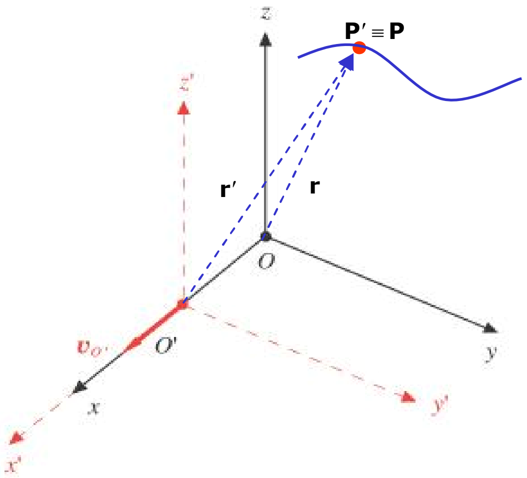
Moti relativi



Come descrivere posizione, velocità e accelerazione di un punto materiale P in **due sistemi di riferimento** cartesiani Oxy e O'x'y'. Supponiamo Oxy: fisso e O'x'y: mobile

$\overrightarrow{OO'}$ Distanza O O'

r Vettore posizione di P rispetto a Oxy

r' Vettore posizione di P rispetto a O'x'y'

$$\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}\,'$$

Se i due sistemi **traslano solo** fra di loro, i versori non variano nel tempo.

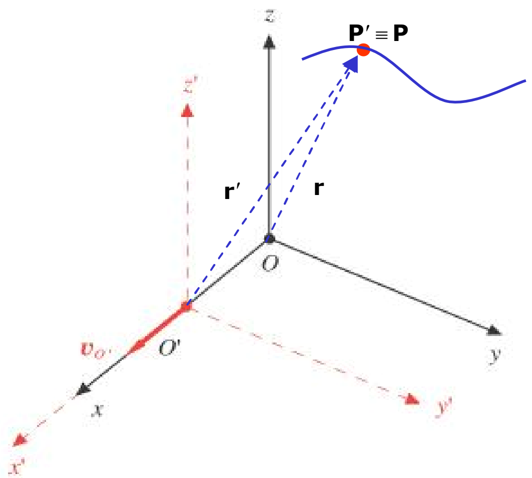
$$\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}\,'$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \vec{v}_{OO'} + \vec{v}\,'$$

Leggi di trasformazione di velocità e accelerazione per due sistemi che traslano l'uno rispetto all'altro

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{v}\,'}{dt} = \vec{a}_{OO'} + \vec{a}\,'$$

Sistemi inerziali



abbiamo

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \overrightarrow{OO'} + \mathbf{r}' \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_{OO'} + \mathbf{v}' \\ \mathbf{a} = \mathbf{a}_{OO'} + \mathbf{a}' \end{cases}$$

Se O' si muove di moto rettilineo uniforme rispetto ad O

$$\vec{v}_{OO'} = \text{cost}$$

$$\begin{cases} \vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}' \\ \vec{v} = \vec{v}_{OO'} + \vec{v}' \\ \vec{a} = \vec{a}' \end{cases}$$

$$\vec{a}_{OO'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}' = \vec{a}$$

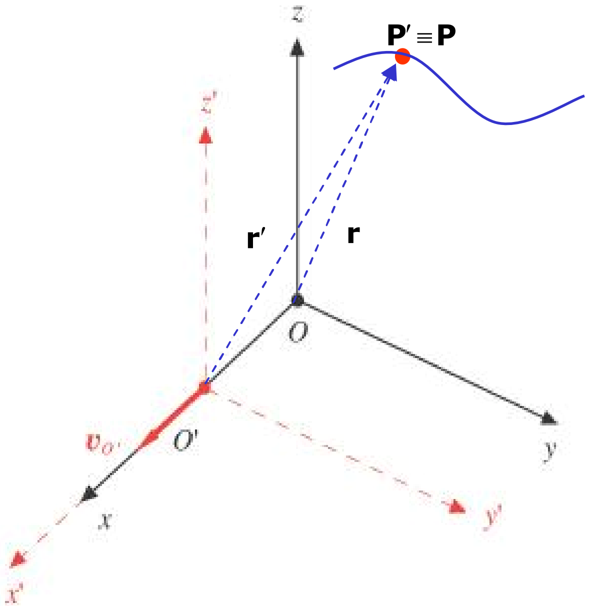
Nel sistema di riferimento O si misura **a** e si deduce che la forza agente è **F** = m**a**

Nel sistema di riferimento O', si misura la stessa **a** e si ricava la stessa forza **F** = m**a**

Non è possibile stabilire, tramite misure effettuate in questi due sistemi, se uno di essi è in quiete o è in moto. Tali sistemi si dicono ***sistemi inerziali.***

