Dinamica III

Lavoro ed Energia

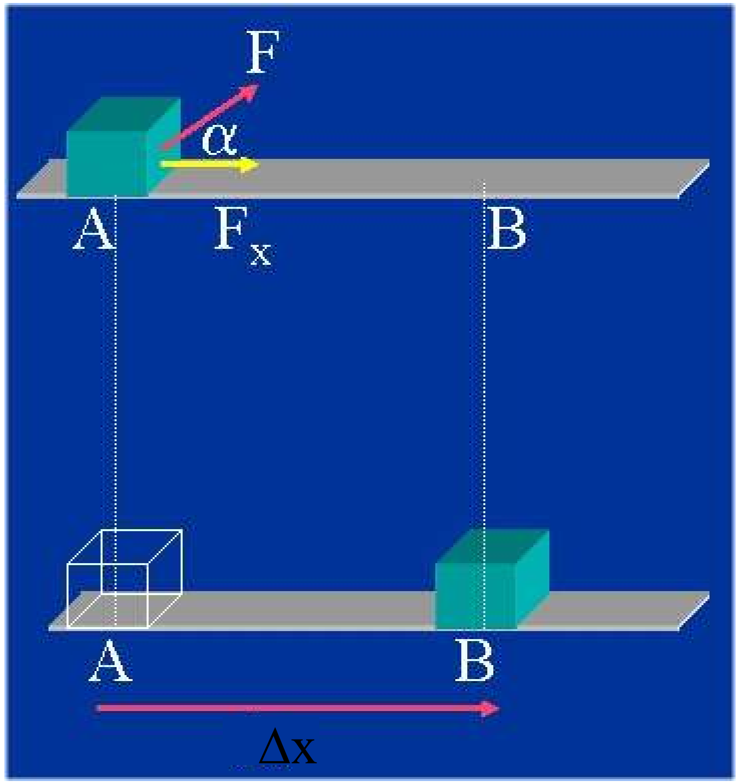
Lavoro di una forza costante

Se il punto materiale a cui è applicata una forza subisce uno spostamento ed esiste una componente della forza parallela allo spostamento, la forza compie un lavoro.

Per semplicità consideriamo il caso particolare di una forza costante che produce moto in una dimensione.

Il **lavoro** compiuto da tale forza è **il prodotto della componente della forza lungo la direzione del moto per lo spostamento**.

In altri termini il lavoro è dato dal prodotto scalare della forza per lo spostamento.



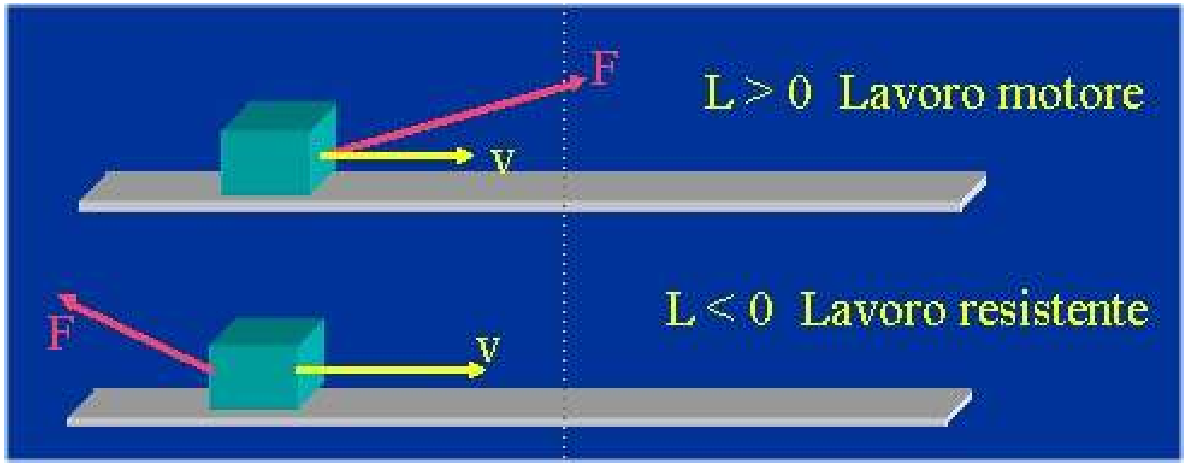
$$L = F_x \Delta x = F\cos\alpha\, \Delta x = \mathbf{F} \bullet \Delta \mathbf{x}$$

