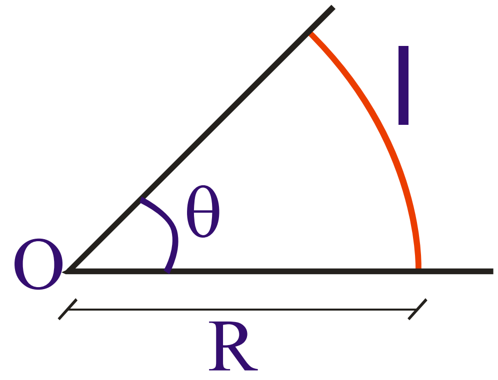
Richiami di matematica

Nelle pagine successive sono riportate alcune formule matematiche indispensabili per seguire il corso di Fisica Generale I .

Molti concetti quali derivate ed integrali saranno argomento dei corsi di matematica

Angoli



Definizione di angolo in radianti

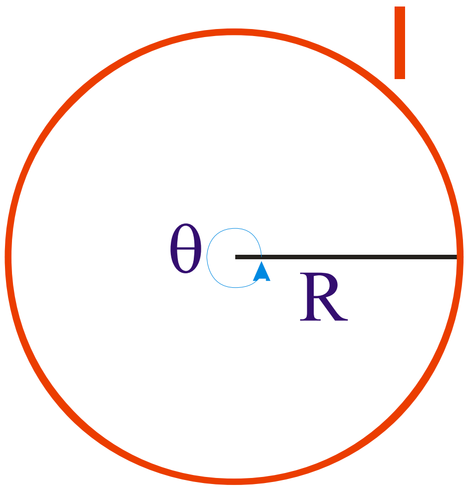
$$\theta = \frac{\ell}{R}$$

con *l*: lunghezza dell'arco di circonferenza di raggio R, cui è sotteso θ

$$[\theta] = \frac{[L]}{[L]}$$

θ **è adimensionale**

Se l è l'intera circonferenza l =2πR, θ è l'angolo giro



quindi:

$$\theta = \frac{\ell}{R} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$$

Da radianti a gradi:

$$\frac{\theta_{rad}}{2\pi} = \frac{\theta_{gradi}}{360}$$

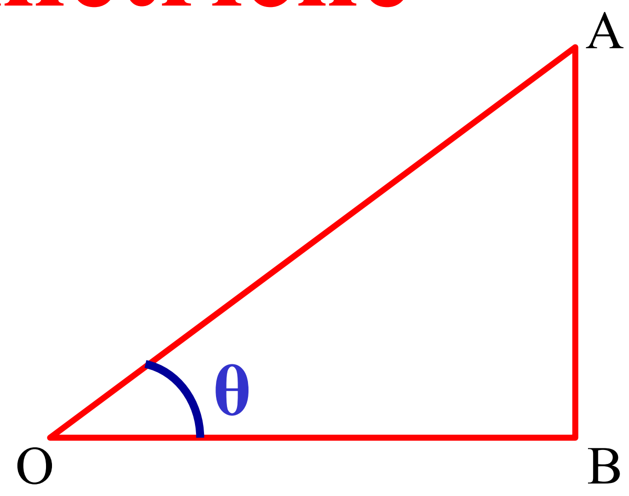
θ_{gradi}	θ_{rad}
0°	0
30°	π/6
45°	π/4
60°	π/3
90°	π/2
180°	π

Funzioni trigonometriche

Seno $\text{sen}(\theta) = \dfrac{AB}{OA}$

Coseno $\cos(\theta) = \dfrac{OB}{OA}$

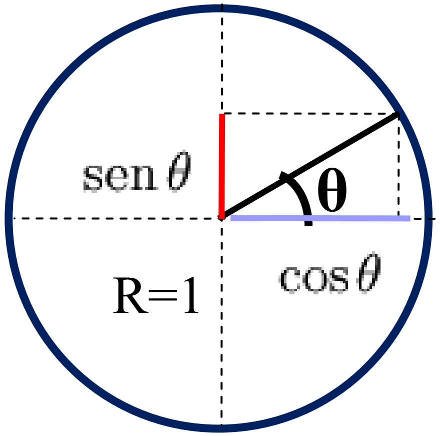
Tangente $\tan(\theta) = \dfrac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \dfrac{AB}{OB}$



$$\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

sen (0)	0	cos (0)	1	tan (0)	0
sen (π/6)	1/2	cos (π/6)	√3/2	tan (π/6)	√3/3
sen (π/4)	√2/2	cos (π/4)	√2/2	tan (π/4)	1
sen (π/3)	√3/2	cos (π/3)	1/2	tan (π/3)	√3
sen (π/2)	1	cos (π/2)	0	tan (π/2)	Infinito
sen (π)	0	cos (π)	-1	tan (π)	0
sen (3/2π)	-1	cos (3/2π)	0	tan (3/2π)	Infinito

Funzioni trigonometriche



Funzione	Abbreviazione	Relazione
Seno	sen (o sin)	$\operatorname{sen}\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
Coseno	cos	$\cos\theta = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
Tangente	tan (o tg)	$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
Cotangente	cot (o ctg)	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
Secante	sec	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
Cosecante	csc (o cosec)	$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