Sistemi inerziale: sistema i cui vale rigorosamente la legge di inerzia,

un corpo che si muove con velocità arbitraria in qualunque direzione, si muove di moto rettilineo uniforme o, se è in quiete rimane in quiete



$$\begin{cases} \mathbf{r} = \overrightarrow{OO'} + \mathbf{r}' \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_{OO'} + \mathbf{v}' \\ \mathbf{a} = \mathbf{a}_{OO'} + \mathbf{a}' \end{cases}$$

Sistemi non inerziali

Se il sistema O' si muove con velocità variabile

$$v_{OO'} \neq \text{cost} \qquad \mathbf{a}_{OO'} \neq 0$$

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{OO'}$$

Per cui un **osservatore su O** (nel sistema in quiete)vedrà $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

mentre **su O'** (sistema accelerato $a_{OO'} \neq 0$)vedrà $\mathbf{F}' = m\mathbf{a}' = m(\mathbf{a} - \mathbf{a}_{OO'}) = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_{OO'}$

Forza apparente: non deriva dalle interazioni fondamentali ed esiste solo nei sistemi non inerziali

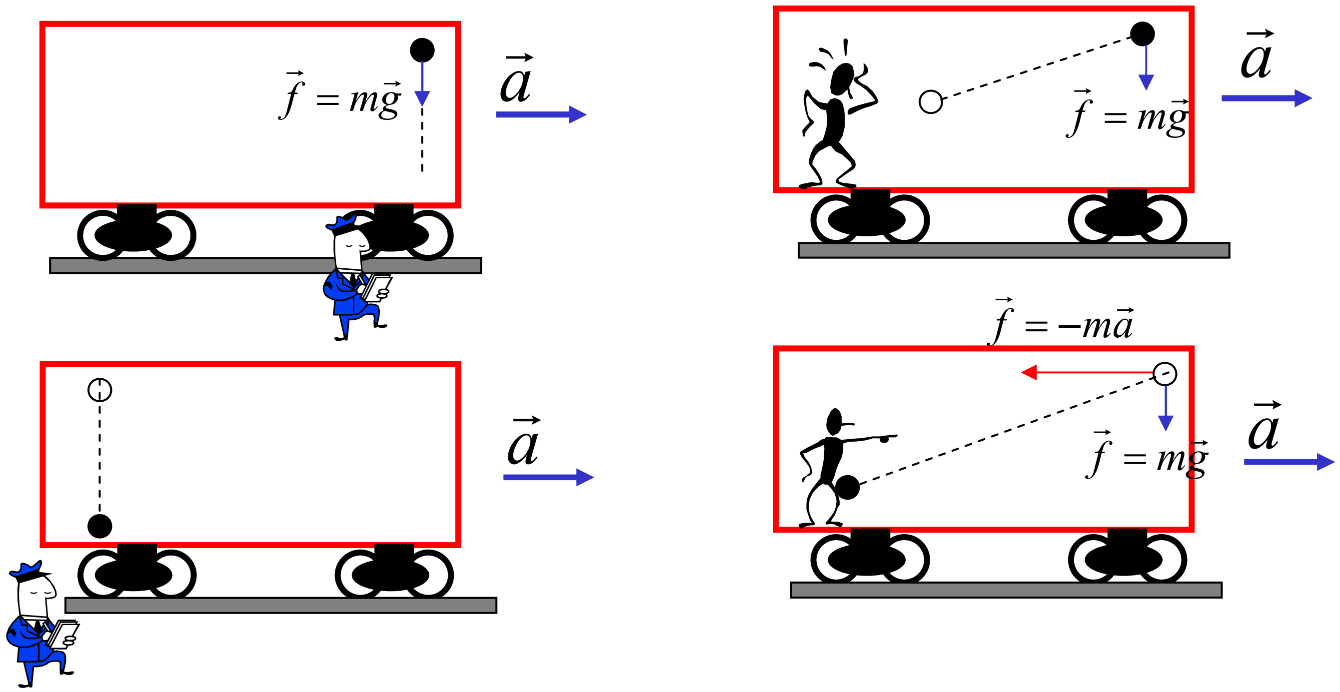
Un sistema accelerato è un sistema ***non inerziale***: in questo sistema ***non vale la legge di inerzia***, **F**=0 non comporta **a**'= 0 ma $\mathbf{a}' = \mathbf{a}_{OO'}$. In un sistema non inerziale in assenza di forze fondamentali, **agiscono forze apparenti** $F_{apparenti} = ma_{OO'}$

Sono sistemi inerziali i sistemi in quiete o in moto rettilineo uniforme.