Unità di misura S.I. → joule (J)

$$1\ J = 1\ N \cdot m = 1\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$$

Lavoro di una forza costante

- Il lavoro è una grandezza **scalare.**
- Assume valori **positivi** se la forza favorisce il moto (angolo α acuto).
- Assume valori **negativi** se la forza ostacola il moto (angolo α ottuso).

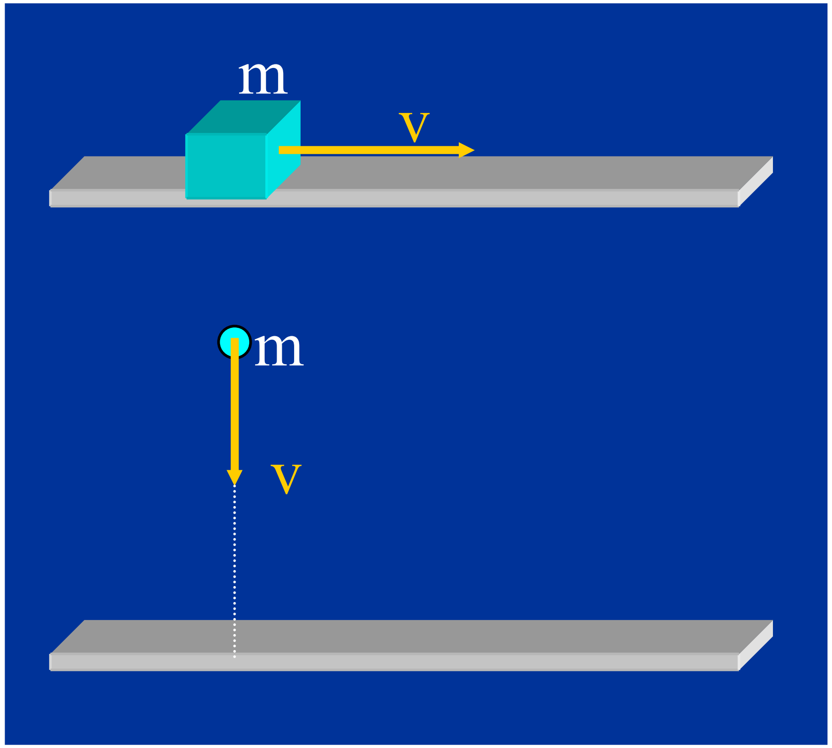


Il lavoro è nullo se:

- **F = 0: non agiscono forze;**
- **$\Delta x = 0$: la forza non genera moto;**
- **F è perpendicolare allo spostamento Δx: $\cos\alpha = \cos 90° = 0$.**

Energia cinetica

Cos'è l'energia? La capacità di compiere un lavoro.



- **L'energia cinetica** è una forma di energia legata al movimento.
- Consideriamo un corpo di massa m che si muova, in un certo istante, con velocità di modulo v.
- Definiamo **energia cinetica E_c** del corpo, il semiprodotto della sua massa per il quadrato della sua velocità:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2$$

S.I. $\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{J}$

Teorema dell'energia cinetica

"Il lavoro totale compiuto dalla forza risultante che agisce su un corpo è uguale alla variazione dell'energia cinetica del corpo."

$$L = F_x \Delta x = m a_x \Delta x$$

definizione di lavoro

II principio della dinamica

Per una forza costante l'accelerazione è costante e si può mettere in relazione la distanza percorsa con la velocità iniziale e quella finale:

$$v^2_{finale} = v^2_{iniziale} + 2 a_x \Delta x \rightarrow a_x \Delta x = \frac{1}{2}\left(v^2_{finale} - v^2_{iniziale}\right)$$

$$L = \frac{1}{2} m\left(v^2_{finale} - v^2_{iniziale}\right) = E_{c,finale} - E_{c,iniziale} = \Delta E_c \Rightarrow \boxed{\mathbf{L = \Delta E_c}}$$

Il teorema dell'energia cinetica ha validità generale ed è **applicabile anche nel caso di una forza risultante non costante**.

