dimostrare che per un'orbita qualunque :

$$\mathbf{E} = -\frac{(\mathbf{Mm})^2}{\mathbf{M}+\mathbf{m}}\frac{\gamma^2}{2\mathbf{J}^2}\left(\mathbf{1}-\mathbf{e}^2\right)$$

J momento angolare e *e* eccentricità dell'orbita

orbita	ellisse	cerchio	parabola	iperbole
Eccent.	0<e<1	e=0	e=1	e>1
En.totale	<0	<0	=0	>0

Velocità di fuga

Quale dovrebbe essere la velocità iniziale, detta di fuga, che permette a un corpo di raggiungere l'infinito cioè di uscire dal campo gravitazionale terrestre?

$$\frac{1}{2}mv_F^2 - \gamma\frac{m_T m}{r_T} = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

Ho scritto la conservazione dell'energia meccanica tra la posizione iniziale sulla superficie della terra e l'infinito dove E_p è nulla . Osservo che la velocità all'infinito ci basta che sia nulla per cui si ha:

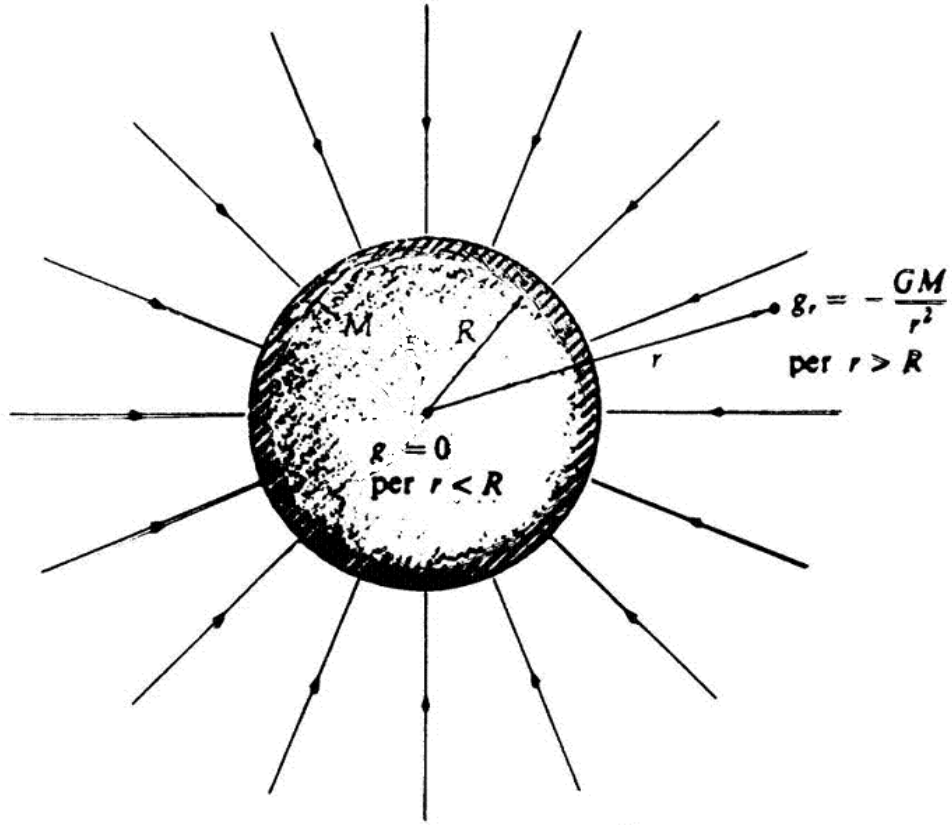
$$\frac{1}{2}mv_F^2 = \gamma\frac{m_T m}{r_T}$$

V_F è diversa sui vari pianeti

$$\boxed{v_F = \sqrt{2\gamma\frac{m_T}{r_T}} = 11.2\,\mathrm{Kms^{-1}} \cong 40\cdot 10^3\,\mathrm{Kmh^{-1}}}$$

Campo di una distribuzione a simmetria sferica nel caso di uno strato sferico

cosa succede fuori e dentro la distribuzionedi massa?



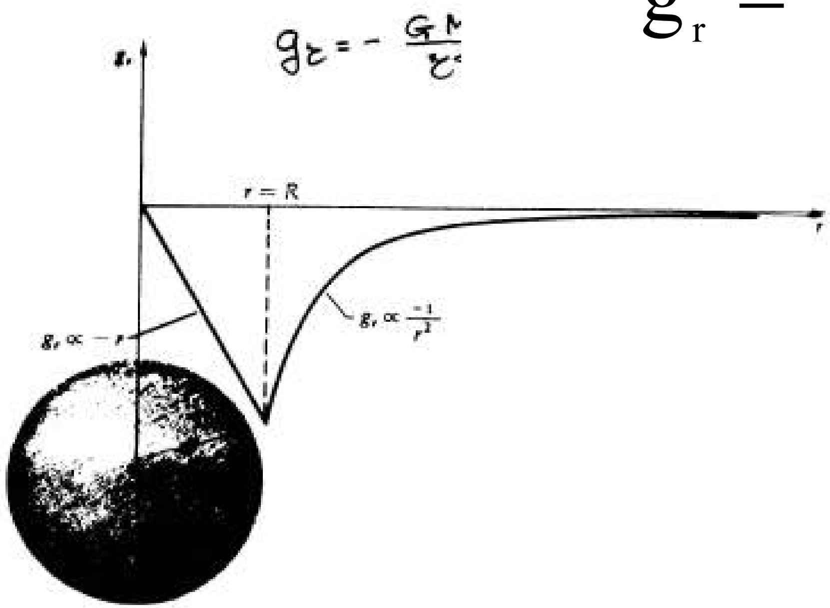
e se la distribuzione è piena?