I sistemi per i quali ***$a_{OO'} \neq 0$ non sono inerziali***.

I punti in tali sistemi sono soggetti a forze apparenti

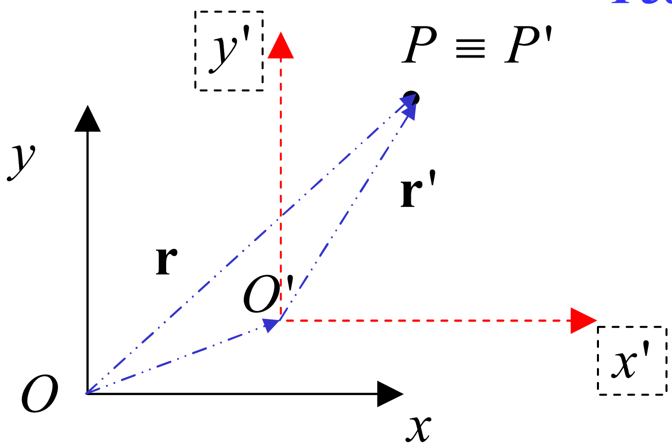
Sistemi non inerziali
Esempio



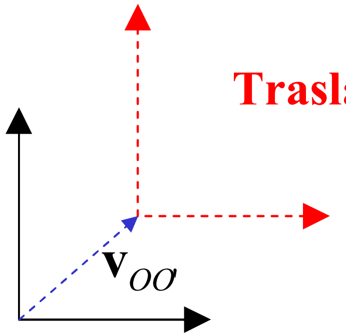
Osservatore inerziale *Osservatore non inerziale*

Moti relativi

Teorema delle velocità relative

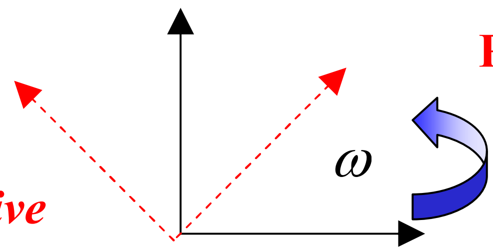


Traslazione



versori non variano nel tempo

Rotazione



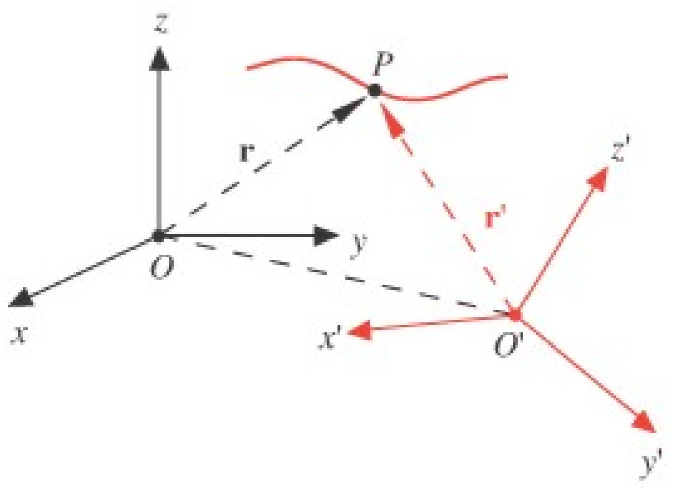
versori variano nel tempo

In generale si può dimostrare che:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \underbrace{\mathbf{v}_{OO'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'}$$ *Teorema delle velocità relative*

Termine correttivo per passare da un sistema all'altro: velocità di trascinamento v_t

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{v}_{OO'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad \begin{cases} \text{se} \quad \boldsymbol{\omega} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_t = \mathbf{v}_{OO'} & \textit{(solo traslazione -caso già visto)} \\ \text{se} \quad \mathbf{v}_{OO'} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_t = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' & \textit{(solo rotazione)} \end{cases}$$



Moti relativi

Teorema delle accelerazioni relative

Nell'ipotesi in cui ω: costante, si può dimostrare il

teorema delle accelerazioni relative:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \boxed{\mathbf{a}_{OO'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')} + \boxed{2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'}$$

$\mathbf{a}_t$: accelerazione di trascinamento, dipende dai parametri del moto relativo tra i due sistemi di riferimento