Energia potenziale gravitazionale

L'energia potenziale è l'energia posseduta da un corpo in virtù della sua **posizione**. Un masso poggiato in cima ad una roccia ha energia potenziale gravitazionale. Se gli si dà una spinta, esso rotola giù aumentando la sua velocità e quindi la sua energia cinetica: mentre il masso cade **la sua energia potenziale si converte in energia cinetica**.

L'energia potenziale gravitazionale E_p di un corpo di massa m a una certa quota h è data da:

$$\boxed{E_p = mgh}$$

Si noti che il valore di E_p dipende dal punto rispetto al quale si misura h, che è arbitrario; quindi ciò che importa è solo la **variazione** dell'energia potenziale.

Uno scalatore compie lavoro nell'aumentare la sua energia potenziale gravitazionale.

Forze conservative

Un corpo si trova nel punto A; sotto l'azione di una forza **F** esso si **sposta dal punto A al punto B.**

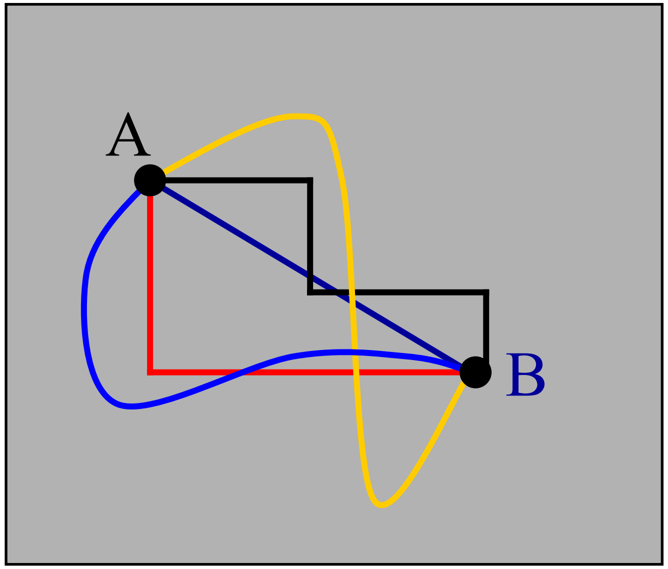
Esistono più percorsi che uniscono i due punti.

Il lavoro compiuto dalla forza **F** generalmente dipende dal particolare percorso, ma in alcuni casi esso **dipende solo dalle posizioni iniziale e finale**.

In questo caso si parla di **forze conservative**.

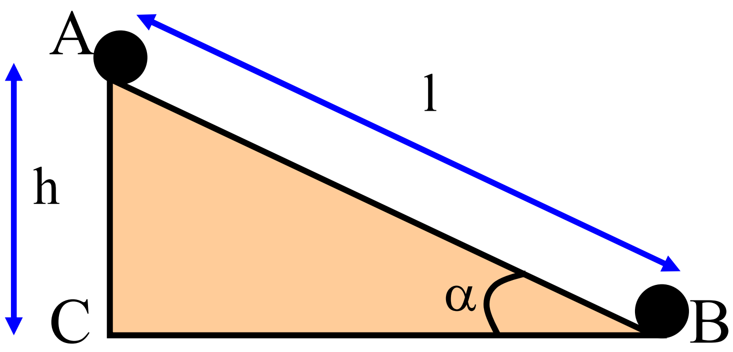
La **forza elastica** di una molla ideale e la **forza di gravità** sono due esempi di forze conservative.