$$\rho = \text{costante} = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi R^3}$$

Per un punto che dista r dal centro:

$$m' = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 = m \frac{r^3}{R^3}$$

$$g_r = -\gamma \frac{m'}{r^2} = -\gamma \frac{m}{R^3} r$$

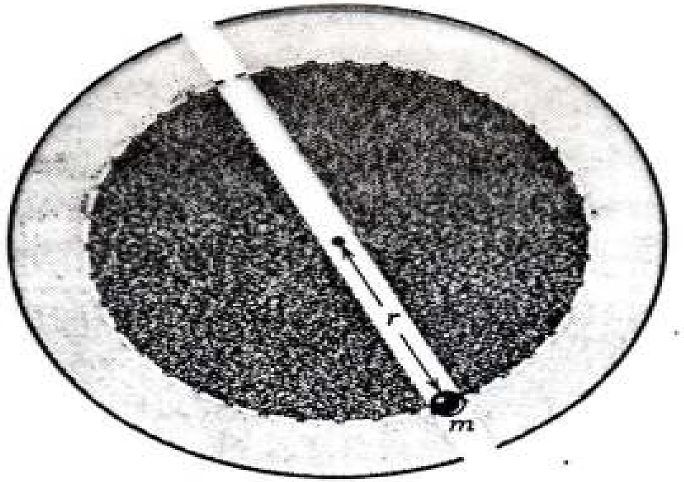


Quesito

Ad una distanza ***r*** dal centro:

$$m' = \rho V'$$

$$F = -\gamma \frac{m' m}{r^2}$$



$$F = -\left(\gamma\rho \frac{4\pi m}{3}\right) r = -kr$$

Cosa ci ricorda? Il moto armonico

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{m}} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{\gamma\rho 4\pi m}}$$

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{\gamma\rho}} \cong 84.2'$$

I Pianeti

Sole

1. **diametro: 1.4 10^6 Km**
2. **densità 0.25ρ_{Terra}**
3. **gravità: 28g**
4. **massa 10^{30} Kg**

pianeta	Massa (Kg)	<Dist> dal Sole (Km)	Dist. al perielio (Km)	Distanza all'afelio (Km)	Periodo (anni)
Mercurio	3.3010^{23}	57.9 10^6	45.9 10^6	69.8 10^6	0.241
Venere	4.87 10^{24}	108 10^6	107 10^6	109 10^6	0.615
Terra	5.98 10^{24}	150 10^6	147 10^6	152 10^6	1
Marte	6.42 10^{23}	228 10^6	207 10^6	249 10^6	1.88
Giove	1.90 10^{27}	778 10^6	740 10^6	816 10^6	11.9
Saturno	5.67 10^{26}	1430 10^6	1350 10^6	1510 10^6	29.5
Urano	8.70 10^{25}	287010^6	2730 10^6	3010 10^6	84.0
Nettuno	1.03 10^{26}	4500 10^6	4460 10^6	4540 10^6	165
Plutone	1.5 10^{22}	5860 10^6	4410 10^6	7360 10^6	248

LUNA:

1. **dist. dalla Terrra 0.384 10^6 Km**
2. **diametro: 3476 Km**
3. **volume 22 10^9 Km^3 1/49 V_{Terra}**
4. **massa: 1/80 M_{Terra}**
5. **densità: 0.61 $\rho_{Terra} \rightarrow 3.34\rho_{acqua}$**
6. **gravità: 1/6 g**

Le principali lune di Giove

luna	Massa (Kg)	<dist.> da Giove (Km)	Dist. al periastro di Giove	Distanza all' apoastro di Giove	Periodo (giorni)
Io	$8.9\ 10^{22}$	$422\ 10^{3}$	$422\ 10^{3}$	$422\ 10^{3}$	1.77
Europa	$4.8\ 10^{22}$	$671\ 10^{3}$	$671\ 10^{3}$	$671\ 10^{3}$	3.55
Ganimede	$1.5\ 10^{23}$	$1070\ 10^{3}$	$1068\ 10^{3}$	$1071\ 10^{3}$	7.16
Callisto	$1.1\ 10^{23}$	$1883\ 10^{3}$	$1870\ 10^{3}$	$1896\ 10^{3}$	16.69

I satelliti artificiali

satelliti	M (Kg)	<dist.> T(Km)	Dist. al periastro. (*10^{3} Km)	Dist. apoa. (*10^{3} Km)	Periodo (minuti)
Sputnik I	83	$6.97\ 10^{3}$	6.60	7.33	96.2
Sputnik II	3000	$7.33\ 10^{3}$	6.61	8.05	104
Explorer I	14	$7.83\ 10^{3}$	6.74	8.91	115
Vanguard I	1.5	$8.68\ 10^{3}$	7.02	10.3	134
ExplorerIII	14	$7.91\ 10^{3}$	6.65	9.17	116
Sputnik III	1320	$7.42\ 10^{3}$	6.59	8.25	106