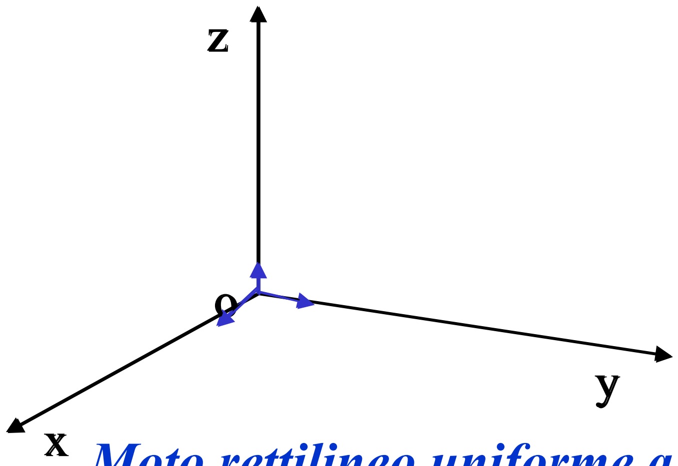
$\mathbf{a}_c$: accelerazione complementare o di Coriolis e dipende dal moto di P rispetto al sistema mobile (v')

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c \quad \begin{cases} \text{se} \quad \boldsymbol{\omega} = 0 & \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{OO'} \\ \text{se} \quad \mathbf{v}_{OO'} = 0 & \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \end{cases}$$

*(**solo traslazione** -caso già visto)*

*(**solo rotazione**)*

Moti relativi – Traslazione



Caso 1:

$$\boldsymbol{\omega} = 0$$

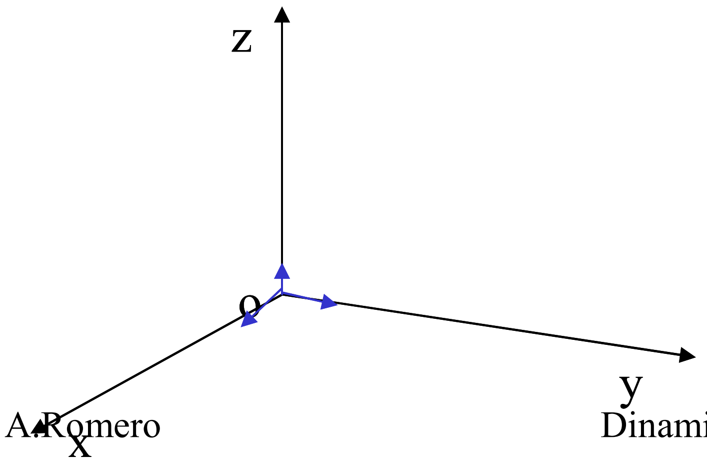
$$\mathbf{a}_{OO'} = 0$$

Moto rettilineo uniforme a relativa nulla

Caso 2:

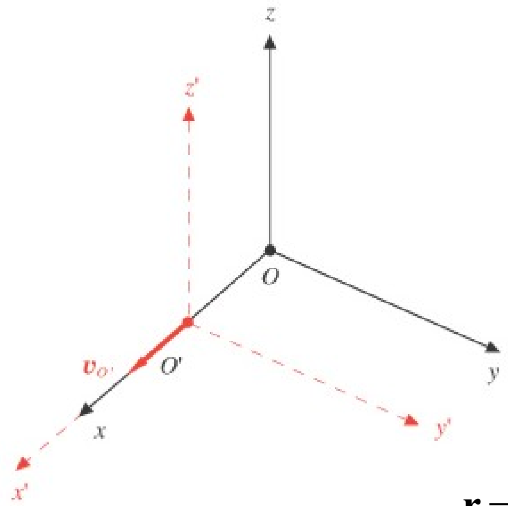
$$\boldsymbol{\omega} = 0$$

$$\mathbf{a}_{OO'} \neq 0$$



Moto traslatorio a diversa da zero

Moti relativi – Traslazione *Trasformazioni Galileiane*



Riprendiamo il primo caso studiato. O' si muove lungo una traiettoria rettilinea Supponiamo il moto traslatorio lungo l'asse x (che coincide con l'asse x' come mostrato in figura) $\Rightarrow \boldsymbol{\omega}=0$

Caso 1: $\mathbf{a}_{OO'}=0 \Rightarrow$ **O e O': inerziali**

$$\mathbf{r}=\overrightarrow{OO'}+\mathbf{r'} \Rightarrow \mathbf{r}=\mathbf{v}_{O'}t+\mathbf{r'}$$

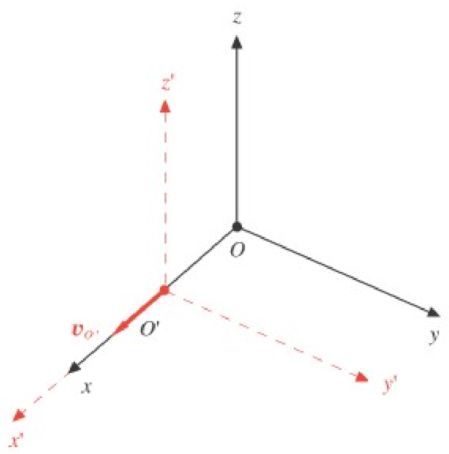
$$\mathbf{v}=\mathbf{v'}+\mathbf{v}_{OO'}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r'} \Rightarrow \mathbf{v}=\mathbf{v'}+\mathbf{v}_{OO'}$$

$$\mathbf{a}=\mathbf{a'}+\mathbf{a}_{OO'}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r'})+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v'} \Rightarrow \mathbf{a}=\mathbf{a'}$$