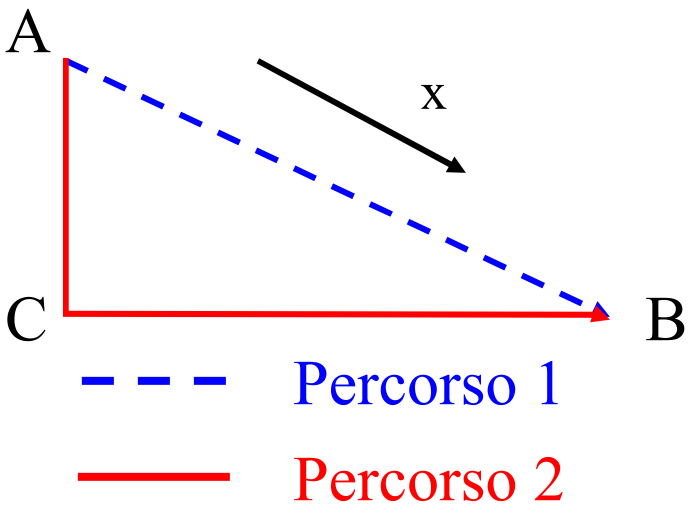
Esempi di forze **non conservative (dissipative) sono le forze di attrito.**



Forze conservative (esempio)

Se agisce solo la forza peso





Percorso 1: Un corpo di massa m scivola lungo un piano inclinato privo di attrito sotto l'azione della forza peso. Il lavoro da essa compiuto è:

$$L_{AB} = F_{\text{nella direzione di AB}}\,\overline{AB} = (mg \cdot \text{sen}\,\alpha)\,l =$$
$$= mg(l\,\text{sen}\,\alpha) = mgh$$

Percorso 2: Immaginiamo adesso che il corpo cada **verticalmente da A a C** e poi sia spostato orizzontalmente da C a B.

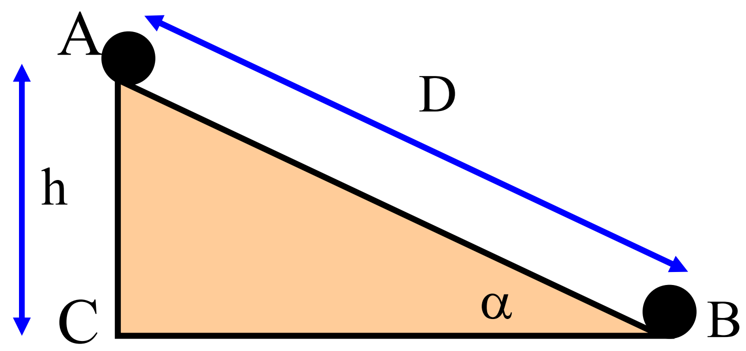
$$L = L_{AC} + L_{CB} =$$
$$= F_{\text{nella direzione di AC}}\,\overline{AC} + F_{\text{nella direzione di CB}}\,\overline{CB} =$$
$$= mgh + 0 = mgh$$

Allo stesso risultato si perviene attraverso un **qualunque percorso** a scalini o anche curvilineo.

Lavoro svolto dalla forza di gravità

Nell'esempio precedente abbiamo visto che il lavoro svolto dalla forza peso per spostare il corpo dalla posizione A alla posizione B è dato da:

$$L_{AB} = mgh$$



Supponiamo di scegliere un sistema di riferimento come mostrato in figura. In tal caso:

$$\left.\begin{array}{l} E_p(A) = mgh_A = mgh \\ E_p(B) = mgh_B = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = 0 - mgh = -mgh = -L_{AB}$$

Il lavoro compiuto dalla forza peso è uguale alla **diminuzione dell'energia potenziale gravitazionale**, il risultato ottenuto è **indipendente dal sistema di riferimento** scelto per misurare la quota y.