Derivate fondamentali

Funzione	Derivata	Esempio
$y = f(x)$	$y' = f'(x) = df(x)/dx$	
$y = \text{costante}$	$y' = 0$	$y=5 \quad \rightarrow \quad y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$	
$y = a \cdot x$	$y' = a$	$y=2x \quad \rightarrow \quad y' = 2$
$y = x^n$	$y' = n\,x^{n-1}$	$y=x^3 \quad \rightarrow \quad y' = 3x^2$ $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \rightarrow y' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	
$y = \ln(x)$	$y' = \frac{1}{x}$	
$y = a^x$	$y' = a^x \ln(a)$	$y = 4^x \quad \rightarrow \quad y' = 4^x \ln(4)$
$y = \log_a(x)$	$y' = \frac{1}{x \ln(a)}$	$y = \log_5(x) \rightarrow \quad y' = \frac{1}{x \ln(5)}$

Derivate fondamentali

Funzione	**Derivata**
y = sen(x)	y' = cos(x)
y = cos(x)	y' = -sen(x)
y = tan(x)	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
y = arcsen(x)	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
y = arccos(x)	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
y = arctan(x)	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$

Derivate fondamentali

funzione di funzione

Funzione	**Derivata**	**Esempio**
y = f(g(x))	**y' = f'·dg(x)/dx**	
$y = [f(x)]^n$	**$y' = n\,[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$**	$y=(2x+5)^3 \rightarrow y' = 3(2x+5)^2 \cdot 2$
y = ln [f(x)]	$y' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$	$y=\ln(x^3+1) \rightarrow y' = \frac{1}{x^3+1} 3x^2$
$y = e^{f(x)}$	**$y' = e^{f(x)}\, f'(x)$**	$y=e^{3x} \rightarrow y' = e^{3x} \cdot (3)$
y = sen [f(x)]	**y' = cos[f(x)] f'(x)**	$y = \text{sen}\,(2x) \rightarrow y' = 2 \cdot \cos(2x)$

Derivate fondamentali

Funzione	**Derivata**	**Esempio**
y = f(x)+g(x)	**y' = f'(x)+g'(x)**	$y = 3x^2 + x \rightarrow y' = 6x + 1$
y = f(x)·g(x)	**y' = f'(x) · g(x) + f(x)·g'(x)**	$y = 3x^2 \cdot \cos(x) \rightarrow$ $y' = 6x \cdot \cos(x) - 3x^2 \cdot \text{sen}(x)$
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$	$y = \frac{1+x}{x} \rightarrow$ $y' = \frac{x-(1+x)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

Alcuni esempi

$y = f(x) \rightarrow$ **x: variabile indipendente; y: variabile dipendente**

Derivata: $y' = df(x)/dx$

Moto unidimensionale:

Spazio = $x(t) \rightarrow$ **t: variabile indipendente; Spazio: variabile dipendente**

Derivata= $d\,x(t)/dt = v(t)$ = velocità

$$x(t) = -(1/2)\cdot 9{,}81\, t^2 + 10\cdot t + 150$$

$$v(t) = d\,x(t)/dt = -9{,}81\cdot t + 10$$

$d\,v(t)/dt = a(t)$ = accelerazione

$$a(t) = d\,v(t)/dt = -9{,}81$$

$$\mathbf{a(t) = d\,v(t)/dt = d^2\,x(t)/dt^2}$$

Integrali fondamentali

Integrale indefinito	Esempio
$\int f(x)\,dx = F(x) + c$	
$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$	
$\int f'(x)\,dx = f(x) + c$	
$\int a\,dx = ax + c$	$\int 5\,dx = 5x + c$
$\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ con $n \neq -1$	$\int x^2\,dx = \dfrac{x^3}{3} + c$
$\int \dfrac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$	
$\int e^x\,dx = e^x + c$	
$\int e^{kx}\,dx = \dfrac{e^{kx}}{k} + c$	$\int e^{3x}\,dx = \dfrac{e^{3x}}{3} + c$
$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$	

Integrali fondamentali

Integrale indefinito
$\int sen(x)\,dx = -cos(x) + c$
$\int cos(x)\,dx = sen(x) + c$
$\int sen^2(x)\,dx = 1/2(x - sen(x)\,cos(x)) + c$
$\int cos^2(x)\,dx = 1/2(x + sen(x)\,cos(x)) + c$

Proprietà dell'integrale indefinito

$$\int k\,f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$$

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \ldots + \int f_n(x)\,dx$$

Alcuni esempi: a(t) = costante = a_0

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad d\,v(t) = a(t)dt$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)dt \Longrightarrow v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt \Longrightarrow v(t) = v_0 + a_0(t - t_0)$$

Se a(t) è costante, ad esempio -9,81 m/s^2;

$t_0 = 0$ s; $v_0 = 10$ m/s

$v(t) = -9{,}81 \cdot t + 10$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad dx(t) = v(t)dt \qquad \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [v_0 + a_0(t - t_0)]dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 dt + \int_{t_0}^{t} a_0(t - t_0)dt$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2$$

Se $x_0 = 150$ m: $\quad x(t) = 150 + 10t - \frac{1}{2}9{,}81\, t^2$