Proiettando sugli assi:

$$\begin{cases} x'=x-v_{O'}t \\ v_x'=v_x-v_{OO'} \\ a'_x=a_x \end{cases} \qquad \begin{cases} y'=y \\ v_y'=v_y \\ a'_y=a_y \end{cases} \qquad \begin{cases} z'=z \\ v_z'=v_z \\ a'_z=a_z \end{cases}$$

Queste trasformazioni tra due sistemi inerziali si chiamano **trasformazioni galileiane**



Moti relativi - traslazione

$$\boldsymbol{\omega}=0$$

Caso 2: $\mathbf{a}_{OO'}\neq 0 \qquad \mathbf{a}_{OO'}=\mathbf{a}_t$ ⇒ **O inerziale**
O' non inerziale

Se O' ha un'accelerazione costante $\mathbf{a_t}$ e una velocità iniziale $\mathbf{v_{in}}$, parallele e concordi all'asse x≡x'. Posizione e velocità di O' sono :

$$\overrightarrow{OO'}=x_{OO'}=v_{in}t+\frac{1}{2}a_t t^2 \qquad v_{OO'}=v_{in}+a_t t$$

$$\mathbf{r}=\overrightarrow{OO'}+\mathbf{r}' \quad\Rightarrow\quad \mathbf{r}'=\mathbf{r}-\overrightarrow{OO'}$$

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}'+\mathbf{v}_{OO'}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}' \quad\Rightarrow\quad \mathbf{v}'=\mathbf{v}-\mathbf{v}_{OO'}$$

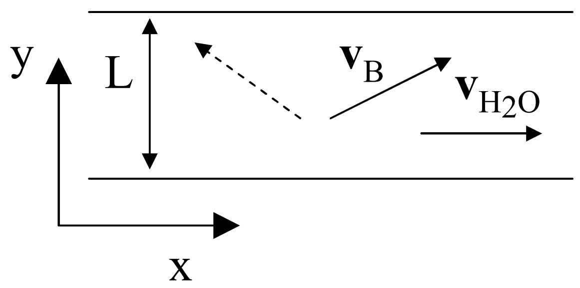
$$\mathbf{a}=\mathbf{a}'+\mathbf{a}_{OO'}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}' \quad\Rightarrow\quad \mathbf{a}'=\mathbf{a}-\mathbf{a}_{OO'}$$

Proiettando sugli assi:

$$\begin{cases} x'=x-v_{in}t-\frac{1}{2}a_t t^2 \\ v_x'=v_x-v_{in}-a_t t \\ a'_x=a_x-a_t \end{cases} \qquad \begin{cases} y'=y \\ v_y'=v_y \\ a'_y=a_y \end{cases} \qquad \begin{cases} z'=z \\ v_z'=v_z \\ a'_z=a_z \end{cases}$$

Moti relativi – Traslazione *Esercizio*

Un battello impiega due minuti ad attraversare un fiume largo 150 metri. La velocità del battello rispetto all'acqua è di 3 m/s. la velocità della corrente del fiume è di 2 m/s. Quali sono i possibili punti di arrivo?



$|\mathbf{v}_{H2O}|$=2 m/s L=150 m

$|\mathbf{v}_B|$=3 m/s T=2 min =120 s

$$y = v_{yB} t \quad \Rightarrow 150 = v_{yB} \cdot 120 \Rightarrow v_{yB} = \frac{150}{120} = 1{,}25 \frac{m}{s}$$

$$v_B^2 = v_{xB}^2 + v_{yB}^2 \quad \Rightarrow 9 = v_{xB}^2 + 1{,}25^2 \qquad \Rightarrow v_{xB} = \pm 2{,}73 \frac{m}{s}$$

$v_{xB1} = +2{,}73 \frac{m}{s}$ *Moto nel verso della corrente:*

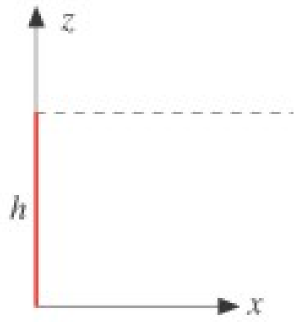
$v_{xB2} = -2{,}73 \frac{m}{s}$ *Moto contro-corrente:*

controcorrente: $x_1 = (v_{xB1} + v_{H_2O})t = (\text{-}2{,}73 + 2) \cdot 120 = -87{,}2\text{m}$

nel verso della corrente: $x_2 = (v_{xB2} + v_{H_2O})t = (2{,}73 + 2) \cdot 120 = 567\text{m}$