Conservazione dell'energia meccanica

Si può dare una **definizione generale della funzione energia potenziale** E_p **associata ad una forza conservativa**; E_p è definita in modo che il lavoro compiuto da una forza conservativa sia uguale alla diminuzione della funzione energia potenziale:

$$L = - \Delta E_p$$

Secondo il teorema dell'energia cinetica il lavoro totale compiuto da tutte le forze che agiscono su un corpo è uguale alla variazione di energia cinetica del corpo. Se le forze che compiono lavoro sono di tipo conservativo, allora il lavoro compiuto è uguale anche alla diminuzione dell'energia potenziale. Quindi:

$$L = - \Delta E_p = \Delta E_c \rightarrow \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta(E_c + E_p) = 0$$

ossia

$$E_c + E_p = \text{costante}$$

Se le sole forze che compiono lavoro sono conservative, l'energia meccanica totale (cioè la somma di energia cinetica ed energia potenziale) del sistema **resta costante**.

Forze non conservative

• La **forza di attrito** è detta ***non conservativa***, o ***dissipativa*****,** perché il lavoro compiuto dall'attrito dissipa l'energia meccanica, trasformandola in energia termica.

• Un altro tipo di forza non conservativa è quella connessa a grandi deformazioni di un corpo. Se per esempio una molla viene allungata oltre il suo limite elastico, essa si deforma permanentemente e il lavoro compiuto nell'allungamento non viene recuperato quando la molla viene lasciata libera. Di nuovo, il lavoro compiuto nel deformare la molla viene dissipato in energia termica: la molla diventa più calda.

• Il lavoro compiuto da forze non conservative dipende, in generale, da parametri diversi dalle posizioni iniziale e finale del corpo. Può dipendere per esempio dalla velocità del corpo, dallo spazio totale percorso o dal particolare percorso seguito.

• **Non è possibile definire una funzione energia potenziale per una forza non conservativa.**

Potenza

Data un forza **F** che svolge un lavoro L in un intervallo di tempo Δt, la potenza P sviluppata da tale forza è data da:

$$\boxed{P = \frac{L}{\Delta t}}$$

La potenza è pertanto legata alla rapidità con cui si compie un lavoro.

Si supponga che una forza **F** agisca su un corpo che percorre una distanza Δs in un certo intervallo di tempo Δt. Il lavoro compiuto dalla forza è $F_s \Delta s$, dove F_s è la componente della forza nella direzione del moto. La potenza sviluppata è:

$$P = \frac{F_s \Delta s}{\Delta t} = F_s \frac{\Delta s}{\Delta t} = F_s v$$

dove v è la velocità media del corpo.

Unità di misura: watt (W)

$$\mathbf{1\ W = 1\ J/s = 1\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}}$$

Esempio

Che potenza deve sviluppare motore di seggiovia che trasporta 2400 persone all'ora superando un dislivello di 500 m. Supponiamo la massa delle persone di circa 70 Kg

$$P = \frac{W}{\Delta t}$$

Lavoro W=F.Δy con F forza peso, quindi costante, e Δy spazio parallelo a forza peso

$$W = mg \cdot 2400 \cdot 500 = 70 \cdot 9.8 \cdot 2400 \cdot 500$$

P= W/Δt

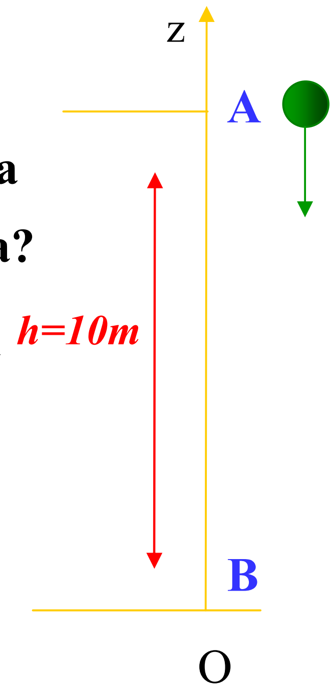
$$P = 70 \cdot 9.8 \cdot 2400 \cdot 500 / 3600 = 70 \cdot 9.8 \cdot 2 \cdot 500 / 3$$

.