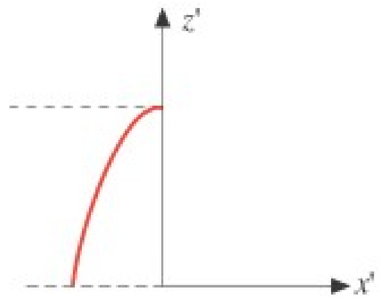
Moti relativi – Traslazione *Esercizio*

Nel sistema O viene lasciato cadere un punto lungo l'asse z da un'altezza h, cosa vede O',
se si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $v_{O'}$?



Equazioni del moto nel sistema O:

$$\begin{cases} x=0 \\ v_x=0 \\ a_x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ v_y=0 \\ a_y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z=h-\frac{1}{2}gt^2 \\ v_z=-gt \\ a_z=-g \end{cases}$$

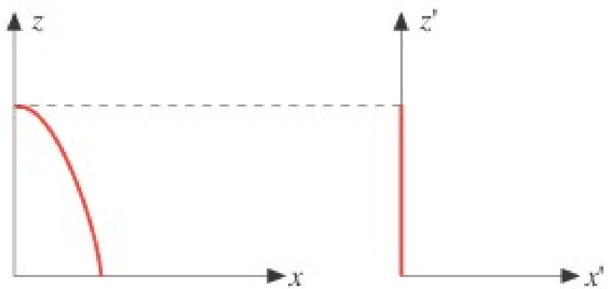


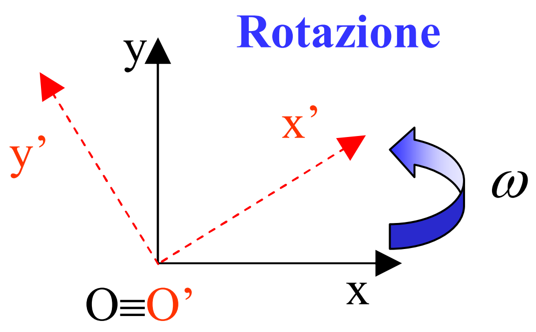
In O' si ha, secondo le trasformazioni galileiane:

$$\begin{cases} x=-v_{O'}t \\ v_x=-v_{O'} \\ a_x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ v_y=0 \\ a_y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z=h-\frac{1}{2}gt^2 \\ v_z=-gt \\ a_z=-g \end{cases}$$

In O' il moto è composto da un moto **rettilineo uniforme lungo l'asse x'** con velocità $-v_{O'}$ e da un uniformemente accelerato lungo l'asse z: la traiettoria è un arco di parabola

Se invece il punto è inizialmente in quiete in O' ed è lasciato cadere in questo sistema, la situazione è quella rappresentata in figura:





Moti relativi - rotazione

Si considerano due sistemi di riferimento con origine in comune ($\mathbf{r}=\mathbf{r}'$), uno in rotazione rispetto all'altro

$$\boldsymbol{\omega}=\text{costante} \qquad \mathbf{a}_{OO'}=0 \qquad \mathbf{v}_{OO'}=0$$

$$\mathbf{r}=\overrightarrow{OO'}+\mathbf{r}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}=\overrightarrow{OO'}+\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}'+\mathbf{v}_{OO'}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}=\mathbf{v}'+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}'+\mathbf{a}_{OO'}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}=\mathbf{a}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'$$

$$\mathbf{a}'=\mathbf{a}-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')-2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'$$

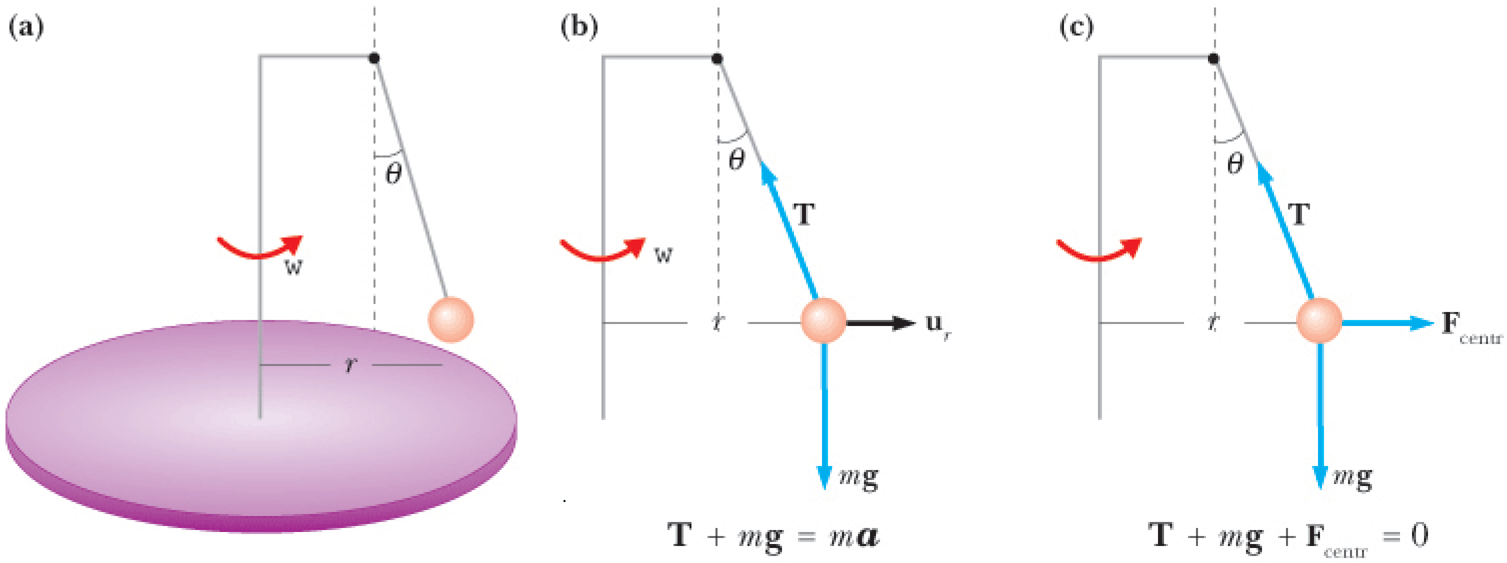
$$\Downarrow$$

$$m\mathbf{a}'=\mathbf{F}+\mathbf{F}_{centr}+\mathbf{F}_{Cor} \longrightarrow$$ *Forze apparenti*

Con: F_{centr}: forza centrifuga $\quad F_{centr}=-m\,\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')$

F_{Cor}: forza di Coriolis $\quad F_{Cor}=-2m\,\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'$

Es: Filo a piombo sospeso a punto fuori asse di rotazione su piattaforma rotante



Il filo si dispone con angolo θ che cresce con ω e con distanza da asse di rotazione. **O inerziale** (fig b) vede corpo soggetto a mg e **T**

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} = -m\omega^2 r\overrightarrow{u_r} \qquad T\operatorname{sen}\theta = m\omega^2 r \;\; ; T\cos\theta = mg \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{\omega^2 r}{g}$$

. **O' che ruota** (fig c) vede corpo fermo e soggetto a forze mg, **T** e **F_c. Le forze vere sono equilibrate da F_c apparente; tg** θ =ω^2r/g anche per O'. Se misuro **θ** trovo **a**

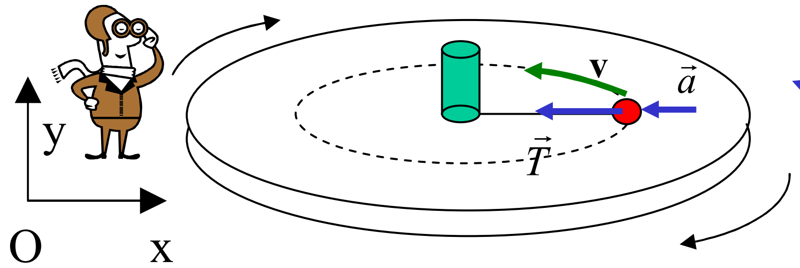
$$\vec{F}_{centr} = -\vec{T} - m\vec{g} \;\; ; \vec{F}_{centr} = -m\vec{a} = m\omega^2 r\overrightarrow{u_r}$$

Moti relativi – rotazione

Esempio forza di centrifuga e forza di Coriolis

Consideriamo due sistemi di riferimento, uno inerziale O, e l'altro solidale con una piattaforma rotante con velocità angolare ω.