=228670 W =229 KW

Esercizio Conservazione energia meccanica

Un corpo di massa m=10 kg, è lasciato cadere con velocità iniziale nulla da un'altezza di 10 m. Quanto vale la velocità poco prima che raggiunga terra?



Dal teorema di conservazione dell'energia meccanica: $E_m = E_k + E_p = \text{cost}$

$$\Downarrow$$

$$E_{p,A} - E_{p,B} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

$$\Downarrow$$

$$mgz_A - mgz_B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

z_A=h=10 m $\quad$ v_A=0

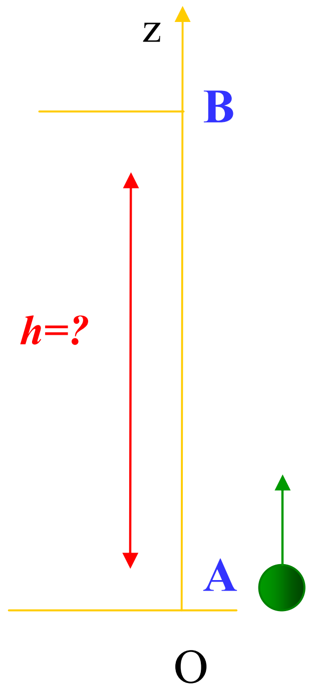
z_B=0 $\quad$ v_B=?

=0, perché $z_B = 0$ $\qquad$ =0, perché $v_A = 0$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2gh} \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 10} = 14\frac{m}{s}$$

Esercizio **Conservazione energia meccanica**

Un corpo di massa m=10 kg, da terra viene tirato verso l'alto con velocità v=14 m/s. Che altezza raggiunge?



Sol.:

Dal teorema di conservazione dell'energia meccanica: $E_m = E_k + E_p = \text{cost}$

$$\Downarrow$$

$$E_{p,A} - E_{p,B} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

$$\Downarrow$$

$z_A=0$ $v_A=14\text{m/s}$

$z_B=?$ $v_B=0$

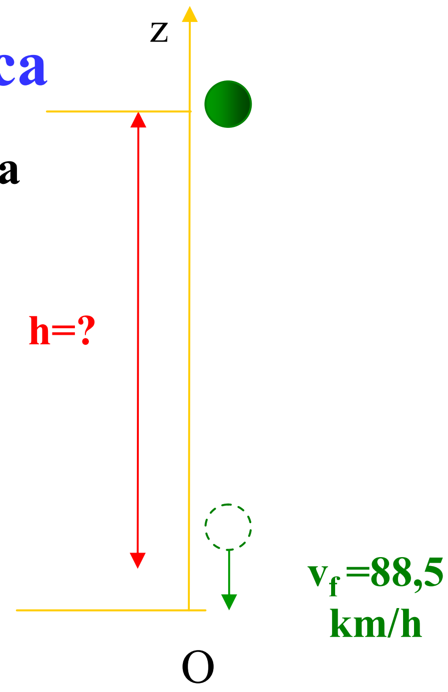
$$mgz_A - mgz_B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

$=0$, perché $z_A = 0$ $=0$, perché $v_B = 0$

$$mgz_B = \frac{1}{2}mv_A^2 \Rightarrow z_B = \frac{v_A^2}{2g} \Rightarrow z_B = \frac{14^2}{2 \cdot 9.8} = 10\text{m}$$

Esercizio Conservazione energia meccanica

Da che altezza deve cadere un corpo di m=1300 kg per avere una velocità finale di 88,5 km/h?



$$v_f = 88{,}5\frac{km}{h} = 88{,}5\frac{1000}{3600}\frac{m}{s} = 24{,}58\frac{m}{s}$$

Dal teorema di conservazione dell'energia meccanica:

$$E_{p,in} + E_{k,in} = E_{k,f} + E_{p,f}$$

$$\Downarrow$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$h = \frac{v_f^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{24{,}58^2}{2 \cdot 9.8} = 30{,}8m$$