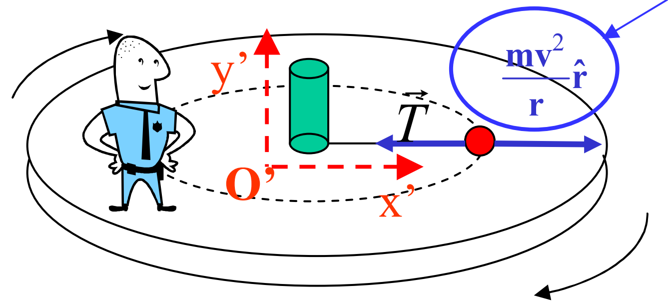
Si lega un punto P con filo all'asse di rotazione e diamo una velocità ωr in modo che il punto ruoti con la stessa velocità angolare del sistema O'



Per O il punto descrive un moto circolare uniforme e l'unica forza in gioco è la tensione del filo T

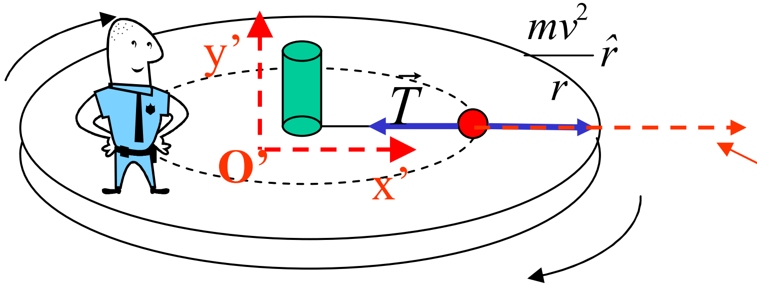
forza centrifuga

Per O' il punto è fermo **v**'=0 e **a**'=0, ma osservando il filo teso, O' è costretto ad ammettere che esiste un'altra forza che agisca verso l'esterno bilanciando la tensione del filo: la forza centrifuga



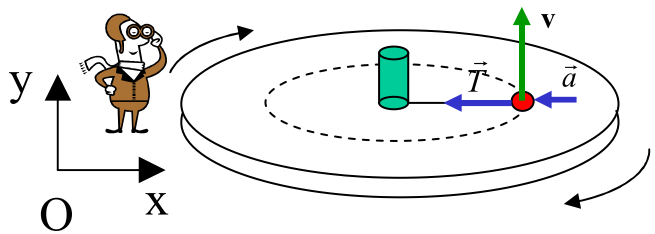
Moti relativi – rotazione

Esempio forza di centrifuga e forza di Coriolis

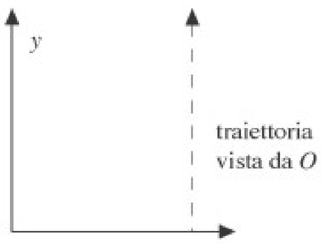


Per verificare la sua ipotesi (esistenza di una forza centrifuga), O' taglia il filo tra l'origine ed il punto ***e immagina*** di vedere il punto allontanarsi radialmente, sotto l'effetto della forza centrifuga

Dopo il taglio:

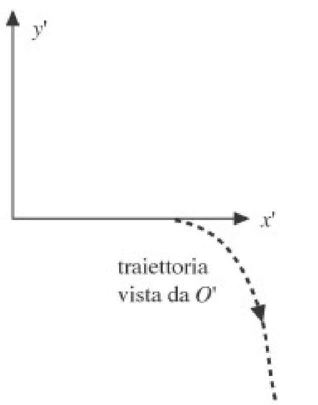


dopo il taglio, l'osservatore in **O** vede il punto muoversi di moto rettilineo uniforme in direzione tangente alla circonferenza



dopo il taglio, l'osservatore in **O'** non osserva il moto atteso (rettilineo lungo la direzione radiale), ma osserva un moto curvilineo

O' deve ipotizzare che sul punto agisca un'altra forza, che non si manifesta quando il corpo è in quiete: ***è la forza di Coriolis***



Moto della terra

Quali sono i sistemi inerziali?Un sistema con origine nel centro di massa del sistema solare e con assi diretti a verso le stelle fisse, è un buon sistema inerziale

Normalmente le misure sono fatte rispetto al sistema di riferimento terrestre, ma qualsiasi riferimento solidale con la Terra non è un sistema inerziale! Nel sistema di riferimento terrestre:

$T = 24\text{ h} = 8{,}64\ 10^4\text{s}$ ω: costante$=2\pi/T=7{,}29\ 10^{-5}$rad/s

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{OO'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \Rightarrow \mathbf{g}_0 = \mathbf{g} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

Accelerazione di gravità per un Sistema Inerziale

Accelerazione di gravità rispetto a un sistema terrestre

Velocità di un oggetto rispetto al sistema terrestre

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}') - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

Termine della Forza centrifuga

Termine della Forza di Coriolis

Il termine centrifugo è perpendicolare ad asse terrestre. Correzione a g a latitudine di 45^0 è $2{,}4\ 10^{-2}$ m/s^2 cioè una deviazione di circa $0{,}1\ ^0$